

# הערות למאמרו של בודיק ולדימיר

טאב קרקובר, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע. המרכז ללימודים קדם אקדמיים, האוניברסיטה העברית.

על השיטה "המקובלת". מכאן עולה השאלה האם אין להמיר את שיטת ההוראה. מטרתה של הערה זו היא לבחון את כוחותיה ומגבלותיה של שיטת נקודת הקיצון.

*האם אין שיטה זו שקולה לאלוטין לשיטה 'המקובלת'?*

על פי ההסבר בתחילת המאמר, "שיטת נקודת הקיצון"

מאמרו של ולדימיר בודיק ("שיטת הקיצון של האנרגיה הפוטנציאלית") מציג שיטה לטיפול במצבי שיווי משקל. שיטה זו אמורה לשמש כתחליף לשיטה "המקובלת" - שימוש במשוואות כוחות ובמשוואות מומנטים. במאמר מוצגות מספר דוגמאות לשימוש בשיטת נקודת הקיצון, וההתרשמות הראשונית היא שלשיטה זו יש יתרון של ממש

שקולה לשימוש במשוואת כוחות בכל מקרה שהכוחות נגזרים מאנרגיה פוטנציאלית. המשוואה  $\frac{dU}{dx}=0$  אינה אלא משוואת הכוחות.

**אם המשוואה היא משוואת הכוחות הרי (ראה) לכן היא מובילה למשוואה פשוטה יותר?**

זה בגלל שכוחות האילוף לא נלקחו בחשבון. בביטוי לאנרגיה הפוטנציאלית אין מופיעים כוחות האילוף ולכן אי אפשר לגזור אותם מביטוי זה.

**האם אין זה אולי שמשוואת הכוחות (הנזירה) היא הביטוי האנליטי, מסיים חלק מן הכוחות? אם כן, הרי הרישור?**

במשוואת הכוחות הנגזרת אכן חסרים חלק מן הכוחות, ואכן אין להשתמש בה, אלא אם כן אנו יודעים כי כוחות האילוף אינם צריכים להופיע בה. לדוגמה: אם כוחות האילוף פועלים בכיוון  $y$  בלבד, המשוואה  $\frac{dU}{dx}=0$  נכונה, אך המשוואה  $\frac{dU}{dy}=0$  אינה נכונה. השימוש בשיטת נקודת הקיצון מחייב בכל מקרה להתחיל באיתור של קואורדינטה מתאימה, ולעיתים הדבר אינו פשוט. תהליך האיתור של קואורדינטה כזאת עשוי להיות קשה במידה כזו שתמחק את כל יתרון האלגנטיות של השיטה על פני "השיטה המקובלת".

נבחן, לדוגמה, את תרגיל 1 מן המאמר. במקרה זה יש לכוחות האילוף רכיבים גם בכיוון  $x$  וגם בכיוון  $y$ . מכאן שאין להשתמש במשוואות:  $\frac{dU}{dx}=0$  ו-  $\frac{dU}{dy}=0$ . ואכן, כותב המאמר השתמש בקואורדינטה אחרת - הזווית  $\alpha$ .

**כיצד נבדל (באופן) אף הקואורדינטה "הנכונה"?**

בתרגיל 1 (מן המאמר) אפשר לבדוק ולוודא כי הבחירה טובה, אך אין זו בדיקה מיידי. האילוצים המופעלים בכל אחת מנקודות המגע משפיעים גם על ההתנהגות "בכיוון  $\alpha$ ", אך סכומם אינם משפיעים. הקוראים מוזמנים לנמק את נכונות הבחירה, ולשקול אחר כך אם הדבר פשוט.

**האם אפשר לבחור באינטגרל של האנרגיה?**

ההסבר לשיטת נקודת הקיצון כפי שהוא מופיע בתחילת המאמר מתייחס לקואורדינטה  $x$ , אך כבר בדוגמה הראשונה עברנו לקואורדינטה אחרת שאין לה ממדי אורך. המעבר ל"קואורדינטות מוכללות" מצריך הצדקה נוספת.

**האם יש שיטה שגומה אומן בבחינת הקואורדינטה האנליטית?**

כפי שראינו בתרגיל 1 הדברים אינם פשוטים. תלמידים היו עשויים לבחור דווקא בקואורדינטות  $x$  ו- $y$  ולבוא לכלל טעות. חשוב מאוד להזהיר מפני בחירה שרירותית של קואורדינטה. בחירה כזו תביא בדרך כלל לטעות. לעיתים קל לזהות את הקואורדינטה הרצויה ולעיתים יש צורך במאמץ גדול.

כדוגמה, נתבונן בתרגיל 2 מן המאמר. במקרה זה נבחרה הקואורדינטה האנכית  $y$  (של מרכז המוט). המשוואה המתקבלת מגזירת האנרגיה הפוטנציאלית היא משוואת הכוחות לכיוון  $y$ . משוואה זו מותרת לשימוש בתנאי שאין כוחות אילוף בכיוון האנכי. מתברר כי לא זה המצב. בנקודת האחיזה עם התקרה פועל כוח אילוף אנכי. פתרון נכון אינו יכול להתקבל כך (אלא אם נעשית טעות נוספת). הקוראים מוזמנים לאתר קואורדינטה רלוונטית. הפתרון "השגרת" (מומנטים) במקרה זה הוא מיידי.

תרגיל 3 מן המאמר הוא דוגמה נוספת. במקרה זה יש צורך להצדיק את בחירת הקואורדינטה (הזווית המרכזית  $\alpha$ ). תלמידים עשויים לבחור דווקא בקואורדינטה  $y$  (גובה) או בקואורדינטה  $x$  (רדיוס המסלול האופקי), או אולי בזווית היקפית. חשוב מאוד לדעת כי אין חופש בחירה. היתרון של הקואורדינטה שנבחרה הוא בכך שכוח האילוף שכיוונו אל מרכז החישוק אינו פועל במגמה לשנות את  $\alpha$ . הפתרון "השגרת" של התרגיל הזה ידוע למדי ואין בו קושי מיוחד. גם תרגיל 4 נפתר בפשטות בפתרון "השגרת".

**האם אולי להשתמש בשיטה במערכת אף-האנליטית?**

בתרגיל 3 במאמר נעשה שימוש במערכת ייחוס מסתובבת תוך הוספת כוח צנטריפוגלי למערכת הכוחות. מורים רבים נרתעים משימוש במערכות כאלה משיקולים דידקטיים. ברמה הפיסיקלית העקרונית הדבר אפשרי. אפשר גם לרשום ביטוי לאנרגיה הפוטנציאלית שממנה נגזר כוח זה. ראוי לשים לב כי החרוז חופשי לנוע במעלה החישוק. במקרה כזה קיים במערכת המסתובבת גם כוח קוריולי. זהו כוח תלוי במהירות ואיננו יכולים לרשום לו אנרגיה פוטנציאלית.

במובן זה אנו חורגים מן התנאים שבהם מוצדק להשתמש במשפט נקודת הקיצון, ויש צורך להכניס את כוח קוריולי למשוואות. הדבר אינו משפיע על התוצאות במקרה שלנו, כי אנו מעוניינים במצב "שיווי משקל" שבו אין תנועה אנכית וכוח קוריולי מתאפס.