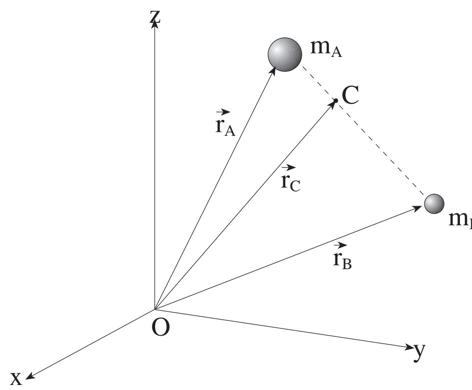
השימוש במערכת מרכז המסה עבור התנגשויות בין שני גופים

יוסף פק, בית ספר אורט על שם שפירא, כפר סבא

בבית הספר התיכון נהוג לנתח התנגשויות, אלסטיות ופלסטיות, במערכת המעבדה. המעבר למערכת מרכז המסה אינו נדרש בבחינת הבגרות בפיסיקה, וכנראה לכן לא רבים המורים המביאים בפני תלמידיהם את ניתוח הבעיות האלה במערכת מרכז המסה. ייתכן והסיבה לכך היא גם הדעה הרווחת בציבור רחב של מורים, כי העבודה במערכת מרכז המסה אינה אינטואיטיבית, ולכן יותר קשה לתלמידים. מטרת המאמר הנוכחי היא להראות, עד כמה יותר פשוט הטיפול בהתנגשויות במערכת מרכז המסה מאשר במערכת המעבדה.

נסתכל במערכת מבודדת הכוללת שני גופים A ו B, שמסותיהם m_A, m_B בהתאמה (תרשים 1).



תרשים 1

המיקום r_C של מרכז המסה של A ו B במערכת המעבדה נתון על ידי:

$$\vec{r}_C = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A + m_B} \qquad (1)$$

גזירה של המשוואה (1) לפי הזמן נותנת את המהירות $\vec{v}_c$ של מרכז המסה:

$$\vec{v}_c = \frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B} \qquad (2)$$

המונה של משוואה (2) הוא ביטוי המייצג את התנע הכולל של המערכת שלנו ולכן גודלו קבוע. גם המכנה של המשוואה, המייצג את המסה הכוללת של המערכת, הוא גודל קבוע, ומכאן נובע שמהירות מרכז המסה $\vec{v}_c$ במערכת המעבדה היא קבועה.

נדון בהתנגשות אלסטית במערכת מרכז המסה. תהי מהירות המסה A לפני ההתנגשות $\vec{v}_{AC}$, ואחרי ההתנגשות $\vec{u}_{AC}$, ומהירות המסה B לפני ההתנגשות $\vec{v}_{BC}$, ואחרי ההתנגשות $\vec{u}_{BC}$.

כלומר:

$$\vec{u}_{AC} = \vec{u}_A - \vec{u}_C \quad ; \quad \vec{v}_{AC} = \vec{v}_A - \vec{v}_C$$

$$\vec{v}_{BC} = \vec{u}_B - \vec{v}_C \quad ; \quad \vec{u}_{BC} = \vec{u}_B - \vec{u}_C$$

כאשר סימנו את מהירות מרכז המסה לאחר ההתנגשות ב- $\vec{u}_C$. במערכת מרכז המסה התנע הקווי של המערכת הוא אפס, והיות שהתנע נשמר מתקיים:

$$m_A\vec{v}_{AC} + m_B\vec{v}_{BC} = m_A\vec{u}_{AC} + m_B\vec{u}_{BC} = 0 \qquad (3)$$

כמו כן קיים:

$$\frac{1}{2}m_A\vec{v}_{AC}^{\,2} + \frac{1}{2}m_B\vec{v}_{BC}^{\,2} = \frac{1}{2}m_A\vec{u}_{AC}^{\,2} + \frac{1}{2}m_B\vec{u}_{BC}^{\,2} \qquad (4)$$

(שימור האנרגיה הקינטית).

מפיתרון שתי המשוואות (3) ו (4) מקבלים: $\vec{v}_{AC}^{\,2} = \vec{u}_{AC}^{\,2}$, $\vec{v}_{BC}^{\,2} = \vec{u}_{BC}^{\,2}$ (החשבון המפורט נתון בנספח).

ולכן: $\vec{v}_{BC} = \pm\vec{u}_{BC}$, $\vec{v}_{AC} = \pm\vec{u}_{AC}$.

