

מכתבים למערכת

בעיות בהרחבת מודל בוהר לאלקטרון בשדה מגנטי

אבי מרחבקה ואורי גניאל, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

הנחה מרכזית אחרת במודל בוהר קובעת כי "מכפלת תנע האלקטרון, mv , בהיקף מסלולו $2\pi r$ חייבת להיות כפולה שלמה של קבוע פלאנק."

$$(2) \quad 2\pi r m v = n h$$

במלים אחרות, התנע הקווי הוא שמקוונטט. ישנם ניסוחים בהם הקוונטיזציה היא של התנע הזוויתי במקום התנע הקווי, אך התנע הזוויתי אינו חלק מהחומר הנלמד בביה"ס התיכון בארץ.

חיזוק של התפיסה של מסלולים סגורים של האלקטרון ושל קוונטיזציה של התנע הקווי מתקבל מתוך עיקרון דה-ברויי. לפי דה-ברויי גם לחלקיק יש אורך גל הנתון על ידי

$$(3) \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

תנאי הקוונטיזציה (2) מוסבר על ידי תנאי דה-ברויי (3) ומתקבל מהדרישה כי האלקטרון חייב לקיים מספר שלם של אורכי גל במסלולו סביב הגרעין

$$(4) \quad 2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{mv}$$

אם כן אנו רואים כי במודל בוהר:

- התנועה של האלקטרון היא מעגלית
- ה"סיבה" לתנועה זו היא האופי הגלי של האלקטרון (עיקרון דה-ברויי)
- הקוונטיזציה היא של התנע הקווי של האלקטרון

נפנה כעת לשאלה במבחן הבגרות. כאשר האלקטרון נע בשדה מגנטי קבוע B במהירות המאונכת לשדה $\vec{v} = v_{\perp}$ הוא מבצע תנועה מעגלית ברדיוס קבוע

$$(5) \quad R = \frac{mv_{\perp}}{eB}$$

לכן על פניו נראה כי ניתן באופן ישיר להפעיל עקרונות ממודל האטום של בוהר ולקבל רמות אנרגיה (ראה פתרון הבעיה בעמ' 63 בחוברת זו)

$$(6) \quad E_n = \frac{eB}{2m} n \hbar$$

ברצוננו להגיב על סעיף ג' של שאלה 3, פרק שני, פיזיקה מודרנית, בחינת בגרות בפיזיקה, קיץ תש"ס. (ראה עמודים 62, 63 בחוברת זו).

ג. מתברר כי אפשר ליישם את ההנחה של בוהר,

המבוטאת בקשר I $(I. \quad m_e v r = n \frac{h}{2\pi})$, גם על

אלקטרון הנע במסלול מעגלי בשדה מגנטי אחיד. (1) הראה, בעזרת קשר I, כי הרדיוסים של המסלולים המעגליים של האלקטרון, הנע בשדה מגנטי אחיד B, מקיימים את הקשר:

$$III. \quad r = \sqrt{\frac{h}{2\pi e B}} n$$

(2) הראה שמקשר III נובע שרדיוסי המעגלים הם בדידים. (15 נקודות)

כדי לפתור את השאלה יש להשתמש בתנאי הקוונטיזציה של תנועת האלקטרון במקרה של תנועה מעגלית, באופן דומה לנעשה במודל האטום של בוהר. כמובן שסוג שאלות כזה, שבהן התלמיד מתבקש להחיל עיקרון שלמד על תופעה פיזיקלית חדשה, הוא מבורך. אלא שנדמה לנו כי מקרה זה יכול לעורר מספר בעיות לתלמיד. אנו רוצים להפנות את תשומת הלב למספר קשיים המעידים על הבעייתיות בדוגמה זאת.

על פי הנחה אחת במודל האטום של בוהר, האלקטרון נע בתנועה מעגלית מסביב לגרעין. המודל נסמך על הכוח האלקטרוסטטי שבין הגרעין והאלקטרון שהוא הגורם לתנועה המעגלית:

$$(1) \quad k \frac{q_1 q_2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

הכוח הוא כוח מרכזי ולכן התנועה של האלקטרון היא במישור.

