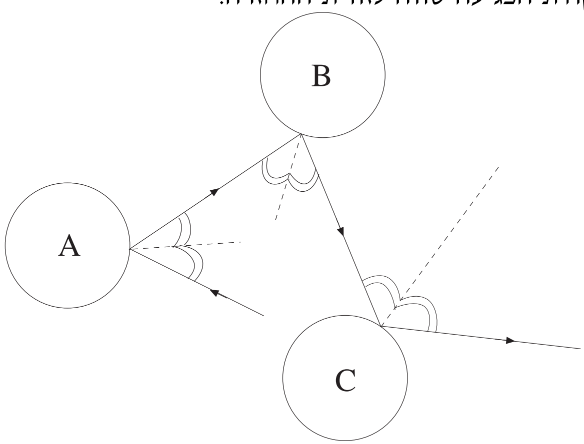
"כאוס": מה הקשר בינו לבין הפיסיקה שאנו מלמדים בבית הספר?

קלריסה ברקוביץ, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

עמוד עשן העולה מסיגריה, מזג אוויר המשתנה או זרם של נהר היורד מההר, הן דוגמאות של מערכות כאוטיות; כלומר: בעלות התנהגות לא מסודרת ובלתי צפויה. "כאוס" הפך בזמן האחרון לנושא מאוד אופנתי. עשרות מאמרים הקשורים למערכות כאוטיות הופיעו הן במסגרת המחקר המדעי והן במסגרת הספרות הפופולרית[1, 2]. למרות זאת, עדיין לא נכנס נושא זה לתוכנית לימודי הפיסיקה התיכונית. מה הסיבה לכך? האם הפיסיקה שאנו מלמדים בבית הספר התיכון אינה נכונה? ואם זה המצב, כיצד ייתכן שמערכות כאוטיות אינן מופיעות כלל וכלל בתוכנית הלימודים בפיסיקה? האם הסיבה לכך היא שהמערכות הפיסיקליות הכאוטיות הן היוצא מן הכלל? מאמר זה ינסה לענות על השאלות האלה בלי להיכנס לפרטים המתימטיים של התיאוריה של מערכות אלה.

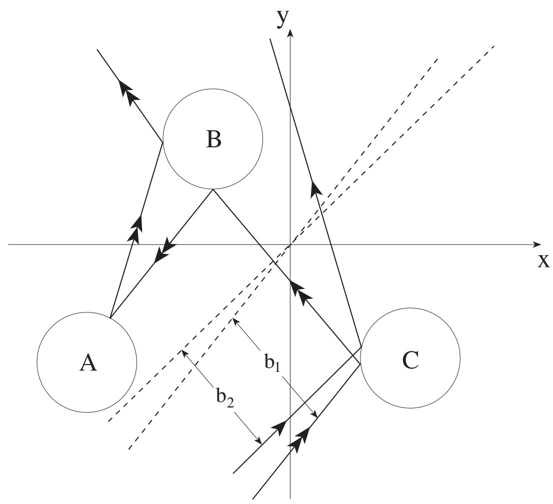
כאוס הינו באופן מהותי "רגישות לתנאים ההתחלתיים" (ר.ת.ה.). מה משמעות המושג? מערכת עם ר.ת.ה. הינה מערכת אשר בה שינוי קטן בתנאייה ההתחלתיים, גורמת לשינוי קיצוני בהתנהגותה העתידית. כלומר, אף על פי שמדובר במערכת דטרמיניסטית, (זאת אומרת, שהתפתחותה ניתנת על ידי משוואות תנועה מוגדרות היטב), אי אפשר לחזות את התפתחות המערכת במשך פרק זמן ארוך. הסיבה לכך הינה שהשגיאה הקיימת בקביעת התנאים ההתחלתיים גדלה באופן אקספוננציאלי עם הזמן. נבהיר זאת על ידי דוגמה המתארת תנועה במישור: חלקיק קטן נכנס לאזור בו נמצאות שלוש דיסקיות במקומות קבועים, ומתנגש איתן התנגשות אלסטית לחלוטין (תרשים 1).* כשהחלקיק פוגע באחת הדיסקיות, הוא מוחזר באופן שהתנע שלו נשמר: זווית הפגיעה ביחס לאנך לדיסקית בנקודת הפגיעה שווה לזווית ההחזרה.



