תנודות פס מתכת

עדי רוזן, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, ומשרד החינוך והתרבות

במאמר זה מוצג הניסוי שהופיע כמטלה בבחינת הבגרות במעבדה במתכונת החקר (unseen) שהתקיימה בקיץ תשנ״ב. שאלון הבחינה מופיע כאן בנוסחו המקורי, למעט שינויים קלים. לאחר השאלון מופיע פירוט לגבי רשימת הציוד, מבוצע ניתוח של הניסוי ותוצאותיו, מוצג הרקע התיאורטי הקשור לנושא ומאופיינות שגיאות התלמידים.

הניסוי מומלץ בפרט לתלמידים הבוחרים בנושא ״מכניקה של גוף קשיח״, וכן לשאר התלמידים, כתרגיל מעניין לשם לימוד מיומנויות של עיבוד תוצאות ניסויים (רוזן, תש״ן).

שאלון הבחינה

לרשותך עומד, לצורך ניסוי זה, הציוד הבא:

פס אלומיניום שיש בו 7 נקבים;

סיכה;

פקק שעם;

שני סרגלים שאורך כל אחד מהם 30 ס״מ;

שעון עצר;

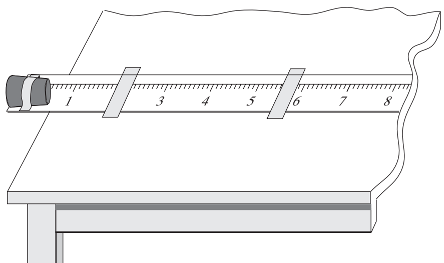
נייר דבק;

נייר מילימטרי.

חלק ראשון – בניית המערכת הניסויית

א. הצמד, באמצעות נייר דבק, את פקק השעם אל קצה אחד הסרגלים, כמתואר בתרשים 1.

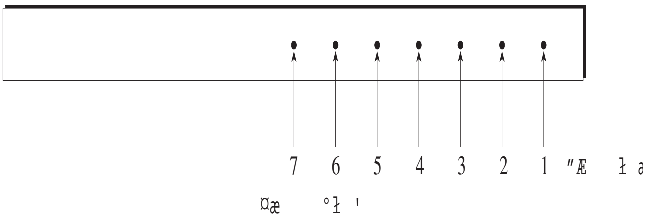
ב. הצמד, באמצעות נייר דבק, את הסרגל אל השולחן, כך שהפקק יבלוט מעט מעבר לשפת השולחן (ראה תרשים 1).



תרשים 1

חלק שני – ביצוע הניסוי

לכל נקב בפס האלומיניום ניתן מספר סידורי, כמתואר בתרשים 2.

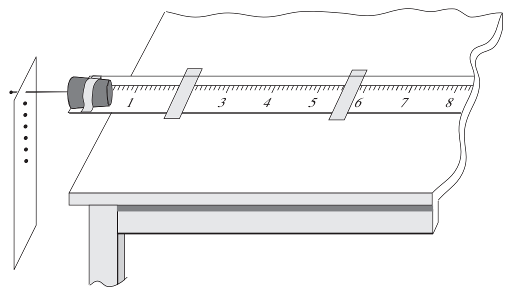


תרשים 2

1. לגבי ***כל אחד*** מהנקבים 1-6:

א. מדוד את המרחק l מהנקב אל מרכז הפס (נקב מספר 7) ורשום את תוצאות המדידה בטור שכותרתו l, בטבלה 1 (בשאלון הבחינה הוצגה טבלה ריקה).

ב. העבר את הסיכה דרך הנקב, ונעץ אותה בפקק השעם, כך שהסיכה תהיה אופקית ופס האלומיניום יוכל להתנודד באופן חופשי סביב הסיכה המשמשת ציר סיבוב (ראה תרשים 3, המתאר מצב זה ביחס לנקב מספר 1).



תרשים 3

ג. הסט את פס האלומינום ממצב שיווי-משקל והרפה ממנו, כך שהוא יתנודד סביב הסיכה, המשמשת ציר סיבוב, כשהתנודות הן במישור המאונך לסיכה, ומדוד את זמן מחזור התנודות T. תכנן את המדידות כך שתקבל דיוק גבוה בתוצאת המדידה של T. העמודה

בטבלה שאין לה כותרת, נועדה לרישום מדידות ביניים לפני מציאת זמן המחזור. בעמודה זו רשום את הגדלים שקיבלת במדידות הביניים. רשום כותרת מתאימה, וציין יחידות.

ד. רשום את זמני המחזור בטבלה בעמודה שכותרתה T.

