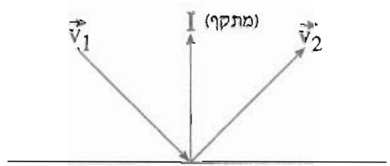
לאן נעלמה הסימטריה בהתנגשות דו ממדית?*

שלמה פישר, בית ספר תיכון אורט, רמות, ירושלים ובית ספר צבית, כפר מנחם

בהתנגשות אלסטית בין כדור לקיר, קיים כידוע "חוק החזרה", לפיו הזוית בין כיוון התנועה של הכדור המוחזר לבין האנך במקום הפגיעה, שווה לזוית שיוצר כיוון התנועה לפני הפגיעה עם אותו אנך. כמו-כן שווה המהירות של הכדור המוחזר למהירותו לפני הפגיעה וכל זה מתרחש במישור אחד. תוצאות אלה נובעות כללית מחוק שימור התנע וחוק שימור האנרגיה, ובפרט מפני שפועל על הכדור מתקף מאונך למישור הקיר ("האנך"). (תרשים 1)



תרשים 1

הסימטריה המתגלה כאן, בין הפגיעה להחזרה, מקורה בהיות מערכת המעבדה גם מערכת מרכז המסה, בגלל אינסופיות מסת הקיר (המעבדה).

כאשר לעומת זאת מתנגשים שני כדורים התנגשות אלסטית, לכאורה הולכת סימטריה זו לאיבוד. מטרת מאמר זה להראות, כי אמנם הסימטריה ממשיכה להתקיים, ***אולם רק במערכת מרכז המסה***, השונה במקרה זה ממערכת המעבדה. זהו יתרון נוסף לניתוח תופעות במערכת מרכז המסה, ונראה גם, כי המעבר בחזרה ממערכת זו למערכת המעבדה מתבצע בקלות תוך שימוש פשוט בגיאומטריה.

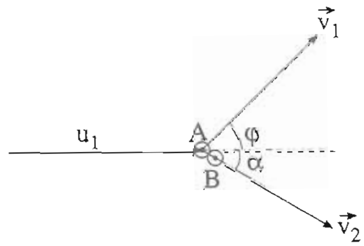
התנגשות אלסטית

1. במערכת המעבדה (תרשים 2)

חלקיק A שמסתו m_1 פוגע במהירות $\vec{u}_1$ בכדור B במנוחה. בעקבות ההתנגשות ממשיך הכדור A במהירות $\vec{v}_1$ היוצרת זוית φ עם $\vec{u}_1$, והכדור B נע במהירות $\vec{v}_2$ היוצרת זוית α עם

* בעריכת רפי כהן, המחלקה להוראת המדעים

$\vec{u}_1$. נשים לב שכיוון התנועה של B, $\vec{v}_2$, הוא גם כיוון קוו המרכזים של הכדורים, וכיוון המתקף שפעל עליו. מתקף מנוגד פעל על A, מתקף השווה לשינוי בתנע של A. הקוו עליו נמצא $\vec{v}_2$ יקרא איפוא ***"כיוון המתקף"***, ונראה כי, במערכת מרכז המסה, תנועות הכדורים סימטריות יחסית לקוו זה.



תרשים 2

2. במערכת מרכז המסה

מהירותו של מרכז המסה v_M, (תרשים 3) נתונה על-ידי:

$$(m_1 + m_2)\vec{v}_M = m_1\vec{u}_1$$

$$\vec{v}_M = \frac{m_1\vec{u}_1}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{u}_1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{\vec{u}_1}{1 + c}$$

תרשים 3

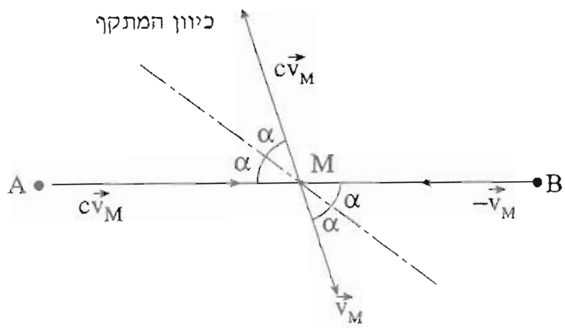
לצורך פישוט הכתיבה הגדרנו $c = \frac{m_2}{m_1}$.

במערכת מרכז המסה, הכדור A מתקדם במהירות u_{1M}:

$$\vec{u}_{1M} = \vec{u}_1 - \vec{v}_M = \vec{u}_1\left(1 - \frac{1}{1 + c}\right) = \vec{u}_1\frac{c}{1 + c} = c\vec{v}_M$$

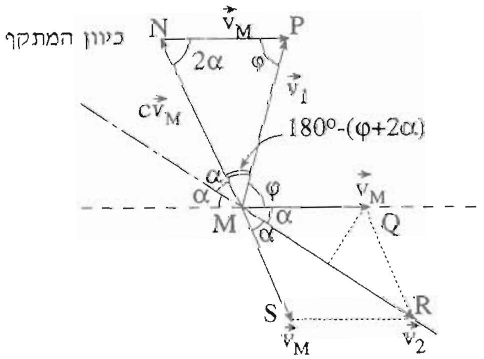
הכדור B נע במהירות $\vec{u}_{2M} = -\vec{v}_M$

שימור האנרגיה ושימור התנע מחייבים שהכדורים ינועו אחרי ההתנגשות במהירויות מנוגדות זו לזו ושוות בגודלן לגודלן המקורי, אך לאו דווקא בכיוונים המקוריים. הכיוון תלוי בקו המחבר בין המרכזים של הכדורים, ויוצר איתו זוית α. הסימטריה אכן קיימת כאן (תרשים 4), משום שהרכיבים של המהירויות המאונכים לכיוון המתקף **אינם** משתנים.



