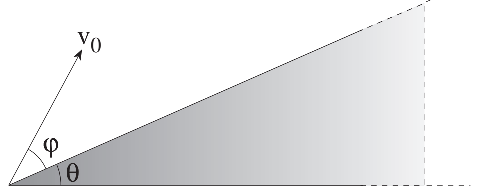
טווח זריקה על מישור משופע

חפי יצחק, מדרשת שדה-בוקר, שדה בוקר

חזי יצחק ממדרשת שדה בוקר שלח אלינו את הבעיה[1] הבאה, אותה הוא מציע להביא בפני תלמידים כבעית אתגר.

גוף נזרק בזוית φ ביחס למישור נטוי בזוית θ, במהירות התחלתית v_0 (ראה תרשים 1).



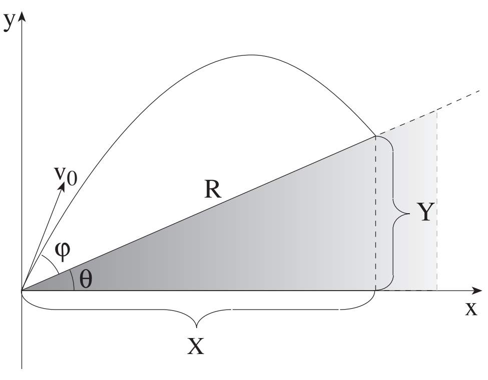
תרשים 1: מישור משופע הנטוי בזוית θ עבור גוף הנזרק בזווית φ יחסית למישור

א. מצא ביטוי עבור הטווח אליו יגיע הגוף (בהנחה שהגוף נוחת על המישור המשופע).
ב. מצא את הזוית φ עבורה יהיה הטווח מקסימלי.

במכתבו מביא הכותב 4 דרכים שונות לפיתרון הבעיה. שלוש מהן דורשות חשבון דיפרנציאלי ואחת פחות שיגרתית, מסתמכת על שיקולים אחרים. בחרנו להביא כאן שניים מן הפתרונות בשלמותם ולתאר במספר מילים את השניים האחרים.

פתרון א׳ - הפיתרון הקונבנציונלי

נסמן ב-Y את גובהה של נקודת הפגיעה מעל למישור האופקי וב-X את מרחקה האופקי של נקודה זו מראשית הצירים (ראה תרשים 2).



תרשים 2: הטווח R של גוף הנזרק בזריקה משופעת על מישור משופע

בין X ל Y קיים הקשר הבא: $tg\theta = \frac{Y}{X}$.

נסתכל על התנועה בכל ציר בנפרד:

ציר אופקי (x)	ציר אנכי (y)
$v_x = v_0\cos(\varphi + \theta)$	$v_y = v_0\sin(\varphi + \theta)$
$x = [v_0\cos(\varphi + \theta)]t$	$y = [v_0\sin(\varphi + \theta)]t - \frac{1}{2}gt^2$

$$t = \frac{X}{v_0\cos(\varphi + \theta)} \qquad (1)$$

$$Y = Xtg\theta = v_0\sin(\varphi + \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

נציב את הביטוי עבור t שקבלנו ב (1) במשוואה (2) ונקבל לאחר מעט אלגברה:

$$X = \frac{2v_0^2\cos^2(\theta + \varphi)\ [tg(\theta + \varphi) - tg\theta]}{g}$$

נסמן ב R את הטווח לאורך המישור המשופע: $R = \frac{X}{\cos\theta}$

וכך נקבל:

$$\boxed{R(\varphi) = \frac{2v_0^2}{g\cos\theta}\cos^2(\varphi + \theta)\ [tg(\varphi + \theta) - tg\theta]}$$

כעת נשתמש בנוסחה הטריגונומטרית:

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

ונקבל:

$$R(\varphi) = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\theta}\cos(\varphi + \theta)\sin\varphi \qquad (3)$$

הנגזרת $R'(\varphi)$ תתאפס כאשר:

$$[\cos(\varphi + \theta)\sin\varphi]' = 0$$

$$\Rightarrow tg(\varphi + \theta) = \cot\varphi$$

$$tg(\varphi + \theta) = tg(90^\circ - \varphi)$$

ולכן: $$\varphi_m = 45° - \frac{\theta}{2}$$

φ_m היא זווית הזריקה עבורה יתקבל הטווח המקסימלי.

אנו רואים ששיטת פתרון זו דורשת מעט ידע בנגזרות, ולכן לא נראה לי שתלמידים בי״א יהיו מסוגלים להתמודד עם השאלה, אך בכיתה י״ב הדבר אפשרי.

בדרך הפיתרון השניה משתמש המחבר במערכת צירים קרטזית שבה ציר ה x בכיוון המישור המשופע. בדרך הפתרון השלישית מקבלים את הביטוי המתאים לטווח אליו יגיע הגוף ע״י מציאת נקודת החיתוך בין הקו הישר המתאר את המישור המשופע לפרבולה המתארת את מסלול הגוף. ושוב על מנת למצוא את הטווח המקסימלי גוזרים את הביטוי המתקבל לפי φ. בפיתרון הרביעי המובא להלן אין משתמשים בחשבון דיפרנציאלי.