הכניסה v של האלקטרון לשדה המגנטי. תוצאה זו היא בסתירה לזו המתקבלת אם מקוונטים את (8) (התשובה לשאלת הבגרות). רדיוס המסלול של היון המתקבל אז הוא

$$(9) \quad r_n = \sqrt{\frac{h}{2\pi qB}} n$$

ראשית בנוסחה (9) רדיוסי המסלולים נקבעים ללא קשר למהירות או למסה של היון, להבדיל מהנוסחה הקלאסית (8) שם הרדיוס תלוי במסה ובמהירות. ואכן בדיון הקלאסי מדברים על המקום המדויק בו האלקטרון ניכנס לשדה המגנטי ועל מהירותו המדויקת שם, תאור אשר אינו אפשרי בעולם הקוונטי. תלמיד הלומד את מודל בוהר עשוי להעלות בעיות אלו אך אין ביכולתו להתמודד עמן במסגרת לימודיו. אנחנו לא חושבים שיש מקום לשאלה המובילה לבעייתיות כזו ללא הסבר ממצה, הסבר שאינו חלק מתוכנית הלימודים. אכן, גם כאשר אנו בונים את מודל בוהר קיימת אותה בעיה כביכול. במודל בוהר אנו לוקחים מצב רציף של מרחקי האלקטרון לגרעין על פי (1), בו בעיקרון הרדיוס יכול לקבל כל ערך שהוא. אחרי קוונטיזציה של התנע הזוויתי במודל בוהר הרדיוסים נהפכים לדיסקרטיים.

$$(10) \quad r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 m q e^2} n^2$$

וכביכול הגענו לסתירה דומה: מחד מסלולים רציפים ומאידך מסלולים בדידים. בנוסחה (1) המטען, קבוע קולון והמסה הם גדלים ידועים. האם אנו יודעים מראש מה היא המהירות או מה הוא רדיוס המסלול של האלקטרון? התשובה שלילית. פיסיקלית אנו לא יודעים ליצור מצב בו "שמים" את האלקטרון בתנועה מעגלית ברדיוס ידוע מן הגרעין ובמהירות ידועה. מצב כזה אינו מתאר מערכת פיסיקלית קיימת. משוואה (1) היא אם כן אחת מן המשוואות מהן ניתן לגזור את המהירות ואת הרדיוס של האלקטרון באטום ואינה מספיקה לתיאור מלא של תנועת האלקטרון. המשוואה השנייה היא, כמוכן, תנאי הקוונטיזציה של בוהר. משוואות (1) ו-(8) הן משוואות קלאסיות. כמשוואות קלאסיות נוכל לפרשן כמשוואה למשתנה אחד. אך כאשר אנו מתארים עולם קוונטי אנו צריכים להוסיף את תנאי הקוונטיזציה. אז המשוואות הופכות למשוואות המקשרות בין שני גדלים שאינם ידועים. לסיכום, השאלה שהוצגה בבחינת הבגרות אינה מוסיפה להבנת הפיזיקה, ופתרונה על ידי התלמיד היא פעילות מכנית של הצבת נוסחאות זו בתוך זו. יתרה מזאת: היא מעוררת קשיים מושגיים שונים בחומר הנלמד, ואינה מסבירה את המגבלות בהן היא רלוונטית.

נניח כעת כי לאלקטרון יש גם רכיב של מהירות מקביל לשדה כך ש- $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$; במקרה זה האלקטרון מבצע תנועה בורגית, בעלת רדיוס R (5) ופסיעה l .

$$(7) \quad l = \frac{2\pi m v_\parallel}{eB}$$

הפסיעה היא המרחק שמתקדם האלקטרון בזמן מחזור

$$T = \frac{2\pi m}{eB}$$

אנו רואים כי כאשר האלקטרון נע בתנועה בורגית

- מסלול האלקטרון אינו סגור
- התנע הקווי של האלקטרון מורכב מסכום של שני רכיבי

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_\parallel + \mathbf{P}_\perp$$

מסיבות אלו לא ניתן לתאר את האלקטרון במסגרת מודל בוהר. ביתר פירוט: בגלל שהאלקטרון אינו נע בתנועה מעגלית ההסבר לתנאי הקוונטיזציה של בוהר מעיקרון דה-ברויי אינו ישים. מאחר והתנע הוא וקטור לא ברור כיצד להפעיל את עקרון הקוונטיזציה במודל בוהר. ברור אם כן שמודל בוהר אינו ישים לתנועה בורגית של אלקטרון בשדה מגנטי. נשאלת אם כן השאלה האם ניתן להפריד בין אלקטרון הנע במעגל סגור בשדה מגנטי לבין המקרים בהם הוא נע בתנועה בורגית. לדעתנו הפרדה כזו אינה מוצדקת. היא מהווה כר לתפיסות מוטעות יותר משהיא מביאה תועלת. למשל, אפשר יהיה לפרש הפרדה כזו כאילו נכון ליישם עקרונות קוונטיים רק כאשר $v_\parallel = 0$. להערכתנו, אין בחינת הבגרות המקום הראוי להציג שאלה בעייתיות כזו. בלשון אחרת, אם רוצים ליישם עקרון קוונטיזציה לאלקטרון בשדה מגנטי יש להתייחס לאפשרות שהאלקטרון עושה תנועה בורגית. ברם אז מודל בוהר אינו ישים, והוא מצריך הרחבה לא פשוטה.

