



עוד על מטוטלות

חרוין בלנק, אוניברסיטת סאפורד, אנגליה

תקציר

האם יש קשר, בין זמן המחזור של מטוטלת מתימטית, לבין זמן המחזור של מטוטלת טבעתית המתנוודת במישור של עצמה סביב ציר העובר דרכה, כאשר אורך המטוטלת המתימטית וקוטר הטבעת שווים? ומה יהיה הקשר כאשר נחתוך מן הטבעת קשת כל שהיא והיא תתנווד סביב ציר על היקף הטבעת ממנו נחתכה, במישור של עצמה? התשובה המפתיעה לשאלה זאת ניתנת בסדרת ניסויים פשוטים אותם ביצע המחבר בפני תלמידים צעירים, מבוגרים וגם מורים. מצורפים גם חישובים פשוטים למדי של זמני המחזור המתאימים.

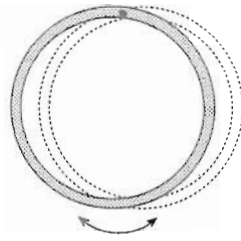
מילות מפתח:

מטוטלת מתימטית, מטוטלת טבעתית, קשת, מומנט התמדה, מרכז המסה.

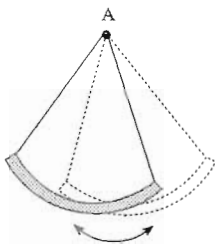
מתקבלת על הדעת שכן קשה להניח שחלקים אלו ינועו בקצב שונה כאשר הם מופרדים, בעוד הם נעים יחד כשהם מחוברים. אם כי כדאי להיזהר עם טיעונים מסוג זה כיוון שהם עלולים להוביל לעיתים למסקנות מוטעות). כדאי לשים לב לכך שאפשר להתייחס אל המסה ה"נקודתית" במטוטלת המתימטית כאל חלק קטן מאוד מחלקה התחתון של הטבעת.



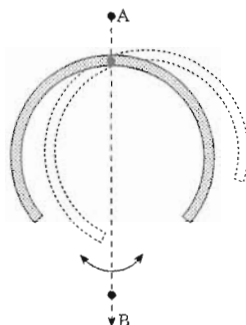
ב.



א.



ד.



ג.

תרשים 1

נפנה כעת לחישוב תאורטי של זמני המחזור של המטוטלות השונות שהזכרנו. זמן המחזור של תנודה של גוף בעל

אחד הנושאים הפופולריים ביותר בשיעורי מדע לתלמידים גילאי 10 עד 12 הוא המטוטלת (המתמטית) הפשוטה. ישנם סיפורים אין ספור על ילדים (ומבוגרים) הדנים בשאלה האם זמן המחזור של התנודה תלוי במסת הכדור התלוי או באורך החוט, ואני אפילו שמעתי תלמידים צעירים מאוד שטענו שמטוטלת בה הכדור הוא בעל הצבע האהוב עליהם, היא בעלת התדירות הגבוהה ביותר.

במשך שנים רבות הצגתי בפני מורים של תלמידים בגילים אלו מערכות מתנוודות מסוגים שונים. לדוגמא: סרגל המתנווד סביב נקודות שונות לאורכו וכדומה. ואולם המטוטלת שעוררה את העניין הרב ביותר היתה מטוטלת בצורת טבעת המתנוודת במישור של עצמה כמתואר בתרשים 1א. במקום למדוד ישירות את זמן התנודה של מטוטלת זו חיפשנו את אורך החוט הדרוש לקבלת מטוטלת מתמטית בעלת אותו זמן מחזור (תרשים 1ב). לשיטה זו יתרונות רבים. בין היתר היא חסכה מאיתנו את הצורך בצידוד למדידת זמן.