תרשים 1

* בעיה אקויוולנטית היא זאת של אלומת אור דקה מוחזרת על ידי שלושה עיגולים אשר הקפם מכוסה במראות אידאליות.

בתרשים 2 ניתן לראות שני מסלולים שונים של חלקיקים הנעים במערכת הנ״ל. פרמטרי ההתנגשות* של שניהם שונים במקצת זה מזה, אך המסלולים שונים באופן מהותי. האם זה סימן של ר.ת.ה., או האם הסיבה להתנהגות השונה היא שלא לקחנו מסלולים עם פרמטר התנגשות מספיק קרובים?



תרשים 2

תרשים 3א׳

כדי לענות על שאלה זו, הבה ונראה כמה סוטה החלקיק מדרכו, כפונקציה של פרמטר ההתנגשות שלו b. זווית הפגיעה θ_{in} וזווית היציאה θ_{out}, הן הזוויות בהן החלקיק נכנס למערכת ויוצא ממנה, ונמדדות יחסית לציר x.

תרשים 3ב׳

בתרשים 3א׳ אפשר לראות את ההפרש בין זווית הפגיעה θ_{in} וזווית היציאה θ_{out} כפונקציה של b (כשזווית הפגיעה נשארת קבועה). נגדיר הפרש זה כזווית ההסחה $\Delta\theta = \theta_{in} - \theta_{out}$. אפשר לראות שזווית ההסחה $\Delta\theta$ שווה לאפס באזור הפרמטרים b בין 2.6– ו 3– ובין 2.5 ו 3. כלומר, עבור ערכים אלה של b, החלקיק יוצא מאיזור הדיסקיות בלי לסטות מדרכו המקורית (בלי להתנגש עם הדיסקיות).

עבור ערכים בין 2.5 ל 3, $\Delta\theta$ היא פונקציה מונוטונית של b. זה האיזור בו החלקיק מתנגש פעם אחת עם הדיסקית A ויוצא. באיזור הזה הסטיה היא רגולרית.

תרשים 3ג״

* פרמטר ההתנגשות של חלקיק מוגדר כמרחק בין מסלול החלקיק לבין הקוו המקביל לו העובר דרך ראשית הצירים (תרשים 2)

ננסה עתה להבין יותר טוב את מה שמתרחש באזור הבלתי סדיר בין $b = 0.4$ ו $b = 0.9$. בתרשים 3ב' אנו רואים הגדלה של האיזור הזה. תרשים 3ג' מצידו הינו הגדלה של האזור בו b נמצא בין 0.5 ו 0.56.

אם נמשיך להגדיל את האזורים הנראים לא רגולרים, נקבל אותה תצורה (pattern) עד אינסוף: קיימים אזורים בהם θ היא פונקציה חלקה של b, ולעומתם, אזורים בהם הפונקציה "משתגעת" לגמרי. הפונקציה הזאת הינה דוגמא טיפוסית של "פרקטל" (fractal), שהיא צורה גיאומטרית שכל חלק קטן ממנה דומה לצורה עצמה. אך זה נושא למאמר בפני עצמו.

מה מראים לנו הגרפים האלו? הם משקפים שלכל $b_1 - b_2 = \Delta b$ התחלתי, (קטן כפי שיהיה), תמיד יהיו אזורים בהם שני מסלולים הנבדלים בהתחלה ב Δb, מתנהגים באופן שונה לחלוטין בהמשך.

יש לזכור שכל הניתוח שביצענו הוא של מערכת דטרמיניסטית לגמרי. משוואות התנועה של ההתנגשויות מוגדרות היטב, עבורן זווית הפגיעה שווה לזווית ההחזרה. למרות זאת, אם ידועים תנאי ההתחלה של המערכת עם אי-וודאות מסוימת Δb (שלעולם לא נוכל לבטל; שיפור בדיוק מקטין את אי-הוודאות אך אינו מבטל אותה), יהיו אינסוף אזורים של פרמטר ההתנגשות b עבורם לא יהיה אפשרי לחזות מה יקרה לחלקיק שנכנס לאזור הדיסקיות (מכיוון שמסלולים המתאימים ל b ול $(b + \Delta b)$, שונים לגמרי בהתנהגותם).

מדוע אין אנו נתקלים במקרים כאלה בפיסיקה שאנו מלמדים בבית הספר התיכון? הבה ונראה שתי דוגמאות מוכרות לנו מלימוד המכניקה:

1) מכונית נוסעת בקו ישר במהירות v, יוצאת בזמן $t = 0$ מהנקודה x_0 כאשר השגיאה במדידת המקום היא Δx_0.

