לצאת מן השיגרה

סיפור גשר וויטסטון

פרנסיס דרקסלר, קרית חינוך אורט, קרית ביאליק

מבוא

המעגל החשמלי המוכר לכולנו המכונה גשר וויטסטון (Wheatstone bridge), המשמש מכשיר פשוט ויעיל למדידת התנגדויות של נגדים או רכיבים חשמליים אחרים, הוא פרי המצאתו של מדען אנגלי ששמו צ'ארלס וויטסטון (Wheatstone, Sir Charles) שחי באנגליה בין השנים 1802-1875.

וויטסטון היה פרופסור ל"פילוסופיה ניסויית" (פיזיקה) בקינגס קולג' (King's College) בלונדון (1834) והיה ממציא בתחומים שונים.

מעטים יודעים שוויטסטון הוא הממציא של הסטריאוסקופ (מכשיר המאפשר לראות תמונה תלת-ממדית) ושל מכונת הצפנה המחליפה זוגות של אותיות בזוגות אחרים. הוא גם רשם פטנט, ביחד עם ו.פ. קוק (William Fothergill Cooke) על מודל מוקדם של טלגרף (1837), שהיה בשימוש הרכבת הבריטית מספר שנים. אך שמו מוכר ברבים בעיקר בזכות בניית גשר וויטסטון (1843) - על פי רעיון של המתמטיקאי הבריטי סמואל קריסטי (Samuel Christie).

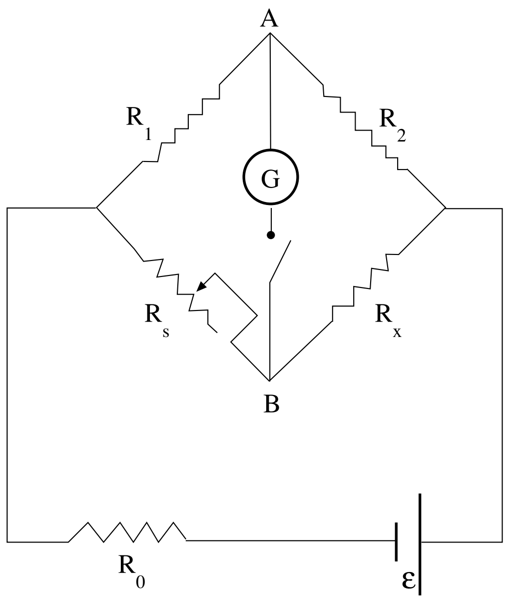
התפתחות התקשורת הבין יבשתית (הטלפון והטלגרף) דרשה פיתוח כבלים תת-ימיים (הכבל הטרנס-אטלנטי הראשון הונח ב-1866; ב-1966, בדיוק מאה שנים מאוחר יותר, הוצא משימוש הכבל הטלגרפי האחרון.

הבעיות הטכניות סביב הכבלים האלו היו רבות: בידוד לא מתאים (אז לא היו חומרים פלסטיים), העדר מגברים (השפופרת האלקטרונית הראשונה הומצאה רק ב-1906 על ידי לי דה-פורסט (Lee De Forest) ועוד בעיות רבות אחרות (כמו קורוזיה למשל) אשר גרמו לחיים הקצרים של כבלי התקשורת.

הכבלים היו מאד יקרים והנחת כבל תת-ימי היתה אירוע מדעי ואתגר טכנולוגי. כדאי לזכור זאת היום, בעידן האינטרנט, כשכבל תת-ימי העשוי סיבי זכוכית, מאפשר מיליוני שיחות בו זמנית והעברה מהירה של נתוני מחשב. יחד עם זאת ה"רעב" לתקשורת מהירה גורר פיתוח רשת בין יבשתית נוספת- הרשת האלחוטית הלווינית- הכובשת מקום גדל והולך.

