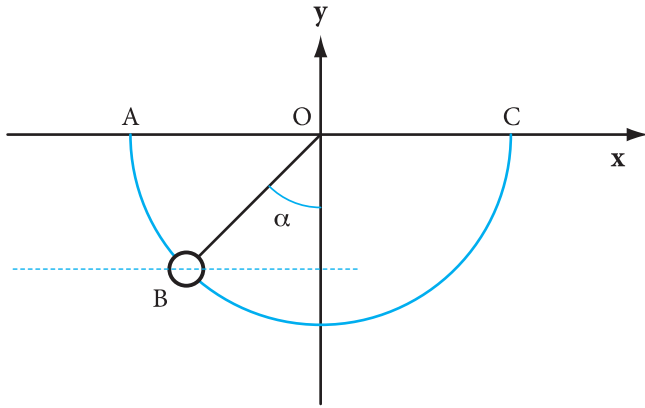


פתרון אנליטי של בעיות פיסיקאליות בעזרת המחשה גרפית במחשב

טאהא מסאלחה, בית ספר תיכון דבוריה והמכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל, חיפה



תרשים 1: תאור סכימתי של תנועת הכדור לאחר שחרור

בדרך כלל מתבקש התלמיד לחשב מספר גדלים פיסיקליים של הכדור בהגיעו לנקודה B, בה יוצר החוט זווית כלשהי (למשל: $\alpha = 55^\circ$) עם האנך y לציר האופקי x (ראה תרשים 1). הגדלים אותם מתבקש התלמיד לחשב עבור הכדור הם בדרך כלל:

1. מהירותו
2. תאוצתו הרדיאלית
3. תאוצתו המשיקית
4. האנרגיה הקינטית שלו
5. האנרגיה הפוטנציאלית שלו
6. האנרגיה הכוללת שלו
7. המתחיות בחוט
8. הכוח הצנטריפוגלי (אם הפתרון במערכת הגוף) או הכוח הצנטריפטלי (אם הפתרון במערכת הצופה)

3. פתרון הבעיה ושלבי הפתרון

הגישה בה אנו נוקטים לפתרון בעיה כזו, שונה מהדרך השגרתית. במקום לחשב את 8 הגדלים שנמנו לעיל נתייחס אליהם כמשתנים ונחקור אותם כפונקציה של הזווית שיוצר החוט עם האנך לציר האופקי:

שלב 1 - מהירות הכדור

נסמן ב-x את הציר הנמצא במישור הייחוס האופקי. מחוק שימור האנרגיה נובע, שהאנרגיה הכוללת בנקודה A שווה לאנרגיה הכוללת בנקודה B וזו שווה גם לאנרגיה הכוללת בנקודה C. דבר זה נכון בתנאי שאנו דנים במערכת סגורה², כלומר:

1. מבוא

העידן "החדש ישן" של עולם המחשבים העמיד בפני המורה ותלמידיו אתגרים חדשים, התורמים להשבת הוראת המדעים של המורה מחד והעמקת מידת ההפנמה של תלמידיו מאידך. במהלך השנים שעברו ראינו שימושים רבים ומגוונים לסביבה החינוכית הממוחשבת - מתוקשבת כגון: במעבדי תמלילים (Word), להכנת טקסטים ומבחנים, בגיליונות אלקטרוניים (Excel), לסרטוט גרפים של תוצאות ניסוי, ב-PowerPoint לבניית מצגות דינמיות ובסימולציות ממוחשבות כגון אלה של שלמה רוזנפלד, G-Tek של שוקי גלזר ו-Priner.

לרשות מורי הפיסיקה עומדות מעבדות ממוחשבות המשמשות לביצוע מדידות בזמן אמת (V-Scope, Data-Logger, Pasco), שימוש במאגרי מידע עולמיים ממוחשבים (NASA), שימוש בסימולציות ממוחשבות המצויות באינטרנט ובבתי הספר לדוגמה: <http://www.explorescience.com>.