התנגשות אלסטית במימד אחד

עבור המקרה הפרטי של התנגשות אלסטית במימד אחד מקבלים:

$$v_{AC} = -u_{AC}\ ,\ v_{BC} = -u_{BC} \qquad (5)$$

כלומר, במערכת מרכז המסה גודל מהירויות הגופים לאחר ההתנגשות נשמר, וכיווני המהירויות משתנים; במקרה של התנגשות ***במימד אחד*** כיווני המהירויות מתהפכים. במערכת המעבדה נקבל איפוא (עבור התנגשות במימד אחד):

$$u_A = -v_{AC} + v_C = -(v_A - v_C) + v_C = -v_A + 2v_C \qquad (6)$$

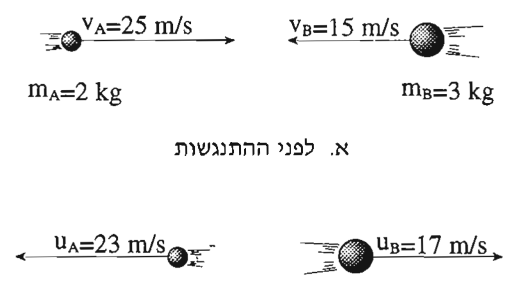
ובאופן דומה מקבלים:

$$u_B = -v_B + 2v_C \qquad (7)$$

נביא עתה דוגמה מספרית לשימוש במערכת מרכז המסה במקרה של התנגשות אלסטית בממד אחד.

דוגמא:

חשב את מהירות הגופים שבתרשים 2 לאחר התנגשות אלסטית במימד אחד. מהירויות הגופים נתונות במערכת המעבדה.



א. לפני ההתנגשות

ב. אחרי ההתנגשות

תרשים 2

פתרון:

נחשב את מהירות מרכז המסה:

$$v_C = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{2 \cdot 25 + 3 \cdot (-15)}{2 + 3} = 1 \text{ m/s}$$

מהירות A לאחר התנגשות:

$$u_A = -v_A + 2v_C = -25 + 2 \cdot 1 = -23 \text{ m/s}$$

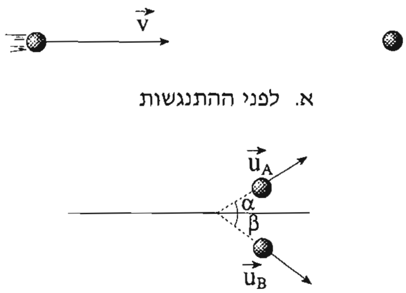
מהירות B לאחר התנגשות:

$$u_B = -v_B + 2v_C = +15 + 2 \cdot 1 = +17 \text{ m/s}$$

ניתן, כמובן, להגיע לאותן תוצאות גם ללא שימוש במערכת מרכז המסה, אך תמונת התנגשות במערכת יחוס של מרכז המסה פשוטה יותר להבנה, נותנת מידע רב יותר וקלה יותר לפתרון. יתרונות מערכת מרכז המסה בולטים במיוחד בבואנו לדון בהתנגשות בשני מימדים.

התנגשות אלסטית בשני ממדים

נדון תחילה במקרה פשוט של התנגשות (אלסטית, לא נצחית) של שני חלקיקים בעלי מסות שוות m כאשר אחד מהם נח במערכת המעבדה (תרשים 3).



א. לפני ההתנגשות

ב. אחרי ההתנגשות

תרשים 3

לאחר ההתנגשות מוסט חלקיק A בזווית α ממסלולו המקורי. נחשב את מהירויותיהם של החלקיקים לאחר ההתנגשות:

במערכת המעבדה

שימור התנע הקווי של המערכת:

$$m\vec{v} = m\vec{u}_A + m\vec{u}_B \qquad (8)$$

שימור האנרגיה הקינטית של המערכת:

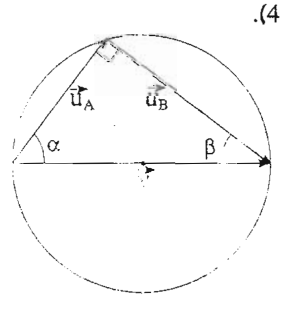
$$\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} = \frac{1}{2}m\vec{u}_A^{\,2} + \frac{1}{2}m\vec{u}_B^{\,2} \qquad (9)$$

פתרון שתי המשוואות, המבוססות על חוקי שימור התנע והאנרגיה, פשוט במקרה פרטי זה. נחלק את המשוואה (8) ב-m ואת המשוואה (9) ב-$\frac{1}{2}m$, ונקבל מערכת חדשה:

$$\vec{v} = \vec{u}_A + \vec{u}_B \qquad (10)$$

$$\vec{v}^{\,2} = \vec{u}_A^{\,2} + \vec{u}_B^{\,2} \qquad (11)$$

מהשוויון (10) נובע ששלושת הווקטורים יוצרים משולש, והשוויון (11) קובע שצלעותיו מקיימות את משפט פיתגורס, ומכאן נסיק ש-$\alpha + \beta = 90°$. זווית הפיזור של החלקיקים תנוע בין $0°$ ל-$90°$, כלומר כל הפתרונות ימצאו על מעגל בעל קוטר v (תרשים 4).