2. הסבר כיצד ביצעת את המדידות של זמן המחזור, על-מנת להגדיל את הדיוק במדידה של זמן המחזור T.

3. x - רוחב פס האלומיניום; y - אורך פס האלומיניום.
מדוד את הערכים x ו y, ורשום במחברתך את תוצאות המדידות (כולל יחידות).

חלק שלישי – ניתוח, מסקנות ושאלות

4. סרטט, על גבי נייר מילימטרי, גרף של זמן המחזור T כפונקציה של l.
הערך מתוך הגרף את האורך l, שעבורו זמן המחזור T הוא מינימלי.

מן התיאוריה ניתן להוכיח את הקשר:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + l^2}{lg}} \qquad (1)$$

כאשר: g - תאוצת הנפילה החופשית;
l - המרחק מציר הסיבוב למרכז המסה של הפס (מרכז הפס);
T- זמן מחזור התנודות.

k - קבוע הפס הניתן על-ידי:

$$k = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{12}} \qquad (2)$$

5. חשב ורשום בטבלה את ערכיהם של l^2 ושל T^2l, וסרטט, על-גבי נייר מילימטרי, גרף של T^2l כפונקציה של l^2 .

6. מצא מתוך הגרף, באמצעות נוסחה (1), את תאוצת הנפילה החופשית g. (הסבר כיצד קבעת את g, הצג את החישובים ורשום את ערכו המחושב של g, כולל יחידות.)

7. מצא מתוך הגרף, באמצעות נוסחה (1), את קבוע הפס k. (הסבר כיצד קבעת את k, הצג את החישובים ורשום את ערכו המחושב של k, כולל יחידות.)

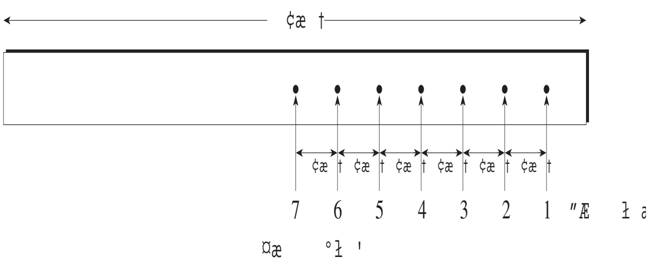
8. חשב את ערכו של k בעזרת נוסחה (2).

9. השווה בין ערכו של k, שהתקבל מתוך הגרף (סעיף 7), לבין ערכו של k, שהתקבל מנוסחה (2) (סעיף 8). הבע דעתך ביחס למידת הדיוק של התוצאות.

10. אילו ביצעת את הניסוי עם פס נחושת שממדיו זהים לממדי פס האלומיניום, האם תוצאות הניסוי היו שונות? *נמק.*

הערות לגבי הציוד ובניית המערכת הניסויית

1. הכנת הפס: יש להכין פס אלומיניום שעוביו 0.5 מ״מ - 0.7 מ״מ, רוחבו 2 ס״מ ואורכו 25 ס״מ.
מנקבים 7 נקבים כאשר אחד הנקבים במרכז הפס, וכל האחרים מצידו האחד של הנקב שבמרכז הפס, במרחק 2 ס״מ זה מזה, כמתואר בתרשים 4.



תרשים 4

את הנקבים ניתן לעשות באמצעות פטיש ומסמר (שקוטרו גדול במקצת מקוטר הסיכה).
אין בניסוי זה שימוש בנקב שבמרכז הפס, וניתן להסתפק בסימון נקודת המרכז. בכל זאת כדאי לנקב את מרכז הפס משני טעמים:
א. נקב דק מהווה סימון מדויק של מרכז הפס, ואינו נמחק.
ב. פס האלומיניום עשוי לשמש בניסויים אחרים כגון חקירת מומנטים , בהם עשוי להיות שימוש בנקב זה.

2. מצמידים את פקק השעם לאחד הסרגלים באמצעות נייר דבק. סרגל זה אינו חייב להיות סרגל מדידה (כלומר עם שנתות).

3. מצמידים את הסרגל עם פקק השעם לשולחן כך שהפקק וחלק מהסרגל יבלטו ממשטח השולחן. ניתן להצמיד את הסרגל לשולחן באמצעות נייר דבק, כליבה או בכל אמצעי מתאים אחר.

4. במהלך הניסוי, יש להשתדל שהפס יתנודד רק במישור ניצב לסיכה, ולהימנע (במידת האפשר) מתנודות סביב ציר העובר לאורך הפס (תנודות אלה גוברות ככל שציר הסיבוב קרוב יותר למרכז המסה).
על התנודות להיות בזוויות לא גדולות מדי, כי נוסחה (1) נכונה בקירוב של זוויות קטנות.

