

# חוק השטף של Faraday\*

חגי מאירוביץ, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן

## הקדמה

חוק השטף של Faraday הוא חוק ניסויי הקובע כי שינוי בשטף המגנטי  $\phi$  העובר דרך מוליך סגור משרה בו כא"מ  $\mathcal{E}$  בשיעור:

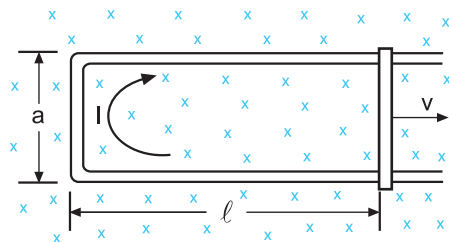
$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1)$$

זהו ניסוח כללי ביותר, שאינו תלוי בדרך בה מושג השינוי בשטף המגנטי. אם נרצה לברר את טיבו של הכוח המניע את המטענים במעגל בזמן שינוי השטף, נגלה כי קיימים שני סוגי כוחות שפעולתם נקבעת על ידי תנאי הניסוי. כידוע ניתן להשיג שינוי בשטף המגנטי העובר דרך מעגל בשתי דרכים שונות: על ידי הזזת המעגל, או חלקים ממנו, בשדה מגנטי קבוע, או בעזרת שדה מגנטי משתנה ומעגל סטטי (או, כמובן, בשינוי שניהם). מתברר, כי בניסוי מהסוג הראשון פועל על המטענים כוח Lorentz ואילו בשני נגרמת תנועתם על ידי השדה החשמלי שמחולל השדה המגנטי המשתנה. מכאן, שהתיאור הכמותי של  $\mathcal{E}$  בעזרת המושג של שינוי השטף המגנטי הוא הכללה המייצגת שתי תופעות פיסיקליות שונות ובלתי תלויות. לדעתו של Feynman זהו מצב יוצא דופן בפיסיקה בה כל חוק נובע תמיד מעיקרון בסיסי יחיד. נקודה זו אינה מודגשת ברוב ספרי הלימוד ועליה רצינו להתעכב ביתר פירוט בהמשך.

## מעגל נע בשדה מגנטי קבוע

נתאר לנו מוליך, שצורתו  $U$  ועל זרועותיו מונח מוט מוליך (תרשים 1). זהו מעגל חשמלי סגור ששטחו ישתנה עם תנועת המוט. אם נשים אותו בשדה מגנטי קבוע  $B$  ונביא לתנועת המוט יתקבל שינוי בשטף המגנטי העובר דרך המלבן, ולפי חוק השטף יושרה בו כא"מ. קל לחשב כא"מ זה בעזרת (1): השטף העובר דרך המלבן שצלעותיו  $\ell$  ו- $a$  הוא  $Bla$ . שינוי השטף מתכונתי לשינוי השטח ולכן גם למהירות המוט ימינה ומתקבל:

$$\mathcal{E} = aB \frac{d\ell}{dt} = aBv \quad (2)$$



תרשים 1

תוצאה זו ניתן לקבל גם מתוך שיקולים של פעולת כוח על מטענים נעים בשדה מגנטי: תנועת המוט מסיטה את מטעני החפשיים במהירות  $v$  ימינה אנכית לשדה המגנטי ולכן חשים הם בכוח  $F$  המשיק למוט כלפי מטה. הכוח ליחידת מטען  $F = Bv$  קבוע לאורך המוט ומתאפס על שאר צלעות המלבן. לכן לחישוב העבודה הנעשית בהעברת מטען יחידה לאורך המעגל תורמת רק האינטגרציה על המוט. עבודה זו, לפי ההגדרה, היא בדיוק הכא"מ  $\mathcal{E}$  המושרה במעגל ולכן ערכו:

$$\mathcal{E} = aBv$$

תוצאה זו זהה ל-(2). קיבלנו איפוא את חוק השטף במקרה זה על סמך כוח Lorentz.

## שדה מגנטי משתנה ומעגל קבוע

נסה עתה לבחון ניסוי בו השדה משתנה בזמן והמעגל נשאר סטטי. נקבע את המוט ונשנה בדרך כלשהי את עוצמת השדה המגנטי. חוק השטף של Faraday (1) מתקיים גם כאן אולם לא ניתן לחשב את  $\mathcal{E}$  על סמך כוח Lorentz כמו במקרה הקודם. נרשום כאן את הצורה הכללית ביותר של כוח הפועל על מטען חשמלי  $q$ :

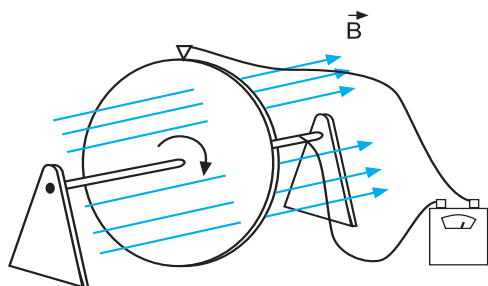
$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}])$$

בדוגמה הקודמת נע המוט במהירות  $v$  וכתוצאה מכך פעל על המטענים הכוח  $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ ; במקרה הנוכחי המעגל קבוע ותרומת ביטוי זה מתאפסת. אולם היווצרות זרם במעגל מעידה על מציאותו של כוח הפועל על המטענים ולכן יש להסיק שמקורו באיבר  $q\vec{E}$ . מסקנה זו (של Faraday) הביאה בזמנו להכנסת חוק יסודי חדש לתורת החשמל: באיזור בו משתנה השדה המגנטי עם הזמן נוצרים שדות חשמליים.