תרשים 4

חקירת המקרה שלפנינו נעשתה במערכת המעבדה, היות שזהו המקרה הפשוט ביותר של התנגשות אלסטית. תלמיד כיתה י"א הלומד פיסיקה ברמה של חמש יחידות יתגבר בקלות גם על החלק המתמטי של הבעיה.

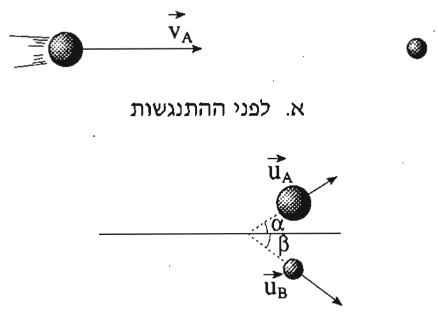
במקרים מורכבים יותר של התנגשות בשני ממדים נרשום אותן משוואות המבוססות על אותם חוקי שימור. פתרון המשוואות אמנם אפשרי, אך גוזל זמן רב ומייגע. ספק רב אם התלמיד המצוי יצליח להתמודד עם פתרון הבעיה על כל מרכיביה.

כדי להמחיש את דברי, הצגתי בפני תלמידי את השאלה 3ב מבחינת הבגרות בפיסיקה, קייץ תשמ"ו[1]. השאלה דנה בכדור A שמסתו 60 גרם הנע במהירות של 2 m/s ומתנגש בכדור נייח B שמסתו 20 גרם. "ההתנגשות בין הכדורים היא אלסטית, לא מצחית, והכדור A ממשיך בכיוון היוצר זווית α עם כיוון תנועתו לפני ההתנגשות. רשום את המשוואות המאפשרות לחשב את המהירות של כל אחד מן הכדורים והסבר אותן. אין צורך לפתור את המשוואות!"

כאשר הצגתי את השאלה המקורית בפני תלמידי, ושאלתי מה משמעותו של סימן הקריאה (!) בסוף השאלה, לא קיבלתי תשובה המניחה את הדעת. לכן נתבקשו התלמידים לפתור את הבעייה עבור המקרה הפרטי בו $\alpha = 15^\circ$. בנוסף היה עליהם לחקור את הבעייה ולבדוק אם קיים ערך מכסימלי ל α, ואם כן, מהו ערך זה. כמו כן נתבקשו לברר, האם קיים פתרון יחיד לבעייה.

פתרון.

נבחר מערכת צירים קרטזית x-y שבה x הוא בכיוון תנועת כדור A לפני ההתנגשות. (תרשים 5).



א. לפני ההתנגשות

ב. אחרי ההתנגשות

תרשים 5

שימור התנע - רכיב x:

$$0.06 \cdot u_A \cdot \cos\alpha + 0.02 \cdot u_B \cdot \cos\beta = 0.06 \cdot 2$$

שימור התנע - רכיב y:

$$0.06 \cdot u_A \cdot \sin\alpha - 0.02 \cdot u_B \cdot \sin\beta = 0$$

שימור האנרגיה:

$$\frac{1}{2} \cdot 0.06 \cdot {u_A}^2 + \frac{1}{2} \cdot 0.02 \cdot {u_B}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.06 \cdot 2^2$$

רישום המשוואות על-ידי התלמידים לא גזל זמן רב, אך למרות בקיאותם בחוקי השימור הם לא הצליחו לגלות האם קיים ערך מכסימלי ל-α, אם כן, מהם הגורמים המשפיעים עליו, והאם לבעיה פתרון יחיד.

הנסיון לפתור את המשוואות הבהיר להם את משמעותו של סימן הקריאה (!) שהופיע בסוף השאלה, והצילצול להפסקה גאל אותם מהעבודה המתישה.

לאחר ניסיון זה השתכנעו התלמידים שפתרון הבעייה במערכת מרכז המסה פשוט ביותר. להלן נביא פתרון זה:

במערכת מרכז המסה.

בשלב הראשון נצפה בהתנגשות ממערכת מרכז המסה, ובשלב השני נעבור למערכת המעבדה בהתאם לצורך.