מס' סידורי של הנקב	l (cm)	$10T$ (s)	$10T$ (s)	$10T$ (s)	$\overline{T}$ (s)	l^2 (cm^2)	T^2l ($s^2\cdot cm$)
1	12.25	8.3	8.3	8.3	0.83	150.1	8.44
2	10.20	8.0	8.1	8.0	0.80	104.0	6.53
3	8.10	7.8	7.8	7.8	0.78	65.6	4.92
4	6.10	7.8	7.8	7.8	0.78	37.2	3.71
5	4.05	8.4	8.4	8.4	0.84	16.4	2.86
6	2.05	10.7	10.6	10.7	1.07	4.2	2.35

טבלה 1

תוצאות הניסוי וניתוחן על פי שאלון הבחינה

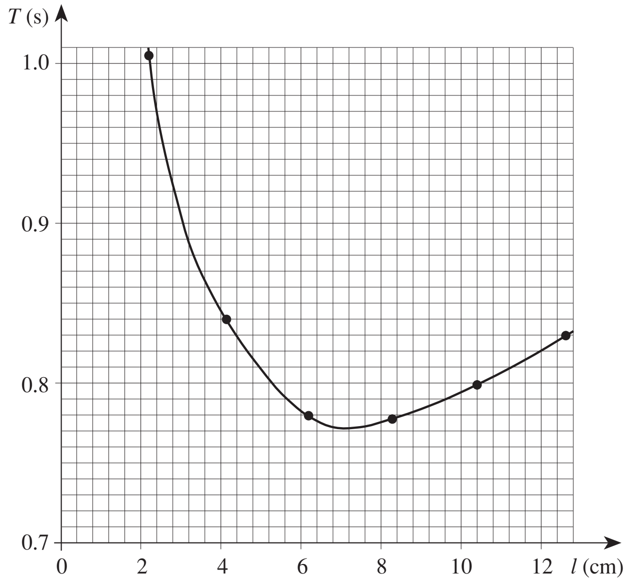
1. בטבלה 1 מוצגים ממצאים שהתקבלו באחד הניסויים.

2. כדי להקטין את אי-הוודאות במדידת זמן המחזור מדדנו את הזמן הדרוש עבור עשר תנודות. עבור כל l מדדנו 3 פעמים את הזמן עבור 10 תנודות, כדי לבדוק אי תלות זמן באמפליטודה (בזווית), ולאחר מכן חישבנו את זמן המחזור הממוצע. (בדיקת אי תלות זמן המחזור בזווית לא נדרשה במבחן).
מדידת הזמן בוצעה באמצעות שעון עצר המודד מאיות השנייה. בגלל סדר הגודל של השונות בזמני התגובה של מבצע המדידות, אין משמעות לסיפרת המאיות, ולכן רשמנו את הזמן עבור עשר תנודות עם סיפרת עשיריות השנייה בלבד.

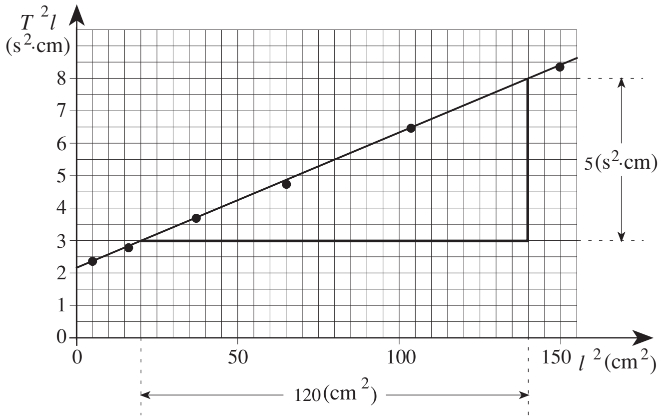
3. רוחב הפס: $x = 2.0$ cm
אורך הפס: $y = 25.2$ cm

4. בתרשים 5 מופיע גרף המתאר את זמן המחזור T כפונקציה של l: לגרף יש נקודת מינימום עבור l שערכו בין 6.6 cm לבין 7.6 cm

5. ערכיהם של l^2 ו- T^2l מופיעים בטבלה 1.
בתרשים 6 מופיע גרף המתאר את T^2l כפונקציה של l^2:



תרשים 5



תרשים 6

6. **חישוב g מתוך הגרף:** בהנחיות לביצוע הניסוי נתונה נוסחה (1):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + l^2}{lg}}$$

נעלה את שני אגפי המשוואה בחזקה שנייה, נכפול אותם ב- l ונקבל:

$$T^2 l = \frac{4\pi^2 k^2}{g} + \frac{4\pi^2}{g} l^2 \qquad (3)$$

מ-(3) ניתן לראות שהעקום המתאר את $T^2 l$ כפונקציה של l^2 אמור להיות *קו ישר*.