$x(0) = x_0 + \Delta x_0$. לאן היא תגיע אחרי זמן t ?

נשתמש במשוואות התנועה המתאימות לתנועה קצובה ונקבל:

$$x(t) = x(0) + vt = x_0 + \Delta x_0 + vt = (x_0 + vt) + \Delta x_0$$

כלומר, $\Delta x(t) = \Delta x_0$ לכל פרק זמן t שהוא. השגיאה בקביעת המקום אינה גדלה עם הזמן.

2) בתנועה הרמונית פשוטה, $x(t) = x(0)\cos\omega t$.

אם נתון x_0 עם שגיאה Δx_0 , אז:

$$x(t) = (x_0 + \Delta x_0)\cos\omega t$$

או: $x(t)=x_0\cos\omega t+\Delta x_0\cos\omega t$

כלומר: $\Delta x(t)=\Delta x_0\cos\omega t$, ואז $|\Delta x(t)| < \Delta x_0$

הסיבה לכך שהשגיאה אינה גדלה בזמן, היא שמשוואות התנועה שאנו מלמדים מהוות פיתרון למשוואות דיפרנציאליות לינאריות. אם נקח משוואות לא ליניאריות, אפילו לפשוטות שביניהן יכול להיות פתרון שאינו פתרון אנליטי, והוא מעיד על התנהגות כאוטית. כדי לראות התנהגות של פתרון משוואה לא ליניארית נקח דוגמה פשוטה המוכרת מלימודי הפיסיקה: מטוטלת שתנודתה מאולצת על ידי כח חיצוני. משוואת התנועה הינה:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{1}{q}\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta + A\cos(\omega_D t)$$

כאשר : q - גורם הריסון,

ω_D - התדירות הזוויתית של הכוח המאלץ,

A - האמפליטודה של הכוח המאלץ.

התנהגות המטוטלת שונה לחלוטין לכל בחירה של הפרמטרים ω_D, q, A. לכמה מהם ההתנהגות היא כאוטית; כלומר, למרות שאנו מכירים את משוואות התנועה, אין אנו יכולים לנבא את מצב המערכת אחרי פרק זמן t ארוך, מכיוון שלכל אחד משני תנאי התחלה מאוד קרובים, מתאימה התפתחות שונה לחלוטין של המערכת.

בתרשימים 4 אנו רואים את הגרף של ω עבור הערכים q= 2, $\omega_D = 2/3$ לשני ערכים שונים של A: עבור A=1.47 (תרשים 4א') התנועה היא רגולרית, בעוד שעבור A=1.50 (תרשים 4ב') התנועה היא כאוטית.

תרשים 4 א'

תרשים 4 ב׳

המערכות בהן אנו דנים בבית הספר התיכון הן דווקא אלה שהן אינטגרביליות (בניגוד לכאוטיות). קיום פתרון אנליטי פשוט הוא הסיבה לכך שאנו מלמדים אותן. עם זאת, אין להניח שזאת בעיה של ההוראה בלבד: במשך תקופה ארוכה, עסקו הפיסיקאים בפיתרון הקירובים הליניאריים של המשוואות, מפני שאלה היו היחידים שידעו לפתור באופן אנליטי. ההנחה היתה שפתרונות אלה אינם שונים באופן מהותי מפתרונן של המשוואות המתארות את המציאות. כיום אנו יודעים שהנחה זאת אינה תמיד נכונה. עקב התפתחות המחשבים, אפשר עתה לפתור משוואות לא לינאריות באופן מספרי, והתברר שהן מתנהגות בדרך כלל באופן כאוטי בטווחים מסויימים של הפרמטרים, ואין קירוב לינארי שיתאר התנהגות זו באופן דומה. מערכות בעלות התנהגות כאוטית אינן מהוות מקרים חריגים, ואנו חייבים להיות מודעים לכך בעת שאנו מלמדים את הפיסיקה ה״טובה״ שכולנו מכירים.

מראי מקום

1. חוקי האנדרלמוסיה, ישכבר אונא, ״מדע״, כרך ל״ב מס. 1, עמ׳ 12-17, 1988.

2. ״כאוס״, גימס גלייק, הוצאת ספריית מעריב, תשנ״א 1991.