כדי להדגים בעיה נוספת המתעוררת מהשאלה, ניבחן את מדידת המסה של יון בספקטרומטר מסות. כזכור המסה של יון היא ביחס ישר לרדיוס הסיבוב שלו לפי

$$(8) \quad R = \frac{v}{qB} M$$

(אנו מכילים את המקרה הקודם למקרה של יון שמטענו q ומסתו M). המהירות בנוסחה (8) נקבעת על ידי גורם חיצוני מראש, למשל על ידי הפרש פוטנציאלים (לדוגמה שפופרת קרן קתודית). מה שחשוב לדיוננו הוא כי מהירות זו היא רציפה ונקבעת מראש. נבחן את המקרה של ספקטוגרף המסות בו יון ניכנס לשדה מגנטי נתון. מטענו החשמלי של היון ידוע, כמו גם מהירותו. לפי (8) עבור מסה נתונה נקבל ערכים רציפים של רדיוס המסלול של האלקטרון R כפונקציה של מהירות

השוואה עם טיפול קוונטי שלם

טיפול בבעיה של אלקטרון בשדה מגנטי B נעשה ב-Landau and Lifshitz⁽¹⁾. רמות האנרגיה המתקבלות שם הן

$$(11) \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2} + \sigma \right) \hbar \omega_H + \frac{p_z^2}{2m}$$

כאשר σ הוא ספין האלקטרון, $\omega_H = \frac{|e|B}{m}$ תדר סיבוב האלקטרון במעגל ו P_z הוא רכיב התנע בכיוון ציר z . מקור הגורם $\frac{1}{2}$ בתוך הסוגריים הוא ב"אנרגיית האפס" שאיננה קיימת בתאור הקלאסי.

לשם השוואה עם הפתרון שהוצע בשאלת הברגות נציב $P_z = 0$ (התנועה מעגלית), נשמיט את הגורם $\frac{1}{2}$ וכן נציב $\sigma = 0$ (ספין האלקטרון אינו נכלל במודל הפשוט). גם אז אין הפתרון (6) מתלכד עם הפתרון המלא (11), כפי שקל לבדוק בהצבה ישירה. (11) נותן

$$E_n \Rightarrow \frac{n\hbar|e|B}{m}$$

הנבדל מ-(6) בפקטור 2.

סיכום

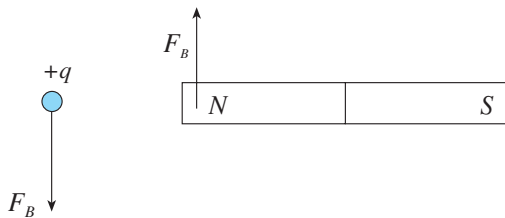
אנו סבורים שהרחבה כמו זו שנעשתה בשאלה יכולה להיות מעניינת ואין לפסול אותה על הסף. היא יכולה להיות חלק מתוכנית לימודים בה מרחיבים את תורת הקוונטים מעבר למודל בוהר ומסבירים את הנקודות באופן מלא ומסודר. בשום פנים ואופן אין מקומה בבחינה במסגרת הנוכחית של תוכנית הלימודים.

מראה מקום

השאלה מקורה ברמות לנדאו

1. Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., Quantum Mechanics, A Shorter Course of Theoretical Physics, Vol 2, Pergamon Press, 1974 pp. 151-153.

תיקון טעות



במכתב למערכת שפורסם ב"תהודה" (1) 21 יולי 2000 נפלה טעות בתרשים ובכיתוב הצמוד לו. כיוון הכוח הפועל על החלקיק הוא **כלפי מטה** וכיוון הכוח הפועל על המגנט הוא **כלפי מעלה** כפי שמוראה בתרשים המתוקן.

על מטען חשמלי חיובי הנע לקראת הקורא מפעיל המגנט כוח מגנטי כלפי מטה, המטען מפעיל על המגנט כוח מגנטי כלפי מעלה.

דוד אגמון.