במערכת מרכז המסה התנע הקווי הכולל של המערכת שווה לאפס, כלומר במערכת זו המסלולים של שני הכדורים חייבים להימצא על ישר אחד לפני ההתנגשות ועל ישר אחד, לא בהכרח זהה לקודם, גם לאחריה.

משימור התנע והאנרגיה הקינטית, נקבל שבמערכת מרכז המסה, המהירות של כל אחד מהגופים נשמרת בערכה המוחלט בהתנגשות אלסטית (נוסחה 5).

כלומר: $|u_{AC}| = |v_{AC}|$ ו- $|u_{AC}| = |v_{AC}|$

תיאור המאורעות במערכת מרכז המסה פשוט ביותר. במערכת זו אין כל הגבלה על הגודל של זווית הפיזור של שני הכדורים.

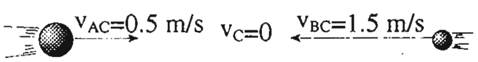
לפני ההתנגשות מהירות מרכז המסה v_C היא:

$$v_C = \frac{\Sigma mv}{\Sigma m} = \frac{0.06 \cdot 2}{0.06 + 0.02} = 1.5 \text{ m/s} = u_C \qquad (12)$$

ולכן מהירויות הגופים הן (תרשים 6):

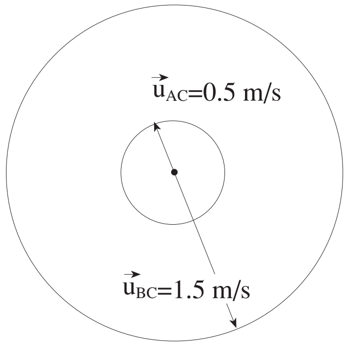
$$v_{AC} = v_A - v_C = 2 - 1.5 = 0.5 \text{ m/s} \qquad (13)$$

$$v_{BC} = v_B - v_C = 0 - 1.5 = -1.5 \text{ m/s} \qquad (14)$$



תרשים 6

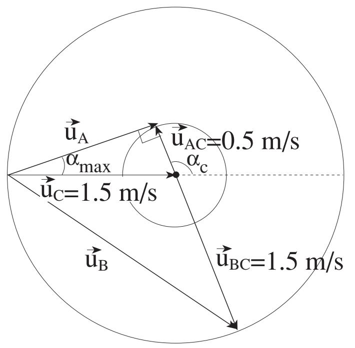
במערכת מרכז המסה נעים הכדורים A ו-B בכיוונים מנוגדים, ולכן כל הפתרונות יתקבלו על שני מעגלים. רדיוס המעגל הקטן מייצג את מהירות הכדור בעל המסה הגדולה, ורדיוס המעגל הגדול את מהירות הכדור בעל המסה הקטנה. (תרשים 7)



תרשים 7

במערכת המעבדה:

תרשים 8 מתאר מצב של זווית פיזור α מכסימלית, כלומר הוקטור u_A משיק למעגל הפתרונות של u_{AC} ולכן מתקבל פתרון יחיד. (תרשים 8)



תרשים 8

כאשר α קטנה מהמכסימלית, מתקבלות שתי נקודות חיתוך במעגל של u_{AC}, המייצגות שני פתרונות אפשריים.

כאשר תינתן בעייה עם זווית α הגדולה מהזווית המכסימלית יעבור u_A מחוץ למעגל הפנימי; ואז לא קיים לבעייה פתרון בעל משמעות פיסיקלית. קיים:

$$\vec{u}_A = \vec{u}_C + \vec{u}_{AC} \qquad (15)$$

$$\vec{u}_B = \vec{u}_C + \vec{u}_{BC} \qquad (16)$$

מ-(15) ומתרשים 8 נקבל את זווית הפיזור המכסימלית עבור כדור A.

$$\sin\alpha_{MAX} = \frac{u_{AC}}{u_C} = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3} \qquad (17)$$

במקרה הנדון, בו אחד הכדורים במנוחה במערכת המעבדה, זווית הפיזור המכסימלית תלויה אך ורק ביחס המסות.

$$\sin\alpha_{MAX} = \frac{m_B}{m_A}$$ (של מסה A)

במקרה פרטי זה נוכל לחשב את גודלו של u_A בעזרת משפט פיתגורס, ובמקרה הכללי בעזרת טריגונומטריה אלמנטרית.

$$u_A = \sqrt{u_C^2 - u_{AC}^2} = \sqrt{1.5^2 - 0.5^2} = 1.4 \text{ m/s} \qquad (18)$$

המשך הפתרון פשוט ולכן נשאיר אותו לקורא.