גשר וויטסטון ושימושו לגילוי נתק בכבל

גשר וויטסטון, כפי שהוא מוכר לכולנו, משמש למדידת התנגדות בלתי ידועה. הוא בנוי מארבעה נגדים וגלוונומטר רגיש (ראה תרשים 1). כאשר הגשר "מאוזן", כלומר $V_A = V_B$ הגלוונומטר מראה 0 מאחר שלא זורם בו זרם.

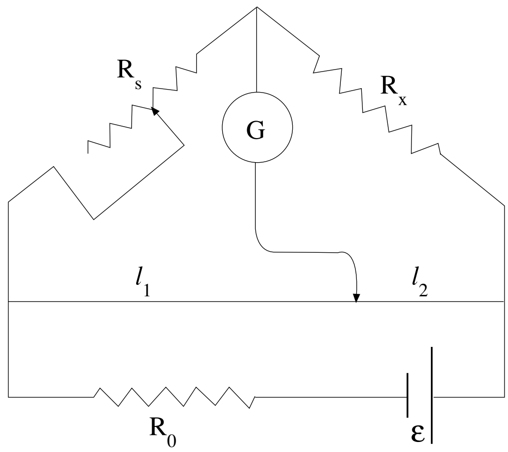


תרשים 1: מעגל של גשר וויטסטון

במקרה זה ניתן למצוא את ערכו של הנגד הלא ידוע R_X, אם מכוונים את הנגד המשתנה R_S עד שבנקודות A ו-B הפוטנציאלים שווים (המתח ביניהן מתאפס), ובגלוונומטר לא עובר זרם. ואז ערכו של R_X נתון על ידי $R_X = R_S \frac{R_2}{R_1}$;

ההוכחה פשוטה וידועה לכל.

הדרך המעשית בה משתמשים בגשר היא החלפת R_1 ו-R_2 בתייל מוליך אחד, בעל התנגדות סגולית גבוהה, למשל, Cr-Ni, ואז הנקודה A הופכת למגע נייד לאורך התייל (ראה תרשים 2).



תרשים 2: גשר וויטסטון בו הנגדים R_1, R_2 הוחלפו בתייל מוליך אחד

במערכת זו, היחס $\frac{R_2}{R_1}$ מוחלף על ידי $\frac{l_2}{l_1}$:

$$R_X = R_S\frac{l_2}{l_1}$$

ושוב, ההוכחה ברורה.

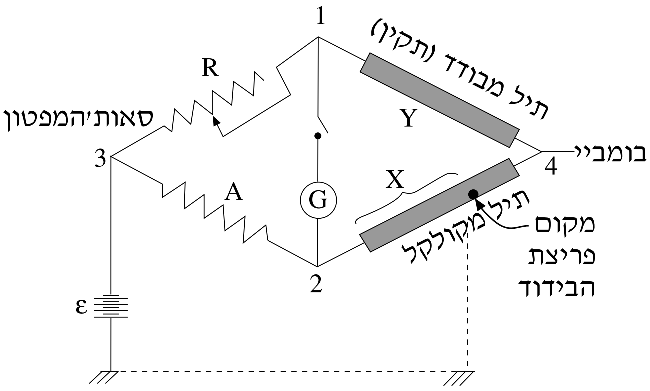
אם במקום הגלוונומטר G משתמשים באוזניות רגישות, ניתן להחליף את הסוללה, בעלת הכא״מ ε, במקור חלש של מתח חילופין. הגשר במצב זה נקרא גשר קולראוש (Kohlrausch) על שמו של הפיזיקאי הגרמני פרידריך קולראוש (1840-1910). גשר זה שימושי בעיקר במדידת התנגדות אלקטרוליטים, מאחר שהשימוש בזרם ישר גורם בהם אלקטרוליזה ולכן לא ניתן לבצע מדידת התנגדות אלקטרוליטים בזרם ישר.