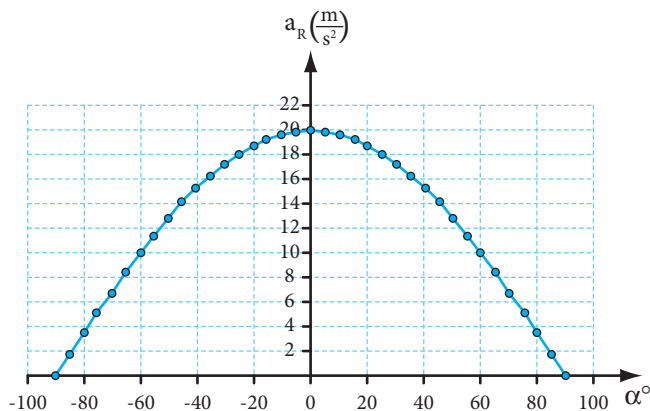
בשנים האחרונות הולך ומתחזק אצלנו יישום החשיבה האנליטית בשיעורי הפיסיקה (המדעים), הן בניתוח התופעות הפיסיקליות והבעיות המתלוות אליהן בדרך כלל, והן בהיקף ניצול הסביבה החינוכית הממוחשבת, בה תלמיד מתרגל את היכולות שלו ביישומי המחשב השונים. הדיונים הכיתתיים מראים, בין היתר, שגישה זו יצירתית יותר לדעת המורה, ומשפרת את הבנתם של התלמידים. אני עד לכך, שגישה זו מחזקת לא רק את יכולת הניתוח האנליטי של הנוקט בה, אלא מגבירה את ההנאה מלימודי הפיסיקה והמדעים בכלל והתועלת המופקת היא מירבית.

2. בעיה פיסיקלית לדוגמה

תנועה בחצי התחתון של מעגל זקוף, הנה בעיה פופולרית בקרב עמיתי מורי הפיסיקה ומוכרת לתלמידים. כאן ברצוני להשקיף מהצד על הפתרון הקלאסי של הבעיה, ולעמוד על ניתוחה מחדש של בעיה זו, בעזרת הצגה גרפית (visualization) במחשב. לדוגמה: כדור שמסתו $m = 1.7\text{kg}$ קשור לחוט שאורכו $l = 0.8\text{m}$, קצהו השני של החוט קשור לנקודה O. משחררים את הכדור מהנקודה A בה החוט אופקי בעת שחרורו (תרשים 1).

1. חוק שימור האנרגיה אומר "האנרגיה נשמרת במערכת סגורה". מערכת סגורה זו מערכת שלא קיימת בינה לבין סביבתה כל אינטראקציה.
2. אנו מניחים שאין השפעות אחרות על הכדור, כגון: חיכוך והתנגדות אוויר. בנוסף לכך רצוי לזכור שכוח הכובד משמר.

הגרף המתקבל, משימוש בגיליון אלקטרוני, עבור התאוצה הרדיאלית, הוא:



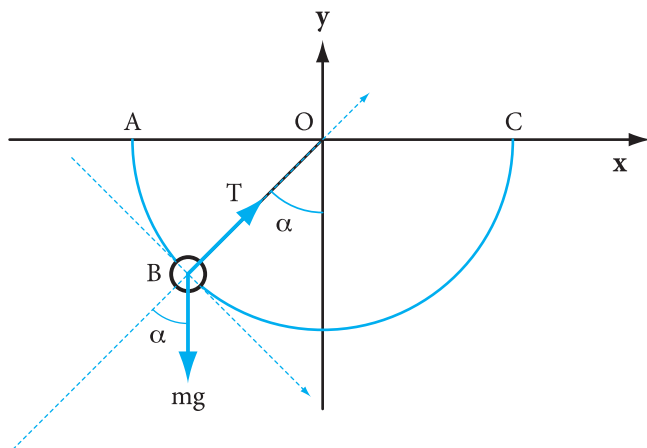
גרף 2: גודל התאוצה הרדיאלית a_R של הכדור כפונקציה של הזווית α

מגרף 2 אנו רואים כי הגודל המרבי של התאוצה הרדיאלית של הכדור מתקבל כאשר זווית הסטייה מהאנך מתאפסת, והגרף סימטרי. בגרף אפשר לקרוא את גודל התאוצה הרדיאלית של הכדור בכל זווית שנבחר.