\* לקוח מ"גליונות" (3), 1972

## מגבלותיו של חוק השטף

ישנן דוגמאות בהן חוק השטף (1) אינו תופס. נתאר מקרה כזה: דיסקה מוליכה המסתובבת על ציר נמצאת בשדה מגנטי הומוגני  $B$  הניצב לפני שטחה (תרשים 2). הדיסקה מהווה חלק מ"מעגל" הנסגר בעזרת שני תילים וגלגלנומטר.



תרשים 2

תייל אחד מחובר לציר הסיבוב והשני נוגע בהיקף החיצוני של הדיסקה. (רשמנו כאן - "מעגל" מאחר ומסלול הזרם על הדיסקה אינו מוגדר בגלל שטחה הגדול). כאשר הדיסקה מסתובבת נשאר המעגל קבוע (כשאנו אומרים "קבוע" כוונתנו, שהאיזור במרחב בו נעים המטענים אינו משתנה), אולם חלק "המעגל" העובר בדיסקה נמצא בחומר הנע.

ברור, שלא חל שינוי בשטף המגנטי העובר דרך המעגל ובכל זאת נוצר כא"מ המתגלה על ידי הסחת מחט הגלגלנומטר. מכאן, שחוק השטף אינו תופס במקרה זה. את הופעת הכא"מ ניתן להסביר בעזרת כוח Lorentz: המטענים החפשיים שעל הדיסקה מסתובבים עמה במאונך לשדה המגנטי  $B$ . מטען חיובי יחידתי, שמרחקו מציר הסיבוב  $r$  ינוע במהירות משיקית  $\omega r$ , ולכן יפעל עליו כוח  $B\omega r$  בכיוון רדיאלי כלפי מעלה. הכא"מ  $\mathcal{E}$  יתקבל על ידי אינטגרציה של כוח זה מציר הדיסקה להיקפה:

$$\mathcal{E} = \omega B \int_0^R r dr = \frac{\omega B R^2}{2}$$

כאשר  $R$  הוא רדיוס הדיסקה.

המסקנה מניסוי זה ומניסויים דומים היא, שחוק השטף אינו תמיד בר תוקף; ישנן תופעות בהן עלינו לחזור לחוקים הבסיסיים ולנתח את המצב לפיהם. הפיסיקה הנכונה נתונה תמיד על ידי חוקים אלה:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}])$$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

חוק השטף הוא, אמנם, מסקנה מחוקים אלה אך ההיפך אינו נכון: חוקים אלה אינם מסקנה מחוק השטף ולכן אין הוא מקוויולנטי להם.

**תהודה**

שדות אלו מזיזים את האלקטרונים במעגל ויוצרים בו זרם גם כאשר המעגל נח. הניסוח המתמטי של חוק זה הנקרא "חוק Faraday" ניתן על ידי Maxwell.

$$[\vec{\nabla} \times \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

בסיוע החוק (3) תוך שימוש במשפט Stokes ניתן לקבל את חוק השטף (1). יהי  $\Gamma$  מסלול סגור במרחב. לפי הגדרתו מקבל  $\mathcal{E}$  את הצורה הבאה:

$$\mathcal{E} = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} [\vec{\nabla} \times \vec{E}] \cdot \vec{n} da = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} da$$

$s$  הוא משטח פתוח ששפתו  $\Gamma$ . את פעולת הגזירה אפשר להוציא אל מחוץ לאינטגרל ומקבלים:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} (\vec{B} \cdot \vec{n}) da = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$\vec{n}$  הוא וקטור היחידה הניצב על שטח המעגל וזהו חוק השטף (ראה נוסחה 1).

מן הפיתוח האחרון נובע שהכא"מ שחושב אינו תלוי כלל במציאותו של תייל מוליך בניגוד למקרה הראשון בו פעל הכוח  $q[\vec{v} \times \vec{B}]$ . השדה  $\vec{E}$  קיים במרחב החפשי והאינטגרל הקווי שלו על כל מסלול דמיוני סגור נותן תמיד את קצב שינוי השטף דרך שטח המסלול. כדאי לשים לב לשוני בין תוצאה זו לבין תכונתו של שדה חשמלי סטטי; שם האינטגרל הקווי של השדה על מסלול סגור תמיד מתאפס.

## מסקנות

אפשר לסכם ולומר: חוק השטף הניסויי של Faraday ניתן להסבר בשתי הדוגמאות בעזרת כוחות הפועלים על המטענים. אולם בשני המקרים אופי הכוחות שונה לחלוטין. במקרה הראשון (מעגל נע) פעל כוח Lorentz  $q[\vec{v} \times \vec{B}]$  ואילו במקרה השני (שדה משתנה) נגרם הכוח על ידי השדה החשמלי שנוצר עקב שינוי בשדה המגנטי  $\vec{B}$  (לפי נוסחה 3).

לכן על חוק השטף יש להסתכל בצורה הבאה: הכוח הפועל על מטען חשמלי הוא  $\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}])$ . במוליך הנע בשדה מגנטי נגרם הכוח על המטענים על ידי האיבר השני. במידה וקיימים שדות מגנטיים משתנים ייווצר שדה חשמלי נוסף -  $\vec{E}$ .

אלו הן שתי תופעות בלתי תלויות, אולם הכא"מ המושרה במעגל יהיה שווה תמיד לשינוי השטף המגנטי העובר דרכו.