גשר וויטסטון נולד יחד עם הטלגרף. בסוף המאה הקודמת, נפרץ בידודו של אחד התיילים של הכבל התת-ימי בין אנגליה להודו. מה גרם לכך - קורוזיה, בליה או פגיעה אחרת - לא ידוע. חיפוש התקלה ותיקונה לאורך אלפי קילומטרים של כבל - היה בלתי אפשרי. באותם ימים הפתרון היחיד (והיקר מאד) היה להניח כבל תת-ימי חדש.

בריטניה הגדולה, ששלטה בהודו באותן שנים, ושהייתה מאד מעוניינת בתקשורת מהירה ויעילה עם מושבת הכתר הגדולה ביותר, הציעה פרס כספי גדול לממציא השיטה הטובה והפחות יקרה לגילוי מקום התקלה.

בפרס הגדול זכה טכנאי גרמני שהשתמש בגשר וויטסטון באופן הבא:

מחברים יחדיו את קצה התיל שבידודו התקלקל, עם התיל השני, **(התקין)**, שבאותו כבל תת-ימי. נניח שהחיבור נעשה בבומביי (הודו). בקצה השני של הכבל, נניח בסאות׳המפטון (Southampton) אנגליה, מחברים בין קצות שני התילים גלוונומטר ושני נגדים A ו- R , כפי שנראה בתרשים 3:



תרשים 3:
נקודות 3,2,1 נמצאות בסאות׳המפטון; נקודה 4 נמצאת בבומביי. בנקודה 4 חיברו יחדיו את קצות התילים; בנקודה 1 ו- 2 חיברו את הגשר.

בנקודת החיבור של A ו-R מחברים סוללה שההדק השני שלה מואורק.

1. X מייצג את ההתנגדות של התיל המקולקל מסאות׳המפטון ועד למקום התקלה. אם יודעים את ערכו של X, יודעים את **האורך** של התייל מסאות׳המפטון ועד מקום פריצת הבידוד:

$$X = \rho\frac{l}{s}$$

עבור נחושת: $\rho = \frac{1}{57}\left(\frac{\Omega mm^2}{m}\right)$; l – אורך התיל, S – שטח החתך.

ההתנגדות Y היא של כל התיל התקין **ועוד** של הקטע מבומביי ועד מקום התקלה של התיל המקולקל.

אם כן, יש לנו בעיית גשר וויטסטון קלאסית, שארבעת הנגדים שלה הם:

Y, X, A, R. מכל אלה רק R הוא נגד משתנה. ההארקה משמשת כמוליך נוסף.

אפשר לכתוב:

$$\frac{A}{R} = \frac{X}{Y} \quad (1)$$

אך בנוסף ידוע סכום ההתנגדויות של שני התילים לכל אורכם. נסמן סכום זה ב-T: X+Y=T. את הנוסחה (1) ניתן לכתוב גם:

$$\frac{A}{X}=\frac{R}{Y}=\frac{A+R}{X+Y}=\frac{A+R}{T}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X &= \frac{A}{A+R}T \qquad (2\text{ א'}) \\ Y &= \frac{R}{A+R}T \qquad (2\text{ ב'}) \end{aligned}}$$

הנה דוגמא מספרית:

אם אורך הכבל התת-ימי הוא $l = 5000km$ ושני התילים הם בעלי אותו שטח חתך, נניח $16mm^2$, ונבחר $A=100\Omega$, $R=142\Omega$:

ההתנגדות של התיל לקילומטר, r, היא:

$$r=\rho\frac{l}{S}=\frac{1000}{57\cdot 16}=1.1\frac{\Omega}{km}$$

ולכן ההתנגדות הכוללת של שני התילים תהיה:

$$T = 2lr = 2\cdot 5000\cdot 1.1 = 11{,}000\Omega$$

מתוך הנוסחה 2 א' מקבלים:

$$X=\frac{A}{A+R}=\frac{100}{100+142}\cdot 11{,}000\approx 4550\Omega$$

ואיפה מקום הפריצה?