תרשים 4

3. נחזור עתה ***למערכת המעבדה***. לשם כך, יש לצרף למהירויות הסופיות של הכדורים במערכת מרכז המסה, את מהירותה של מערכת זו (תרשים 5). לגבי גוף A, הוספת $\vec{NP} = v_M$ ל-$\vec{MN} = cv_M$, יוצרת את וקטור המהירות הסופית $\vec{MP} = \vec{v}_1$. לגבי גוף B, הוספת $\vec{MQ} = \vec{v}_M$ ל-$\vec{MS} = v_M$, יוצרת את המהירות הסופית $\vec{MR} = \vec{v}_2$.



תרשים 5

לגבי גוף B, קיים: $\frac{\vec{v}_2}{2} = v_M\cos\alpha$, ולכן:

$$\boxed{v_2 = \frac{2u_1\cos\alpha}{1 + c}}$$

לגבי גוף A, נכתוב את משפט הסינוסים במשולש MNP.

$$\frac{v_1}{\sin 2\alpha} = \frac{cv_M}{\sin\varphi} = \frac{v_M}{\sin[2\pi - (\varphi + 2\alpha)]} \quad (1)$$

לכן גם:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin[2\pi - (\varphi + 2\alpha)]} = c \quad (2)$$

א) במקרה הפרטי ש-$m_1 = m_2$, $c = 1$ מתקבל (בדוק):

$\varphi + \alpha = 90°$ זוהי תוצאה ידועה.

כמו כן מתקבל:

$$v_1 = \frac{v_M \sin 2\alpha}{\sin(90+\alpha)} = \frac{2v_M \sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2v_M\sin\alpha$$

אולם במקרה זה $v_M = \frac{u_1}{2}$.

לכן:

$$\boxed{v_1 = u_1 \sin\alpha} \qquad (3)$$

וגם:

$$\boxed{v_2 = u_1 \cos\alpha} \qquad (4)$$

ב) פתרון כללי ל-(2):

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{c\sin 2\alpha}{1 - c\cos\alpha} \qquad (5)$$

אם $c > 1$, $\varphi + \alpha > 90°$ לפי (2),

ואם $c < 1$, $\varphi + \alpha < 90°$.

התנגשות לא אלסטית (פיתוח מקוצר)

במקרה זה, נגדיר מקדם תקומה k, כך ש: $k = \frac{\text{מהירות החזרה}}{\text{מהירות פגיעה}}$,

מהירויות ההחזרה במערכת מרכז המסה יהיו לכן:

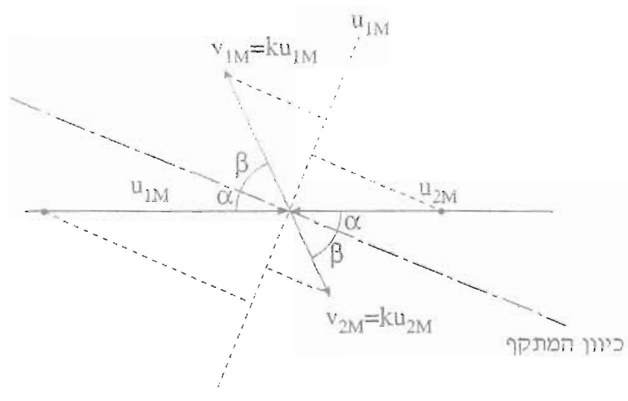
$$v_{1M} = ku_{1M} = kcv_M \qquad (A)$$

$$v_{2M} = ku_{2M} = kv_M \qquad (B)$$

במערכת מרכז המסה, קל לראות שהחזרה תהיה בזווית β (יחסית לכיוון המתקף), כך ש- $\beta > \alpha$

כי: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = k$

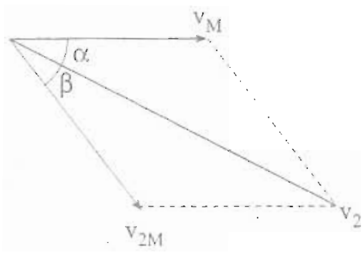
(הרכיבים של המהירויות בכיוון אנכי לכיוון המתקף אינם משתנים). זהו כעין "חוק סנל" (תרשים 6).



תרשים 6

כדי לחזור למערכת המעבדה, יהיה צורך להוסיף למהירויות v_{1M} ו-v_{2M} את v_M. נקבל:

עבור B: (תרשים 7)

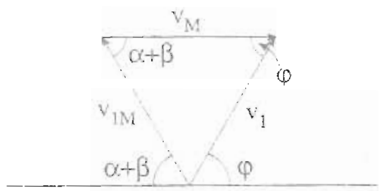


תרשים 7

$$\frac{v_2}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{v_M}{\sin\beta} = \frac{kv_M}{\sin\alpha} \qquad (6)$$

עבור A (תרשים 8):

$$\frac{v_1}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{kcv_M}{\sin\varphi} = \frac{v_M}{\sin[180 - (\alpha+\beta+\varphi)]} \qquad (7)$$



תרשים 8

כל בעיות ההתנגשויות ניתנות לפתרון בעזרת המשוואות (6) ו-(7) אם מספקים את הנתונים הדרושים.

תהודה