שיטת הקיצון של האנרגיה הפוטנציאלית

ולדימיר בודיק, בי"ס עמל חדרה, תיכון חדרה

מצבי שיווי משקל נידונים בבית הספר תוך שימוש במשוואות כוחות ומומנטים. במאמר תוצג דרך חלופית המתאימה למקרים שבהם הכוחות הפועלים על הגוף נגזרים מאנרגיה פוטנציאלית. בתנאי זה, מצב שבו האנרגיה הפוטנציאלית מקבלת ערך קיצון (אקסטרמום) הוא מצב שיווי משקל.

את עבודתו של כוח משמר לאורך קטע אינפיניטיסימלי dx אפשר לרשום כך:

$$dW=F_x dx=-dU$$

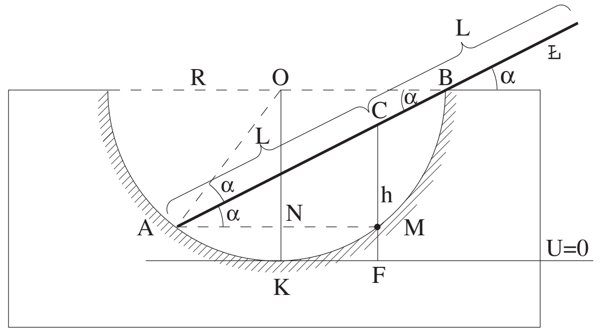
כאשר U היא האנרגיה הפוטנציאלית. מכאן:

$$F_x=-\frac{dU}{dx}$$

שיווי משקל מתקבל כאשר סכום הכוחות הפועלים על הגוף מתאפס - $\Sigma F=0$, כלומר כאשר $\frac{dU}{dx}=0$ (U הוא האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת). נקודות הקיצון (הלוקאליות) של האנרגיה הפוטנציאלית מקיימות תנאי זה, ולכן הן מתאימות למצבי שיווי משקל. סטייה קטנה ממצבים אלה מביאה לשינוי זניח באנרגיה הפוטנציאלית. כאשר האנרגיה הפוטנציאלית מרבית $(U = U_{max})$ סטייה קטנה ממצב שיווי משקל גוררת התרחקות ממנו - זהו שיווי משקל רופף. כאשר האנרגיה הפוטנציאלית מזערית $(U = U_{min})$ סטייה קטנה ממשקל גוררת חזרה אליו - זהו שיווי משקל יציב. מובן שכל זה מחייב אילוצים אידאליים, שאינם מכלים אנרגיה, כמו חיכוך למשל. (ראה גם תהודה 2/15 עמ' 41). כדי לפתור בעיה של תנאי שיווי משקל, צריך למצוא ביטוי של אנרגיה פוטנציאלית, לגזור אותו, להשוות לאפס ולמצוא את הנעלם.

תרגיל מס' 1

מוט אחיד שאורכו 2L נסמך על קצה גביע בתבנית חצי-כדורית בעלת רדיוס R (ראה תרשים מס' 1). איזו זווית נוצרת בין המוט ובין האופק במצב שיווי משקל? את החיכוך יש להזניח.



תרשים 1

פתרון

נבחר את הקו האופקי העובר דרך נקודה K כגובה אפס. מרחק h = CF - הוא המרחק ממרכז הכובד של המוט לקו KF, והוא מורכב משני קטעים: h = CM + MF.

מהמשולש ישר הזווית ACM מתקבל $CM = L\sin\alpha$

מהמשולשים AOB, AON מתקבל

$$MF = NK = OK - ON = R - R\sin2\alpha = R(1 - \sin2\alpha)$$

מכאן:

$$h = CM + MF = L\sin\alpha + R(1 - \sin2\alpha)$$

ובקיצור

$$h = f(\alpha) = R(1 - \sin2\alpha) + L\sin\alpha \qquad (1)$$

מכאן שהאנרגיה הפוטנציאלית (mgh) אף היא פונקציה של הזווית α: $U = F(\alpha)$. במצב שיווי משקל $\frac{dU}{d\alpha} = 0$. נחשב את הנגזרת של הביטוי (1):

$$\frac{dU}{d\alpha} = mg(-2R\cos2\alpha + L\cos\alpha) \qquad (2)$$

נעזר בזהות הטריגונומטרית: $\cos2a = \cos^2a - \sin^2a = 2\cos^2a - 1$, ולפי עקרון הקיצון של האנרגיה הפוטנציאלית נשווה לאפס:

$$4R\cos^2\alpha - L\cos\alpha - 2R = 0 \qquad (3)$$

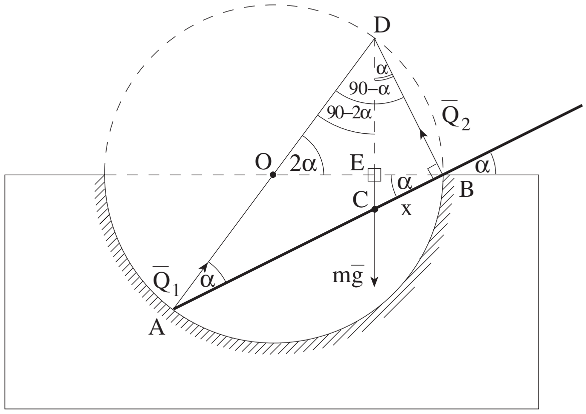
משוואה (3) היא משוואה ריבועית עבור $\cos\alpha$, ופיתרונה

$$\cos\alpha = \frac{L \pm \sqrt{L^2 + 4\cdot 2R\cdot 4R}}{2\cdot 4R}$$

$$\alpha = \arccos\left[\frac{1}{8R}\left(L + \sqrt{L^2 + 32R^2}\right)\right]$$

מכיוון שהזוית α - חדה, הגודל $\cos\alpha$ חייב להיות חיובי, ולכן הפיתרון עם סימן המינוס אינו מתאים.

כדי לשכנע כי שיטת הקיצון של האנרגיה הפוטנציאלית היא שיטה יעילה, נראה את הפיתרון השיגרתי של תרגיל 1. (ראה תרשים מס׳ 2). על המוט מופעלים שלושה כוחות: משקלו mg ושני כוחות שמפעיל הגביע בנקודות המגע עם המוט - Q_1 ו-Q_2.



תרשים 2

מכיוון שהמערכת חסרת חיכוך, כח Q_1 מאונך כלפי פני הגביע (כלפי משיק בנקודה A), ו-Q_2 מאונך למוט. זאת אומרת שהכח Q_1 מכוון לפי הרדיוס. נקודת המפגש של שני כוחות Q_1 ו-Q_2 היא הנקודה D. על המעגל שמרכזו O (זוית הקפית ישרה).

אם המוט נמצא במצב שיווי משקל אז סכום המומנטים של כל הכוחות הפועלים על המוט שווה לאפס. נתבונן על המומנטים ביחס לנקודה D: המומנטים של שני הכוחות Q_1 ו-Q_2 העוברים דרכה שווים לאפס, לכן גם המומנט של הכח mg שווה לאפס או במילים אחרות שלושת הכוחות נפגשים בנקודה D. נתבונן במשולש ABD - משולש ישר זוית. קל לראות ש: $DAB = CDB = \alpha$, $ADC = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. במשולש ABD נמצא את הניצב $AB = 2R\cos\alpha$ וגם אם ניקח בחשבון ש C אמצא המוט, נקבל:

$$CB = x = 2R\cos\alpha - L \qquad (4)$$

נבטא את $OB = R = OE + EB$ באמצעות x: $EB = x\cos\alpha$, $OE = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$, לכן

$$R = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + x\cos\alpha \qquad (5)$$

נציב ב-(5) את הביטוי של x מ-(4) ונקבל משווה זהה למשוואה שקיבלנו בעזרת הפיתרון הקודם:

$$4R\cos^2\alpha - L\cos\alpha - 2R = 0 \qquad (3)$$

ע״י קיצון האנרגיה אפשר לתאר גם מצב שיווי משקל לגבי מערכת שעליה מופעל ***אילוץ*** אם עבודת האילוץ מוגדרת כשינוי של אנרגיה פוטנציאלית. דוגמה לכך - שיווי משקל של גוף השרוי בנוזל. קודם כל נמצא את האנרגיה הפוטנציאלית של גוף הנמצא בתוך נוזל. גוף שמסתו m ונפחו V מועבר בתוך נוזל בעל צפיפות ρ למרחק $\Delta h = h_1 - h_2$. עקב כך עבודת כח הכובד $W_1 = mg\Delta h$ ועבודת כח ארכימדס $W_2 = -gV\rho\Delta h$, לכן העבודה השקולה היא:

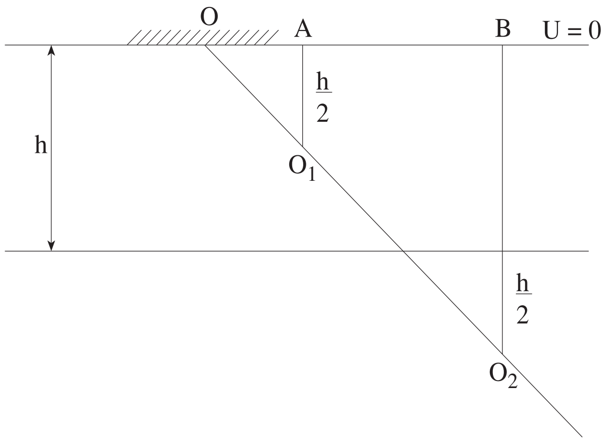
$$W = W_1 + W_2 = (m - \rho V)gh_1 - (m - \rho V)gh_2 = U_1 - U_2$$

כלומר $U = (m - \rho V)gh$ - האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף בתוך הנוזל.

דוגמא לטיפול בבעיה זו מופיעה בתרגיל 2:

תרגיל מס׳ 2

מקלון דק תלוי בנקודה O כמתואר בתרשים מס׳ 3. כאשר מחציתו של המקלון נמצאת בתוך המים משיגים מצב שיווי משקל. חשב מהי צפיפות החומר ממנו עשוי המקלון? נסמן צפיפות זו ב-ρ, וצפיפות המים ב- ρ.



תרשים 3

פתרון

נבחר כגובה אפס את הקו AB. האנרגיה הפוטנציאלית של מחצית המקלון הנמצא מעל פני המים $U_1 = -\frac{\rho V}{2} g\frac{h}{2}$, וזו של מחצית המקלון השקועה במים היא:

$$U_2 = \left(\frac{\rho gV}{2} - \frac{\rho\ gV}{2}\right)\frac{3}{2}h$$

תנאי של שיווי המשקל: $\frac{d(U_1 + U_2)}{dh} = 0$ ומכאן מקבלים:

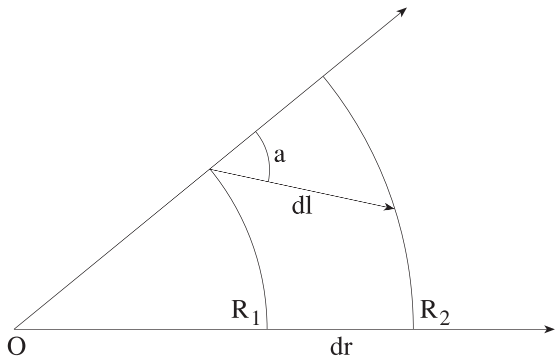
$$\rho = \rho\ \frac{3}{4}$$

נזכיר שהכח הצנטריפוגלי הוא גם כח משמר, לכן שדה כוחות צנטריפוגליים ניתן להציג כשדה פוטנציאלי. נניח שגוף בעל מסה m מסתובב במהירות זויתית קבועה ω במרחק של r ממרכז O (ראה תרשים מס' 4). במערכת יחוס לא אינרציאלית מופעל על הגוף כח צנטריפוגלי: $F = mr\omega^2$. עקב העתק קטן dl, עבודת הכח: $dW = mr\omega^2 dl\cos\alpha$. ניקח בחשבון ש $dl\cos\alpha = dr$, לכן:

$$W = \int_{R_1}^{R_2} mr\omega^2 dr = \frac{1}{2} m\omega^2(R_2^2 - R_1^2)$$

ומכאן:

$$U = -\frac{1}{2} mR^2\omega^2$$

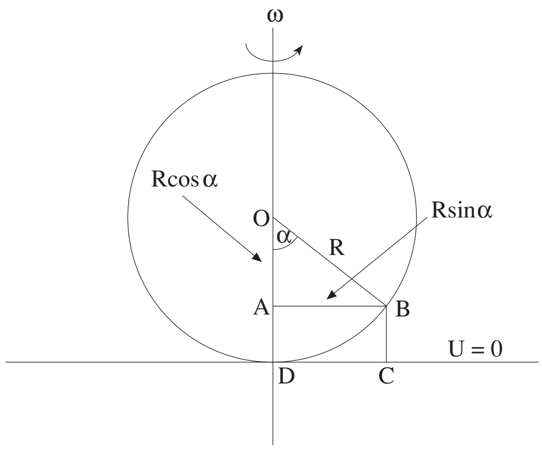


תרשים 4

דוגמא לשימוש באנרגיה הפוטנציאלית זו מופיעה בתרגיל מס' 3:

תרגיל מס' 3

על טבעת חלקה בעלת רדיוס R מורכב חרוז שמסתו m. הטבעת עם החרוז מסתובבים סביב ציר אנכי העובר דרך מרכז הטבעת במהירות זויתית ω כמתואר בתרשים מס' 5. איפה נמצא החרוז?