שלב 3 - התאוצה המשיקית והתאוצה הכוללת

התאוצה המשיקית של הכדור מתקבלת מחקירת הכוחות הפועלים על הכדור הנדון. אם כך, נשאלת השאלה מהם הכוחות הפועלים על הכדור? (כמובן, ניתן לשאול בנוסף: מי מפעיל את הכוחות הללו? וכן שאלה נוספת, לא פחות חשובה, מהם הכוחות אותם מפעיל הכדור, ועל מה הם פועלים?)

הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח הכובד mg בכיוון מרכז כדור הארץ והמתיחות בחוט T בכיוון מרכז המעגל (תרשים 2). במערכת הצופה פועל על הכדור בכיוון המשיק למסלול תנועתו רק הרכיב $mg \sin \alpha$ של כוח הכובד.



תרשים 2: תאור סכימתי של הכוחות הפועלים על הכדור לאחר שחרורו

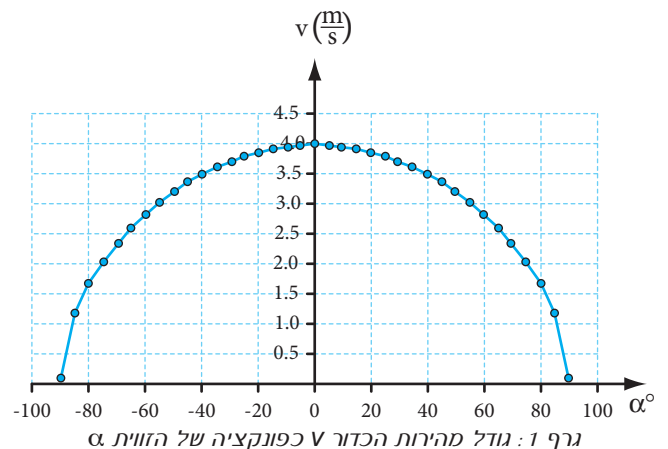
$$(1) \quad E(A) = E(B) = E(C)$$

המשמעות הפיסיקלית של שחרור הכדור בנקודה A במהירות התחלתית $v_0 = 0$ ומגובה התחלתי $h_0 = 0$ היא שהאנרגיה הכוללת של הכדור בנקודה A בעת השחרור היא אפס. מצד שני אנרגיית הכדור בנקודה B מורכבת מאנרגיה קינטית ומאנרגיה פוטנציאלית $E(B) = E_k(B) + E_p(B)$. האנרגיה הקינטית של הכדור נתונה על ידי $E_k(B) = \frac{1}{2}mv_B^2$, והאנרגיה הפוטנציאלית של הכדור נתונה על ידי $E_p = -mg\ell \cos \alpha$ (במצב הנתון נמצא הכדור מתחת למישור הייחוס לכן הסימן השלילי). לאחר הצבת הגדלים הנ"ל בחוק שימור האנרגיה (1), נקבל:

$$0 = \frac{1}{2}mv_B^2 - mg\ell \cos \alpha$$

$$(2) \quad v_B(\alpha) = \sqrt{2g\ell \cos \alpha} \quad \text{ולכן:}$$

כלומר, מהירות הכדור כפונקציה של הזווית נתונה על ידי נוסחה (2)! הזווית יכולה לקבל ערכים מ -90° עד $+90^\circ$. הגרף המתקבל משימוש בגיליון אלקטרוני, הוא:



גרף 1: גודל מהירות הכדור v כפונקציה של הזווית α

גרף 1, מראה את המהירות v של הכדור כפונקציה של הזווית α . אנו רואים כי הגודל המירבי של המהירות מתקבל כאשר זווית הסטייה מהאנך מתאפסת, והגרף סימטרי ביחס לציר האנכי העובר בנקודה בה הזווית מתאפסת. מהגרף ניתן לקבל את גודל המהירות בכל זווית שנבחר, לא רק בזווית נתונה!