רוב האנשים מופתעים מכך שאורך החוט של המטוטלת המתימטית השקולה שווה בדיוק לקוטר הטבעת. חזרנו על הניסוי פעמים מספר עם טבעות בקטרים שונים על מנת לשכנע גם את הספקנים, שתוצאת הניסוי הראשון לא היתה מקרית. כאשר ממשיכים את הניסוי על ידי הוצאת חלק סימטרי ביחס לישר AB (תרשים 1ג) מן הטבעת מקבלים תוצאה שמפתיעה את הצופים אפילו יותר: זמן המחזור של התנודה אינו משתנה. גם כאשר החלק שהוצאנו מתנווד לבדו סביב ציר הסיבוב המקורי (תרשים 1ד) שוב מקבלים תנודה בעלת זמן מחזור שווה. * (תוצאה זו

* את הטבעות השונות לניסוי זה אפשר פשוט לחתוך מתוך לוח עץ, ואולם אני סבאתי שהגלגל העשוי פלסטיק המכונה באנגלית "Hula Hoop" הוא מוצלח למדי.

$$I_A = I_O + m\left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)^2 r^2 = mr^2 - m\left(\frac{2r}{\pi}\right)^2 + mr^2\left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)^2 = 2mr^2 - \frac{4mr^2}{\pi}$$

כאשר השתמשנו בכך שמרחק מרכז המסה מהנקודה הוא:

$$h = r - \frac{2r}{\pi} = \overline{OA}$$

כך נקבל שזמן המחזור של התנודה הוא:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{2mr^2(\pi-2)}{r}\right)}{g\left(\frac{\pi-2}{r}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{g}}$$

זהו בדיוק זמן המחזור של תנודת הטבעת השלמה. כעת נחזור על חישוב זה עבור מטוטלת המורכבת מהמחצית התחתונה של הטבעת (תרשים 3ב). הפעם מרחק מרכז המסה מציר התנודה הוא (בהנחה שמסת חוט התליה זניחה)

$$h_1 = r + \frac{2r}{\pi}$$

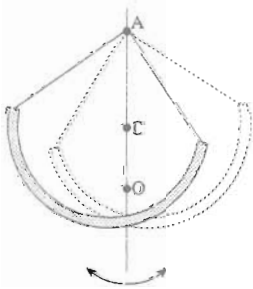
נשתמש בגישה ובסימונים דומים ונקבל ש:

$$I_A = I_O + m\left(\frac{\pi+2}{\pi}\right)^2 r^2 = 2mr^2 + \frac{4mr^2}{\pi}$$

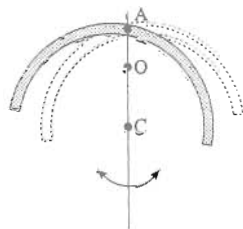
כאשר הצבנו במקום I_O את הביטוי שקיבלנו קודם. כדאי לשים לב לכך שמומנט ההתמדה של שני חצאי הטבעת מסתכמים למומנט ההתמדה שקיבלנו עבור הטבעת כולה. לבסוף מחזור התנודה המתקבל הוא:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(2mr^2\pi + 4mr^2)\pi}{\pi(\pi+2)mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{g}}$$

כך ששוב התוצאה מתאימה לזו של מטוטלת מתמטית. חישוב זמן המחזור של מטוטלת בצורת קשת כלשהיא של טבעת דורש חשבון אינטגרלי, שבוודאי אינו מוכר לתלמידים בגיל זה, אך אנו מביאים אותו בנספח למען השלמות.



א.

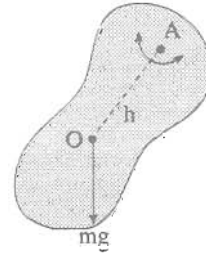


ב.

תרשים 3

מומנט ההתמדה I המתנווד כמתואר בתרשים 2 נתון על-ידי:

$$(1) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$



תרשים 2

כאשר m היא מסת הגוף ו h הוא מרחק מרכז המסה O מציר התנודה A.

מומנט ההתמדה של טבעת ברדיוס r ביחס לציר תנודה העובר דרך מרכזה ומאונך למישור הטבעת, הוא mr^2 , וביחס לציר תנודה העובר דרך A על היקפה הוא:

$$I_A = mr^2 + mr^2 = 2mr^2$$

לכן נקבל שזמן המחזור של מטוטלת בצורת טבעת הוא:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2mr^2}{mrg}} = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{g}}$$

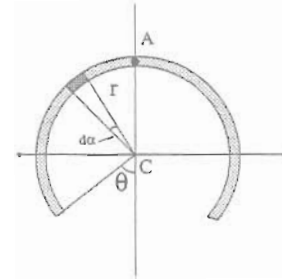
וזהו אמנם זמן המחזור של מטוטלת מתמטית שאורכה $2r$. לפני שנעבור לחישוב זמן המחזור של מטוטלת שלה צורת קשת של טבעת, נחשב את זמן המחזור של חצי טבעת מתנוודת. היתרון בכך הוא שחישוב זה פשוט יחסית ומשתמש בתוצאות ידועות (ההנחה היא שמקום מרכז המסה ידוע).