פתרון ד׳ - פתרון לא שגרתי

פיתרון זה מופיע במאמר של H.A. Buckmaster[2]. המחבר טוען שבעזרת שיטה זו ניתן למצוא את הזווית בה הטווח מקסימלי ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי. שיטה זו מסתמכת על שיקולים פיסיקלים פשוטים ולכן ניתן להציג אותה גם לתלמידי י״א. הצרה היא שהשיטה מעט קשה מבחינה אלגברית ודורשת שימוש מרובה בנוסחאות טריגונומטריות.

אם נציב שוב את (1) ב(2) ונשתמש בקשר $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1$, נקבל לאחר מעט אלגברה:

$$\underbrace{g}_{a}\,tg^2(\varphi+\theta) - \underbrace{\frac{2v_0^2}{X}}_{b}\,tg(\varphi+\theta) + \underbrace{\frac{2v_0^2}{X}tg\theta + g}_{c} = 0$$

נסתכל על משוואה זו כעל משוואה ריבועית ב $tg(\varphi+\theta)$, כאשר a, b, c הם המקדמים שלה. משוואה זו נותנת שתי זוויות המתאימות לטווח מסוים משותף. נמצא תחילה את סכום שורשי המשוואה השווה ל $-\frac{b}{a}$.

$$tg(\varphi_1+\theta) + tg(\varphi_2+\theta) = \frac{2v_0^2}{Xg} \qquad (4)$$

לאחר שימוש במספר נוסחאות טריגונומטריות (ראה ניספח 1) נקבל שהקשר בין שתי זוויות הזריקה האפשריות לגבי טווח אחד הוא:

$$tg(\theta+\varphi_2) = tg(90° - \varphi_1)$$

כאן נשתמש ב״הברקה״ הפיסיקלית, שהטווח המקסימלי יתקבל כאשר $\varphi_2 = \varphi_1$, באנלוגיה לזריקה על מישור אופקי

ולכן: $$\theta + \varphi_2 = 90° - \varphi_1$$

$$\varphi_2 + \varphi_1 = 90° - \theta = 2\varphi_m$$

$$\Rightarrow \varphi_m = \frac{90° - \theta}{2}$$

ואכן הגענו לתוצאה ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי.

לסיכום: בעיה זו היא בעיה מצוינת מבחינה דידקטית. ניתן להציג אותה לתלמידים, ולבקש מהם לפתור אותה במספר דרכים, וכך לפתח את היצירתיות והמקוריות של התלמידים. הפתרון הרביעי על אף שאינו פשוט מבחינה אלגברית, מבוסס על עקרון פיסיקלי פשוט של סימטריה המובן לתלמידים. בטוחני שחלק מהם יגיע לתשובה ללא כל חישוב.

שתי הערות לסיום.

ניתן להכליל את הבעיה גם למישור משופע הנטוי מטה בזווית של θ, (Buckmaster אכן עשה זאת), ואז התוצאות תהיינה דומות, אך יש להחליף את θ ב θ–.

קיימת דרך פתרון חמישית לבעיה (!) המובאת על-ידי Lapidus[3] המבוססת על חשבון וקטורי ועל העובדה, שמהירות הפגיעה של הגוף במישור המשופע, מאונכת למהירות הזריקה, כאשר הטווח מקסימלי. (תרגיל נוסף, שאפשר להציג בפני התלמידים)

כדי להוכיח זאת רצוי לעבוד במערכת הצירים של דרך ב׳, ולבטא את $tg\varphi_f$ באמצעות φ ו-θ. כאן φ_f היא זווית הפגיעה של הגוף במישור המשופע. ($tg\varphi_f = -\cot\varphi + 2tg\theta$). לאחר מכן יש להציב את φ_m במקום φ .

ביבליוגרפיה:

1. Sears, Zemansky & Young, University Physics, McGraw Hill, (1988).
2. Buckmaster, H. A., Ideal Ballistic Trajectories Revisited, Am. J. Phys, Vol. 53, pp 638-641 (1985).
3. Lapidus I.R., Projectile Range on an Inclined Plane, Am. J. Phys. Vol 51. pp. 847, (1983).

בשני מאמרים אלה יש לשים לב להבדל בסימן הזוויות לעומת המופיע כאן.

ניספח 1

מתוך משוואה (3) נקבל ש:

$$\frac{2v_0^2}{Xg} = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta+\varphi)\sin\varphi}$$

ולכן: $$tg(\theta+\varphi_2) = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta+\varphi)\sin\varphi} - tg(\theta+\varphi_1)$$

נציב $\varphi = \varphi_1$, ונקבל:

$$tg(\theta+\varphi_2) = \frac{\cos\theta - \sin(\theta+\varphi_1)\sin\varphi_1}{\cos(\theta+\varphi_1)\sin\varphi_1}$$

לאחר שימוש בנוסחה

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

מקבלים את הקשר המבוקש.