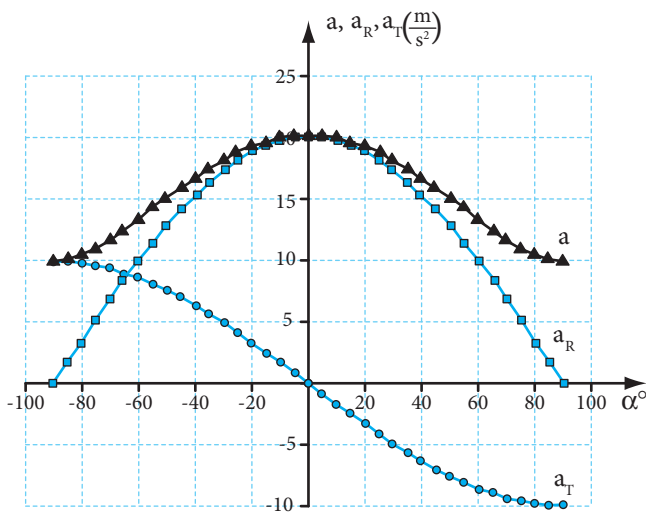
שלב 2 - התאוצה הרדיאלית

התאוצה הרדיאלית של הכדור נתונה על ידי הנוסחה:

$$a_R = \frac{v^2}{R} = \frac{2g\ell \cos \alpha}{\ell}$$

$$(3) \quad a_R = 2g \cos \alpha \quad \text{ולכן:}$$

הגרפים, המתקבלים מהגיליון האלקטרוני, של התאוצה הכוללת a , התאוצה הרדיאלית a_R והתאוצה המשקית a_T כפונקציה של הזווית α מוצגים בגרף 4: a, a_R, a_T



גרף 4: התאוצה הכוללת של הכדור (הקו שנקודותיו בצורת משולשים), התאוצה הרדיאלית של הכדור (הקו שנקודותיו מרובעים) והתאוצה המשקית (הקו שנקודותיו עגולים) כפונקציה של הזווית

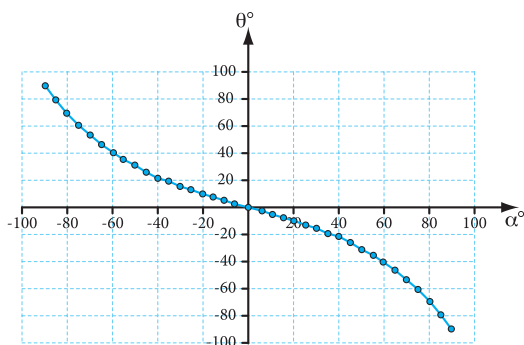
התבוננות בגרף 4, מראה שתאוצת הכדור הכוללת תמיד חיובית ומקבלת את ערכה המרבי בזווית אפס והוא פי שנים מערכה של תאוצת הכובד; וערכה מזערי בזוויות 90° ו- 90° ושווה לערך תאוצת הכובד. וקטור התאוצה הכוללת יוצר זווית θ עם וקטור התאוצה הרדיאלית (הרדיוס וקטור), ומתקיים:

$$\tan \theta = \frac{a_T}{a_R} = \frac{g \sin \alpha}{2g \cos \alpha} = \frac{1}{2} \tan \alpha$$

הזווית במעלות ניתנת על ידי:

$$(6) \quad \theta = \frac{180}{\pi} \arctan \left[\frac{1}{2} \tan \alpha \right]$$

הגרף המתקבל עבור הזווית θ כפונקציה של הזווית α , הוא:



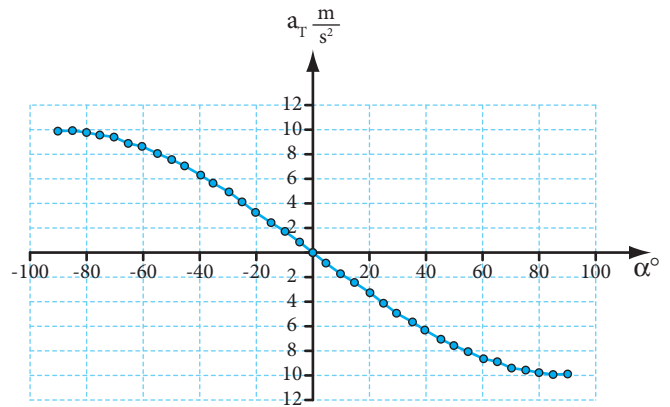
גרף 5: תלות הזווית θ , שיוצר וקטור התאוצה הכוללת עם הרדיוס וקטור, בזווית α (ראה תרשים 3)

