

הערה להסבר חוק שימור התנע

פלאה קרקובר, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.
מרכז ללימודים קדם אקדמיים, האוניברסיטה העברית, ירושלים

$$(1) \Delta E = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1v_{1,0}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,0}^2\right)$$

מנקודת מבטו של גוף צופה במערכת שנייה, הנעה במהירות \mathbf{u} ביחס למערכת הראשונה, השינוי באנרגיה הקינטית בעקבות ההתנגשות הוא:

$$(2) \Delta E = \left(\frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u})^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{u})^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{u})^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{u})^2\right)$$

נחסר את שתי המשוואות האחרונות זו מזו ונקבל (לאחר פעולות אלגבריות של פתיחת סוגרים וכינוס אברים) כי כל האברים הריבועיים מצטמצמים ונותרים רק האברים המעורבים:

$$(3) [(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) - (m_1\mathbf{v}_{1,0} + m_2\mathbf{v}_{2,0})] \cdot \mathbf{u} = 0$$

מאמרו של שלמה פישר "הסבר חוק שימור התנע על ידי יישום חוק שימור האנרגיה במערכות ייחוס שונות" (בחוברת זו) מעורר מספר שאלות מעניינות הקשורות במערך מושגי היסוד, מקומם של עקרונות סימטריה וחוקי שימור, הבטים דידקטיים בהוראת המושגים ועוד. להלן דיון קצר במספר שאלות המתעוררות למקרא המאמר:

האם אפשר להכיל את ההסבר להגזרת כללי כלשהי בין שני זוויות?

ההסבר ניתן על ידי הדגמה בשלושה סוגי התנגשות - פלסטית, אלסטית והתפוצצות. האם אפשר לנסח את ההסבר באופן כללי להתנגשות כלשהי ולתת לו תוקף של "הוכחה"? אפשר לעשות זאת יחסית בנקל, באופן הבא:

מנקודת מבטו של גוף צופה במערכת אחת השינוי באנרגיה הקינטית בעקבות ההתנגשות הוא:

ובהנחה ש- u איננו אפס מתקבל שימור התנע. זוהי הוכחה בעלת אופי כללי.

האם ההסבר ניתן להתייחס אליו כאלו כאלו?

שלוש הדוגמאות שבמאמר הן בעלות אופי חד ממדי. מכאן עולה השאלה העקרונית הבאה: האם חוק שימור וקטורי יכול להתקבל כמסקנה של חוק שימור סקלרי? האם תיתכן דרך להכללת ההוכחה? ובכן, ההוכחה דלעיל כתובה כבר כהוכחה וקטורית. אגף שמאל של משוואה (3) הוא מכפלה סקלרית, ומשמעות המשוואה היא שהיטל וקטור השינוי בתנע (הווקטור שבסוגריים המרובעות) על הווקטור u הוא אפס. אך הווקטור u עשוי להיות בכיוון כלשהו ולכן וקטור שינוי התנע הוא כזה שהיטל שלו על כיוון כלשהו הוא אפס ולכן זהו וקטור האפס. התכונה הווקטורית נכנסה למערכת השיקולים דרך הווקטור u (טרנספורמציה גלילאו) ולא דרך חוק שימור האנרגיה.

האם יש בהוכחה נקודה דיונית מכרעת?

הנקודה המכרעת בהוכחה היא ההנחה כי השינוי באנרגיה הקינטית בעת ההתנגשות (ΔE) אינו תלוי במערכת הייחוס, וכי גם טרנספורמציה גלילאו (מעבר למערכת צירים הנעה במהירות קבועה ביחס למערכת המקורית) אינה משנה את הערך הכמותי של ΔE . טרנספורמציה כזאת משנה את הערך הכמותי של האנרגיה הקינטית, אך לא את שיעור השינוי באנרגיה הקינטית. כיצד נצדיק טענה כזאת? ההצדקה במאמר היא זו: בהנחה שהשינוי באנרגיה מתבטא בהתחממות (תוך התעלמות מאפשרויות אחרות), ובהתחשב בנסיגנון שמידת ההתחממות אינה תלויה בבחירת מערכת הייחוס, ΔE אינו תלוי במערכת הייחוס.

זוהי נקודת החוזק והחולשה של ההסבר. החוליה המכרעת תלויה במידע ניסויי מחוץ לתחומי המכניקה שלא נידון לעומקו קודם לכן, אך נראה לתלמיד סביר ואינו מצריך הסבר מיוחד.

האם אכן (דעה שיושם מקורם ברוק שיושם האנרגיה)?

מן התשובה לשאלה הקודמת עולה כי אפשר לנסח את הטענה באופן הבא:

אם שיעור השינוי באנרגיה הקינטית של מערכת שני גופים, זהה במערכות צירים הנבדלות זו מזו בטרנספורמציה גלילאו, אזי התנע אינו משתנה במהלך ההתנגשות.

בניסוח זה איננו זקוקים במפורש לחוק שימור האנרגיה, אלא למידע בדבר אי התלות של שיעור השינוי בבחירת מערכת הצירים. מידע זה יכול להתקבל מאחד משני מקורות: מן ההסבר המובא במאמר (הקשור בחום) או מן המכניקה עצמה. ההסבר הקשור בחום אינו הוכחה של ממש אלא הסבר גרידא, על יתרונותיו וחסרונותיו, כפי שראינו. ניתוח מכני מיקרוסקופי של המתרחש במערכת יכול להסביר את אי התלות אך הוא חייב להניח את חוק שימור התנע כנתון מראש.