סיכום

התאור הקינמטי במערכת מרכז המסה מאפשר ניתוח קל ומהיר של המאורעות. הדיון, המתבצע באמצעים אלמנטרים, פשוט ונותן מידע רב.

מצאנו ביטוי (17) המאפשר חישוב של זווית הפיזור המכסימלית עבור המקרה הכללי של התנגשות דו ממדית בין שני חלקיקים. אם $u_C < u_{AC}$ אין כל הגבלה על גודל זווית הפיזור עבור החלקיק גם במערכת המעבדה.

$$\boxed{\sin\alpha_{MAX} = \frac{u_{AC}}{u_C}}$$

α נמדדת בין v_A לבין u_A, ולכן במקרים בהם תנועת החלקיקים לפני ההתנגשות אינה על ישרים מקבילים זה לזה, יש לקחת בחשבון את הזווית בין v_A לבין v_C.

מתוך התבוננות בתרשים 8, ושימוש בטריגונומטריה אלמנטרית מקבלים כמו כן ש:

$$\boxed{u_A \cdot \sin\alpha = u_{AC} \cdot \sin\alpha_C}$$

ביטוי זה מקשר בין הגדלים במערכת מרכז המסה, לבין הגדלים במערכת המעבדה.

α - זווית הפיזור של החלקיק A במערכת המעבדה,

α_C - זווית הפיזור שלו במערכת מרכז המסה.

ניתן להשתמש בשיטה זו לפתרון בעיות מורכבות יותר, כגון:

א) שני הגופים נמצאים בתנועה במערכת המעבדה.

ב) תנועתם, לא בהכרח, על ישר אחד.

ג) התנגשות הגופים, לא בהכרח, אלסטית לחלוטין.

מראי מקום:

1. רוזן, עדי: פיסיקה - מבחני בגרות, 4, 5 י״ל, עמ׳ 147, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, 1993.

לקריאה נוספת:

1. כהן, ר: התנגשות בשני מימדים. גליונות כרך 2, מס׳ 2 ע׳ 18-21, 1973.
2. כהן, ר: על התנגשות אלסטית, תהודה, כרך 13, מס׳ 2 ע׳ 50-51, 1989.

נספח

חוק שימור התנע הוא:

$$m_A\vec{v}_{AC} + m_B\vec{v}_{BC} = m_A\vec{u}_{AC} + m_B\vec{u}_{BC} = 0 \qquad (1)$$

שימור האנרגיה הקינטית:

$$\frac{1}{2}m_A\vec{v}_{AC}^{\,2} + \frac{1}{2}m_B\vec{v}_{BC}^{\,2} = \frac{1}{2}m_A\vec{u}_{AC}^{\,2} + \frac{1}{2}m_B\vec{u}_{BC}^{\,2} \qquad (2)$$

ממשוואה (1.3) נקבל:

$$(m_A\vec{v}_{AC})^2 = (m_B\vec{v}_{BC})^2\ ;\ \ (m_A\vec{u}_{AC})^2 = (m_B\vec{u}_{BC})^2$$

מכאן:

$$\vec{v}_{BC}^{\,2} = \left(\frac{m_A}{m_B}\right)^2 \vec{v}_{AC}^{\,2} \qquad (3)$$

$$\vec{u}_{BC}^{\,2} = \left(\frac{m_A}{m_B}\right)^2 \vec{u}_{AC}^{\,2} \qquad (4)$$

נציב את ערכיהם של $\vec{u}_{BC}^{\,2}$ ו-$\vec{v}_{BC}^{\,2}$ מ (3) ו (4) ל (2)

ונקבל:

$$\frac{1}{2}m_A\vec{v}_{AC}^{\,2} + \frac{m_B}{2}\left(\frac{m_A}{m_B}\right)^2 = \frac{1}{2}m_A\vec{u}_{AC}^{\,2} + \frac{m_B}{2}\left(\frac{m_A}{m_B}\right)^2 \vec{u}_{AC}^{\,2}$$

מכאן:

$$m_A\left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right)\vec{v}_{AC}^{\,2} = m_A\left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right)\vec{u}_{AC}^{\,2}$$

ולכן:

$$\vec{v}_{AC}^{\,2} = \vec{u}_{AC}^{\,2} \qquad (5)$$

באותו אופן מקבלים:

$$\vec{v}_{BC}^{\,2} = \vec{u}_{BC}^{\,2} \qquad (6)$$

כלומר:

$$\vec{v}_{BC} = -\vec{u}_{BC} \qquad (7)$$

$$\vec{v}_{AC} = -\vec{u}_{AC} \qquad (8)$$