שיפוע ישר זה הוא $\frac{4\pi^2}{g}$; יחידות השיפוע הן $\frac{s^2}{cm}$.

מתרשים 6 מקבלים כי:

שיפוע הישר הוא $\frac{5}{120}\ s^2cm^{-1}$ (ראה תרשים 6), לכן:

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{5}{120}\ \frac{s^2}{cm}$$

ומפתרון המשוואה: $g = 947\ cm/s^2$

וביחידות SI תאוצת הנפילה החופשית שקיבלנו:

$$\boxed{g \approx 9.5\ \frac{m}{s^2}}$$

7. **חישוב k מתוך הגרף:** מהתבוננות במשוואה (3) ניתן לראות שהגרף חותך את הציר האנכי בנקודה ששיעורה שווה ל- $\frac{4\pi^2 k^2}{g}$.

הגרף שקיבלנו חותך את הציר האנכי בנקודה ששיעורה $2.1\ s^2 \cdot cm$, לכן:

$$\frac{4\pi^2 k^2}{947} = 2.1\ s^2 \cdot cm$$

ומפתרון המשוואה:

$$\boxed{k \approx 7.3\ cm}$$

8. **חישוב k על פי נוסחה (2):** על פי תוצאות המדידה הרשומות בסעיף 3:

$$k = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{12}} = \sqrt{\frac{25.2^2 + 2^2}{12}}$$

$$\boxed{k \approx 7.3\ cm}$$

9. לא התקבל פער בין שני הערכים עד הסיפרה השנייה אחרי הנקודה העשרונית.

10. תוצאות הניסוי עם פס נחושת בעל ממדים זהים לפס האלומינום ***לא יהיו שונות*** (למעט כמובן שגיאות מדידה מקריות) כי על פי נוסחה (1), זמן המחזור תלוי רק בגדלים גיאומטריים של הפס.

שאלה לקורא

כיצד יתכן שהגרף של $T^2 l$ כפונקציה של l^2 אינו עובר דרך הראשית? שהרי, כאשר $l^2 = 0$ אז $l = 0$, לכן $T^2 l$ צריך להיות שווה לאפס, בסתירה לתוצאות הניסוי!

הערות לגבי התיאוריה

א. ערך l שעבורו מתקבל זמן מחזור T מינימלי.

בסעיף 4 מצאנו על פי תוצאות הניסוי כי הערך המינימלי של זמן המחזור נתקבל עבור מרחק l שערכו נמצא בין 6.4 ס"מ לבין 7.6 ס"מ. נראה על פי נוסחה (1), כי הערך המינימלי של זמן המחזור מתקבל עבור l המקיים $l = k$.

$$T = 2\pi\left(\frac{k^2 + l^2}{lg}\right)^{\frac{1}{2}}$$

תנאי הכרחי לנקודת קיצון הוא שהנגזרת הראשונה תתאפס, כלומר:

$$\frac{dT}{dl} = 2\pi \frac{1}{2}\left(\frac{k^2 + l^2}{lg}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2l \cdot gl - (k^2 + l^2)g}{(lg)^2}\right) = 0$$

לכן זמן מחזור מינימלי מתקבל עבור $l = k$. התוצאה הניסויית שמצאנו בסעיף 4 אמנם מתאימה למסקנה זו.

ב. פיתוח נוסחאות (1) ו (2) שבדפי הניסוי.

פס האלומיניום המתנודד סביב ציר (הסיכה) מהווה *מטוטלת פיסיקלית*. זמן המחזור של מטוטלת פיסיקלית המתנודדת בזוויות קטנות ניתן כידוע (ראה למשל פ. סירס ומ. זימנסקי, 1992, עמ' 254) על ידי הנוסחה:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}} \qquad (4)$$

כאשר: I - מומנט ההתמדה ביחס לציר הסיבוב של המטוטלת;
l - מרחק ציר הסיבוב ממרכז המסה של המטוטלת;
m - מסת המטוטלת.