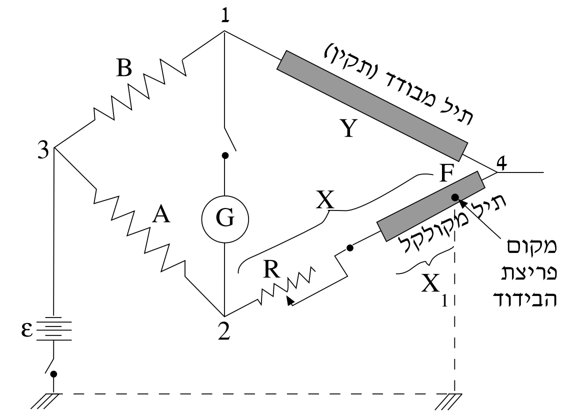
$$l_x=\frac{X}{r}=\frac{4550}{1.1}=4140km$$

אפשר אם כן למצוא את מקום התקלה. ניתן לבדוק גם את Y: (2 ב')

$$Y=\frac{R}{A+R}T=\frac{142}{100=142}\cdot 11{,}000\approx 6450\Omega$$

הסכום $X + Y = T$; $4550\Omega + 6450\Omega = 11{,}000\Omega$
שהוא, כאמור, ההתנגדות הכוללת.

חלופה של השיטה ניתן לראות בתרשים 4.



תרשים 4:
נקודות 3,2,1 נמצאות בצד אחד של הכבל התת-ימי; בנקודה 4 חיברו יחדיו את הקצוות של הצד השני של הכבל

הפעם A ו-B הם שני נגדים שהתנגדויותיהם **שוות**. Y שוב תהיה התנגדות התיל התקין **ועוד** הקטע מהתיל עם הפריצה בבידוד, עד למקום הקלקול (מ-1 ועד F). X_1 היא ההתנגדות של התיל הלא תקין עד למקום הקלקול (ההתנגדות מ-2' ועד F). R הוא נגד משתנה (ריאוסטט). כדי לאזן את הגשר, מאחר והפעם A ו-B שווים, צריך שגם $R+X_1$ יהיה שווה ל-Y; הדבר מתקבל כאשר משנים את R עד שהגלוונומטר מראה אפס; אז ניתן יהיה לכתוב:

$Y = R + X_1$ אך גם $X_1 + Y = T$ (כאשר T היא ההתנגדות הכוללת של שני התילים שניתנת למדידה או לחישוב). משתי המשוואות האלה מקבלים:

$$\boxed{X_1=\frac{T-R}{2}} \qquad (3)$$

לדוגמה, אם $A = B$ ו-$T = 950\Omega$ (ערכם לא חשוב, אך עדיפים ערכים קטנים), ועל ידי שינוי של R מגיעים לאיזון הגשר עבור $R=250\Omega$:

$$X_1=\frac{950-250}{2}=350\Omega$$

אם נניח ששטח החתך הוא $S=10mm^2$, מתקבל:

$$X_1=\rho\frac{l_x}{S}=\frac{l_x}{57\cdot 10}=350\Omega$$

נקבל: $l_X=350\cdot 57\cdot 10 = 199,500m = 199.5km$

הערה: הנוסחה (3) אינה נכונה כאשר $X_1>Y$ מאחר ואז צריך לחבר את הריאוסטט R בצדו של Y - כדי **להגדילו** – אחרת לא ניתן להשוותו ל X_1.

במצב של איזון יהיה הקשר הנכון:

$$X_1= R + Y,\ X_1+Y= T$$

ולכן:

$$X_1=\frac{T+R}{2} \qquad (4)$$

הייתי רוצה להודות להניה וילף שבעקבות השיחה בינינו במכון ויצמן, נולד רעיון המאמר הזה.

ספרות ומקורות:

1) Encyclopaedia Britannica: Micropaedia X; Macropaedia 18; E.B. Inc., USA, 1975.
2) David Halliday, Robert Resnick: Physics II; John Wiley & Sons Inc. N.Y., 1962.

תהודה