תרשים 5

פתרון

נניח שקו CD - הוא גובה אפס. אז האנרגיה הפוטנציאלית של החרוז בשדה כבידה - $U_1 = mgR(1 - \cos\alpha)$ ובשדה של כוחות צנטריפוגליים $U_2 = -\frac{1}{2} m\omega^2R^2\sin^2\alpha$. אבל במצב שיווי משקל: $\frac{d(U_1 + U_2)}{d\alpha} = 0$.

או: $mgR\sin\alpha - 2\frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin\alpha\cos\alpha = 0$, לכן אם $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$ אז: $\cos\alpha = \frac{g}{R\omega^2}$, אחרת $\alpha = 0$.

נזכיר כי קיצון האנרגיה מתנה שיווי משקל של מערכת שעליה פועלים בו-זמנית מספר כוחות רק כאשר הכוחות משמרים.

כמו כן נזכיר ש:

א. האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית: $U = \frac{kx^2}{2}$

ב. האנרגיה הפוטנציאלית של מטען q בשדה חשמלי של מטען Q היא: $U = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$

ג. האנרגיה של מתח פנים של נוזל: $U = \sigma S$

תרגיל מס׳ 4

טבעת דקה מגומי שמסתה m ורדיוסה במצב מנוחה R_0. מסובבים במהירות זויתית ω. קבוע הגומי k. מהו הרדיוס החדש של הטבעת?

פתרון

אם R_1 - הוא הרדיוס החדש, אז האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית היא: $U_1 = \frac{4\pi^2 k(R_1 - R_0)^2}{2}$, כי ההתארכות היא $x = 2\pi(R_1 - R_0)$ ואנרגית הטבעת בשדה הכוחות הצנטריפוגליים $U_2 = -\frac{1}{2} m R_1^2 \omega^2$; לכן ממשוואה $\frac{d(U_1 + U_2)}{dR} = 0$ מקבלים רדיוס חדש: $R = \frac{4\pi^2 k}{4\pi^2 k - m\omega^2} R_0$.

תרגיל מס׳ 5

מהו הרדיוס שיהיה לטיפה אם מקנים לה מטען Q? מקדם מתח הפנים σ.

פתרון

נניח שרדיוס הטיפה הוא R. אנרגית מתח הפנים היא: $U_1 = \sigma\, 4\pi R^2$ ואנרגיה חשמלית: $U_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$

$$\frac{d(U_1 + U_2)}{dR} = 2\sigma 4\pi R - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} = 0$$

לכן בסופו של דבר מקבלים $R = \left(\frac{Q^2}{64\pi\varepsilon\varepsilon_0\sigma}\right)^{\frac{1}{3}}$

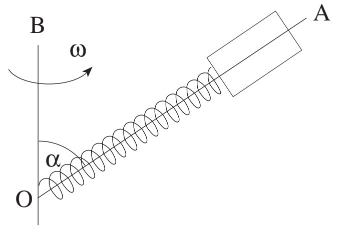
תרגילים נוספים

6. כופפו מוט כבד באמצעו בזוית של 90° ותלו את המוט על קצהו האחד. מהי הזוית הנוצרת בין צלע המוט המכופף לאנך?

תשובה: $tg\alpha = \frac{1}{3}$

7. מוט חלק מסתובב סביב ציר אנכי במהירות זויתית ω ויוצר זוית α עם האנך (ראה תרשים מס׳ 6). גוף שמסתו m מחובר בעזרת קפיץ (קבוע הקפיץ k, אורך התחלתי l_0) אל נקודה O. מהו אורך הקפיץ בזמן התנועה?

תשובה: $l = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha}{k - m\omega^2 \sin^2\alpha}$



תרשים 6

8. בתוך צינור אופקי (אורך L) מונח כדורון טעון במטען חיובי. סמוך לקצוות הצינור נמצאים מצד אחד מטען q_1 ומצד שני q_1, שניהם מחוברים אל הצינור. איפה נמצא הכדורון?

תשובה: $x = \frac{q_1 - \sqrt{q_1 \cdot q_2}}{q_1 - q_2} L$