האם ההסבר ניתן להתייחס אליו כאלו כאלו?

לכאורה ההסבר הניתן במאמר לחוק שימור התנע תקף להתנגשויות בלבד, מפני שהוא עורך השוואה בין מצב המערכת לאחר ההתנגשות לבין מצבה לפני ההתנגשות ואינו מתעניין במהלך ההתנגשות עצמה. אך כידוע חוק שימור התנע תקף גם במהלך ההתנגשות בין אם היא אימפולסיבית-מהירה ובין היא מתמשכת לאיטה. האם אפשר להכליל את ההסבר?

אם נבדוק במה התבטאה ההנחה שמדובר בהתנגשות קצרה, נגלה שהדבר היה בהנחה שעשינו כי שינוי באנרגיה הקינטית מתבטא בחימום המערכת. אם נוותר על הנחה זו וניקח בחשבון כי תוך כדי האינטראקציה יש המרה של אנרגיה קינטית בפוטנציאלית ולהיפך נראה כי ההסבר תקף לאינטראקציה כלשהי. ראינו כבר כי התנאי הוא ששיעור השינוי באנרגיה הקינטית יהיה זהה במערכות הנבדלות זו מזו בטרנספורמציה גלילאו. כל אינטראקציה שהאנרגיה הפוטנציאלית שלה עונה לדרישה זו תשמר את התנע. לא ניכנס כאן לביורר לעומק. נסתפק בהערה שבמקרה שבו האנרגיה הפוטנציאלית היא פונקציה של המקום "המוחלט" ($mg y$ למשל) התנאי אינו מתקיים, אך במקרה שבו האנרגיה הפוטנציאלית תלויה בקואורדינטות היחסיות של שני הגופים (אנרגיית אינטראקציה בגרביטציה ובאלקטרוסטטיקה) התנאי מתקיים.

מה פשוט יותר - שיושם גל או שיושם אנרגיה?

האם אכן כדאי להשתמש בשימור האנרגיה כנקודת מוצא לשימור התנע? האם אכן שימור האנרגיה מובן לתלמיד יותר משימור התנע? בעניין זה יש פנים לכאן ולכאן. מחד גיסא, התלמיד כבר עבר בשנים קודמות "שטיפת מוח" ממושכת באשר לשימור האנרגיה ואפשר לצפות שמושג זה יהיה מושרש אצלו, בעוד התנע הוא מושג חדש. מאידך גיסא

לבין סימטריה לאחד ההבטים העמוקים של הפיסיקה. לא כך היה קודם לכן. שיקולים של סימטריה ושימור לא שיחקו תפקיד חשוב עד לאמצע המאה ה-19, מפני שלמרות היופי שלהם לא נראו פוריים במיוחד. כאמור, במאה ה-20 השתנתה הגישה, ובמקרים שבהם היה אפשר לומר מעט מאוד על הדינמיקה התמקדו בחוקי השימור ובסימטריה. הקשר בין שני אלה מוכר היטב בתורת הקוונטים. בהיות הפיסיקה הקלאסית מקרה גבולי של הפיסיקה הקוונטית ($h \rightarrow 0$) על הקשר להיות תקף גם במכניקה הניוטונית. אנו מצפים כי אם הקשר בעל אופי עקרוני בסיסי יהיה אפשר להסבירו בפשטות מתוך הכללים הבסיסיים - חוקי התנועה של ניוטון. מתברר כי הדבר כרוך בקשיים רבים וכי אפשר למצוא דוגמאות נגדיות במסגרת המכניקה הניוטונית. כדי לראות את הקשר יש לעבור לניסוחים חלופיים של המכניקה (של לגרנזי והמילטון), ניסוחים שבהם עוסקים בכוחות משמרים בלבד.

ספק אם התלמיד מבין את שימור האנרגיה טוב יותר מאשר את שימור התנע. אנרגיה היא מושג קשה שאיננו מסוגלים אפילו להגדירו במשפט אחד. קשה להאמין ששימורו של מושג בלתי נתפש זה יהיה פשוט משימור התנע. שימור האנרגיה מוכר יותר משימור התנע, אך אינו פשוט ממנו. אנו מלמדים את המכניקה הניוטונית כך שבבסיסה נמצאים שלושת חוקי התנועה (ולא בפורמליזם לגרנזי או המילטוני) במערכת זו חוק שימור התנע עולה מיידית. השאלה האם להסתמך בכל זאת על ידע מוקדם באנרגיה היא שאלה מעניינת בעלת הבטים מתודיים ודידקטיים. אני אישית סבור כי מן הרגע שבחרנו לעבוד עם חוקי התנועה של ניוטון ככללי יסוד, אין לסמוך את התנע על האנרגיה.

האם אפשר להסביר בפשטות את הקשר בין חוקי שימור לבין סימטריה?

בפיסיקה של המאה העשרים נחשב הקשר בין חוקי שימור