נסמן ב- I_A את מומנט ההתמדה של מטוטלת המורכבת מחצי טבעת והמתנוודת ביחס לציר העובר דרך הנקודה A כמתואר בתרשים 3א. את I_A נוכל למצוא בעזרת מומנט ההתמדה ביחס למרכז המעגל C שהוא $I_C = mr^2$ כאשר m היא מסת הקשת, ובעזרת מומנט ההתמדה ביחס למרכז המסה אותו נסמן ב- I_O . כיוון שמרחק מרכז המסה (הנקודה O) ממרכז המעגל הוא $\frac{2r}{\pi}$, מומנט ההתמדה של המטוטלת ביחס אליו נתון על-ידי:

$$I_O + m\left(\frac{2r}{\pi}\right)^2 = mr^2 = I_C$$

מומנט ההתמדה ביחס ל A הוא: $I_A = I_C + m(\overline{OA})^2$, ולכן:

א. מציאת מרכז המסה של קשת של טבעת (ראה תרשים 4)



תרשים 4

מטעמי סימטריה ברור שמרכז המסה נמצא על הציר האנכי העובר דרך מרכז הקשת. מרחק מרכז המסה ממרכז הטבעת נתון על-ידי:

$$\overline{OC} = \frac{\int_{\theta}^{2\pi-\theta} pr^2 \cos\alpha d\alpha}{\int_{\theta}^{2\pi-\theta} pr d\alpha} = -\frac{r \sin\theta}{\pi - \theta}$$

כאן ρ היא הצפיפות של הקשת.

(בדיקה: כאשר $\theta = \frac{\pi}{2}$ מקבלים $\frac{2r}{\pi}$.)

כאן מופיע \overline{OC} בסימן מינוס כי בחשבון הזה נלקח הציר $\alpha = 0$ כלפי מטה.

ב. מציאת מומנט ההתמדה של קשת של טבעת ביחס לציר העובר דרכה.

שוב נשתמש ב I_A , I_C , I_O לסימון מומנט ההתמדה ביחס למרכז המסה, למרכז הטבעת ולציר התנודה בהתאמה. מומנט ההתמדה ביחס למרכז הטבעת יגויה:

$$I_C = mr^2 = I_O + mr^2 \frac{\sin^2 \theta}{(\pi - \theta)^2}$$

ולכן מומנט ההתמדה ביחס לציר התנודה לאחר הצבת I_O הוא:

$$I_A = I_O + m \left(r - \frac{r \sin\theta}{\pi - \theta} \right)^2 = 2mr^2 - \frac{2mr^2 \sin\theta}{\pi - \theta}$$

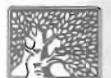
כאשר m מסת הקשת. מציבים את הביטויים שקיבלנו עבור מומנט ההתמדה ביחס לציר התנודה ועבור מרחק מרכז המסה מציר התנודה, ומקבלים שוב:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{g}}$$

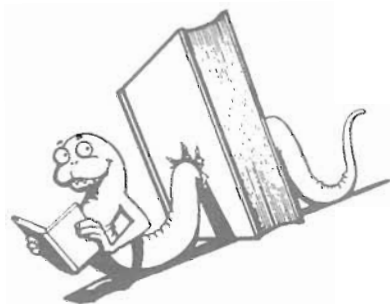
תהודה

כפי שאכן קיבלנו בניסוי.

המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע



ספרים חדשים שיצאו לאור במחלקתנו



1. פרקים במכניקה ניוטונית - עדי רוזן וזאב קרקובר. (כרך א)
2. פיסיקה - מבחני בגרות ברמה של 3 י"ל - עדי רוזן.
ספר חדש הכולל את בחינת הבגרות שהתקיימה בקיץ תשנ"ד
3. פרקים במכניקה ניוטונית - עדי רוזן וזאב קרקובר. (כרך ב - מהודרת עיצוב)
הספר יהיה בחנויות בסוף דצמבר.

נוכרים כי את כל הספרים שבהוצאתנו אפשר לרכוש בחנויות הספרים

וב"גסטליטי", חברה לשיווק והפצה בע"מ, רח' היוצק 4, מפרץ חיפה, ת.ד. 2088, חיפה 31020. טל. 04-419353, 04-410083