נסמן את התאוצה המשקית ואת הכוח המשקי' ב- F_T, a_T בהתאמה. לפי החוק השני של ניוטון, מתקיים:

$$\Sigma F_T = -mgs \sin \alpha = ma_T$$

$$(4) \quad a_T = -g \sin \alpha \quad \text{ולכן:}$$

הגרף המתקבל, משימוש בגיליון אלקטרוני, עבור התאוצה המשקית, הוא:



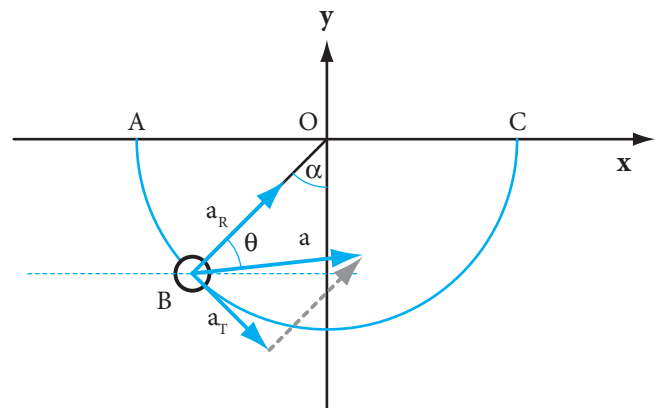
גרף 3: התאוצה המשקית a_T של הכדור כפונקציה של הזווית α

מגרף 3 אנו רואים כי גודל התאוצה המשקית של הכדור הוא מרבי כאשר זווית הסטייה מהאנך 90° וגודלה שווה לגודל תאוצת הכובד. כאשר זווית הסטייה מהאנך היא 90° גודל התאוצה המשקית הוא הנמוך ביותר ושווה לגודל השלילי של תאוצת הכובד. גרף התאוצה המשקית של הכדור מראה שתלות התאוצה המשקית בזווית אינה ליניארית ואינה סימטרית; הגרף **אסימטרי**.

התאוצה הכוללת של הכדור הנה הסכום הווקטורי של התאוצה הרדיאלית והתאוצה המשקית (ראה תרשים 3). התאוצה הכוללת ניתונה על ידי:

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_T^2}$$

$$(5) \quad a = \sqrt{(2g \cos \alpha)^2 + (g \sin \alpha)^2} = g\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}$$



תרשים 3: התאוצה הכוללת a של הכדור הנה הסכום הווקטורי של התאוצה הרדיאלית a_R והתאוצה המשקית a_T

הכוח הצנטריפוגלי בנקודה B, נתון על ידי:

$$(10) \quad F_c(B) = \frac{mv_B^2}{\ell} = 2mg \cos \alpha$$

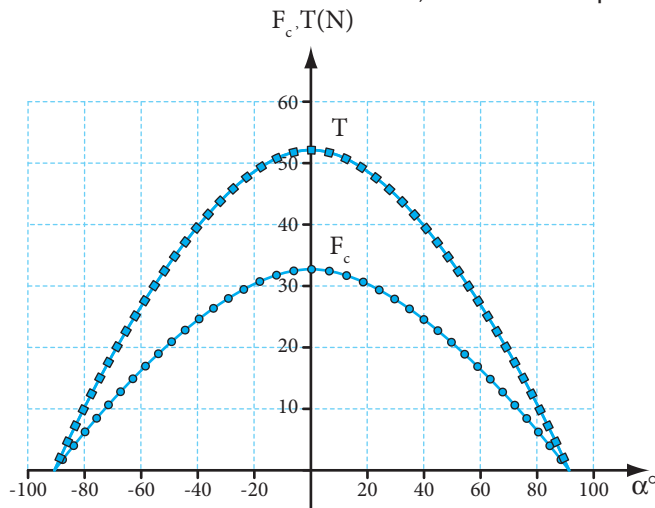
בטרשים 2 רואים כי:

$$(11) \quad T(B) - mg \cos \alpha = \frac{mv_B^2}{\ell}$$

לכן, המתוחות בחוט, T(B), בנקודה B, נתונה על ידי:

$$(12) \quad T(B) = 3mg \cos \alpha$$

הגרפים המתקבלים עבור המתוחות והכוח הצנטריפטלי כפונקציה של הזווית α , הם:



T —■— F_c —●—

גרף 7: הכוח הצנטריפטלי F_c והמתוחות T בחוט כפונקציה של הזווית α

גרף 7 מתאר את הכוח הצנטריפטלי ואת המתוחות בחוט כפונקציה של הזווית בין הרדיוס וקטור לבין הציר y. ניתן לראות בבירור ששני הכוחות מתאפסים בקצוות ומקבלים את ערכם המרבי בנקודה בה הזווית α מתאפסת. שים לב שהמתוחות בנקודה הנמוכה ביותר ($\alpha = 0$) שווה לשלוש פעמים כוח הכובד הפועל על הכדור!

4. דיון וסיכום

ראינו כאן גישה יצירתית ולא שגרתית, של פתרון בעיות וניתוח תופעות פיסיקליות, תוך ניצול מושכל של הגיליון האלקטרוני רב העוצמה. גישה זו תורמת להעצמת יכולות הלומד (תלמיד ומורה) בהתמודדות עם הדינמיקה אותה מכתובה הבעיה הנדונה או התופעה הנחקרת. אני דוגל בגישה אנליטית ויזואלית זו ומיישם אותה בפועל שנים רבות. הנאת התלמידים בפתרון

גרף 5, מראה שתלות הזווית θ בזווית α אסימטרית ומתקיים $\theta(\alpha = 0) = 0$, וכן הזווית θ מקבלת את ערכה המרבי כאשר α מקבלת את ערכה המזערי, ו- θ מקבלת את ערכה המזערי כאשר ערכה של α מרבי.

שלב 4: האנרגיה הקינטית, הפוטנציאלית והכוללת

ראינו בשלב 1 את האנרגיה הקינטית ואת האנרגיה הפוטנציאלית. על סמך ההנחות שהנחנו ובהצבת הביטוי עבור מהירות הכדור שקיבלנו בנוסחה (2), תקבל האנרגיה הקינטית בנקודה B, את הצורה:

$$(7) \quad E_k(B) = \frac{1}{2} mv_B^2 = mg \ell \cos \alpha$$

והאנרגיה הפוטנציאלית תקבל את הצורה:

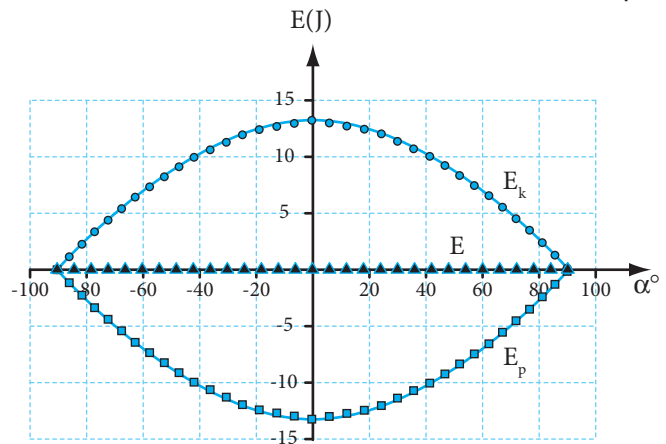
$$(8) \quad E_p(B) = mgh = -mg \ell \cos \alpha$$

האנרגיה הכוללת של הכדור היא:

$$(9) \quad E(B) = E_k(B) + E_p(B) = mg \ell \cos \alpha - mg \ell \cos \alpha = 0$$

הגרפים המתקבלים עבור האנרגיות E_k , E_p ו- E כפונקציה של הזווית α , מופיעים בהמשך.

בגרף 6 ניתן לראות בבירור את האנרגיה הקינטית החיובית ואת האנרגיה הפוטנציאלית השלילית, סכום האנרגיות שווה לאנרגיה הכוללת השווה לאפס, כצפוי. (שים לב, אם משנים את מישור היחוס ערך האנרגיה הפוטנציאלית משתנה ואתו משתנה גם ערך האנרגיה הכוללת.



E_p —■— E_k —●— E —▲—

גרף 6: תלות האנרגיות (האנרגיה הקינטית, האנרגיה הפוטנציאלית והאנרגיה הכוללת) בזווית α

שלב 5: המתוחות בחוט והכוח הצנטריפוגלי (הכוח הצנטריפטלי)

בשלב 1, קיבלנו (נוסחה 2) ביטוי עבור מהירות הכדור, לכן

כזה ומידת הבנתם את הנושא הנלמד (הנחקר), אינה פחותה ממידת הנאתי בנייתוח הבעיה והעלאת יכולת ההכללה למצבים שונים ובעיות אחרות.

בגישה זו אני פותר בעיות ומסביר תופעות פיסיקאליות ומנתח אותן, לא רק במכניקה, אלא גם בחשמל ומגנטיות ופרקי הבחירה השונים.

נכון הוא, שפתרון בדרך זו, צורך יותר זמן ויותר חשיבה אנליטית וכושר ניתוח, מהפתרון השגרתי והמקובל, שבסופו אנו מקבלים את המספר המייצג את התשובה הנכונה הרשומה בסוף הפרק! נכון הוא שהמורה יכול בשיעור אחד לפתור כמה בעיות של הצבת מספרים בנוסחה. אולם כאן המצב שונה בתוכן ובמהות. כאן, קשה לפתור יותר מבעיה אחת בשיעור! (לפחות בפעם הראשונה בה אנו פותרים בעיות בגישה זו). אבל בעיה זו כוללת בתוכה מכלול של בעיות ומצבים שקיים ביניהם סדר לוגי וניתן לקשור ביניהם. בנוסף לכך אתה עשוי לפגוש אפשרויות שלא עלו בדעתך קודם. בגישה זו מפתחים הלומדים את יכולתם להתמודד בהצלחה עם בעיות כמותיות ואיכותיות.

תודתי נתונה לפרופ' אורי גניאל, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות, על הערותיו והארותיו בעלות העניין במאמר זה.

לקריאה נוספת

1. רוזן ע. וקרקובר ז., (1999), "מכניקה ניוטונית", המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות.
2. סלע ד., (2004), "המטוטלת בתכנית הלימודים ובבחינות הבגרות בפיסיקה", תהודה (1) 24, 6.
3. דצקובסקי ו. וגבאי י., (2002), "ניתוח איכותי של תנועת גופים קשורים על מישור משופע", תהודה (1) 23, 15.

תהודה

אל מגישי/מגישות מאמרים לפרסום ב"תהודה"

על מנת להקל על המערכת ולזרז את קצב הדפסת מאמר המוצע לפרסום ב"תהודה" נא למלא אחר ההנחיות הבאות:

1. לשלוח את המאמר כשהוא מודפס על מחשב PC כקבץ WORD בפורמט DOC. עדיף לשלוח את המאמר בדאר האלקטרוני כ-attachment לפי הכתובת: hanna.goldring@weizmann.ac.il, בצרוף עתק מודפס של המאמר. אם הדבר אינו אפשרי, יכולים לשלוח דיסקט + עתק מודפס לפי הכתובת: חנה גולדרינג ורחל ברדה, מערכת "תהודה", המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות 76100.

2. סרטוטים ותצלומים המצורפים למאמרים.

א. סרטוטים

רצוי שהסרטוטים יהיו "שתולים" כתמונות בטקסט המאמר. אם אפשר כדאי להכין את הסרטוטים ב-paintshop pro בפורמט tif ולשלוח אותם על דיסקט נפרד. אם הדבר אינו באפשרותכם, אנו שלחו לנו סרטוט ברור ונקי.

ב. תצלומים

רצוי לשלוח תשליל (נגטיב) של התצלום. רצוי ל"שתול" גם את התצלומים בטקסט המאמר. אם אין בידכם תשליל, אנא שלחו תצלום באיכות טובה. כל סרטוט וכל תצלום יש למספר לפי הופעתו במאמר (תרשים 1, תרשים 2 וכו').

כל מאמר שישלח אלינו לפרסום, יוגש לבדיקה למורי פיזיקה ו/או מדענים מומחים בתחום בו עוסק המאמר. המערכת שומרת לעצמה את הזכות לבקש מהכותב שינויים ו/או הבהרות במאמר בהתאם להמלצות הבודקים. מאמרים שלא יתקבלו לפרסום, יוחזרו לכותבים.

בשאלות וביירוטים נא לפנות לחנה או לרחל, בטלפון 08-9342981, או בפקס: 08-9344174.

בכל דבר דואר שישלח בפקס נא להוסיף עבור "מערכת תהודה".