נמצא ביטוי מתמטי עבור מומנט ההתמדה I, ואחר-כך נציב אותו בנוסחה (4) ונקבל את הנוסחאות המבוקשות. את הביטוי המתמטי עבור מומנט ההתמדה I נמצא בשני צעדים:

צעד ראשון - נמצא ביטוי למומנט ההתמדה I_0 של פס האלומיניום ***ביחס לציר העובר דרך מרכז המסה של הפס***.

תרשים 7 מתאר פס אחיד. נבחר מערכת צירים שראשיתה במרכז המסה של הפס, הציר y לאורך הפס, הציר x לרוחבו, והציר z מאונך לשניהם.

מומנט התמדה של גוף מוגדר על-ידי: $I_0 = \int r^2\, dm$

כאשר: r - מרחק אלמנט המסה מציר הסיבוב.
אם צפיפות הגוף אחידה אזי:

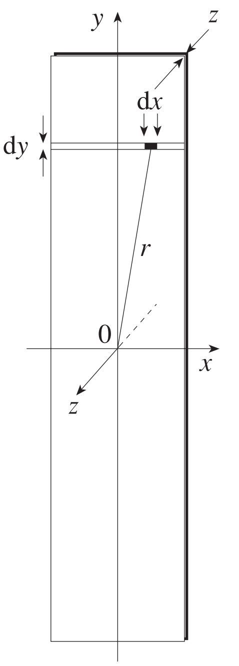
$$I_0 = \rho\int r^2\, dV \qquad (5)$$

נסמן x - אורך הפס;
y - רוחב הפס;
z - עובי הפס.

נסתכל על אלמנט מסה שרוחבו dx, אורכו dy, ועוביו z.

נפחו יהיה:

$$dV = z\,dx\,dy \qquad (6)$$



תרשים 7

נציב את (6) ב- (5):

$$I_0 = \rho\int r^2 z\, dx\,dy = \rho z\int_{-\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

$$I_0 = \rho xyz\,\frac{x^2 + y^2}{12} = \rho V\,\frac{x^2 + y^2}{12} = m\,\frac{x^2 + y^2}{12}$$

$$\boxed{I_0 = m\,\frac{x^2 + y^2}{12}} \qquad (7)$$

נסמן: $k^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{12}$

ולפיכך:

$$I_0 = m\,k^2 \qquad (8)$$

על פי משפט שטיינר, מומנט ההתמדה ***ביחס לציר שאינו עובר דרך מרכז המסה***, אלא במרחק l ממנו, ניתן על ידי:

$$I = I_0 + m\,l^2 \qquad (9)$$

נציב את (8) ב- (9), ונקבל:

$$I = mk^2 + ml^2 \qquad (10)$$

נציב את (10) ב- (4) ונקבל:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mk^2 + ml^2}{mlg}}$$

לסיכום:

$$\boxed{\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + l^2}{lg}} \\ k^2 &= \frac{x^2 + y^2}{12} \end{aligned}}$$

שגיאות אופייניות של תלמידים

מבדיקת מחברות הנבחנים התברר שיש מספר שגיאות אופייניות:

א. בחירת קנה מידה: המטלה בסעיף 4 היתה לכאורה פשוטה; לסרטט גרף של זמן המחזור T כפונקציה של l, ולהעריך את ערכו של l שעבורו זמן המחזור הוא מינימלי. הערכים של זמני המחזור בניסוי זה משתנים בערך מ-0.8s עד 1.1s (ראה טבלה 1). נבחנים רבים בחרו קנה מידה לא מוצלח עבור הציר האנכי (T): נבחנים אלה בחרו לסרטט את הציר האנכי מ-T=0 עד T=1.1s (ולא לסרטט למשל מ- T = 0.7s, כמו בתרשים 5), כאשר אורך של 1cm על הציר האנכי מייצג 0.1s. כתוצאה מכך התקבל גרף 'שטוח', ורבים מהנבחנים לא גילו נקודת מינימום בעלת ערך סביר.

ב. סרטוט קוו ליניארי במקום עקום כללי יותר: סוג שגיאה אחר התגלה אצל נבחנים שאמנם בחרו קנה מידה סביר, אך במקום לסרטט עקום העובר דרך הנקודות (או בקרבתן) סרטטו עקום המורכב משני קווים ישרים (בדומה לאות V).

להערתי סוג השגיאה האחרון נובע מכך שתלמידים הורגלו בשיעורי המעבדה לסרטט גרפים ליניאריים בלבד. השערה זו נתמכת על-ידי תוצאות סקר שערכתי בקיץ 1988 לגבי דרכי עיבוד ממצאי ניסויים. 125 מורים שהגישו באותה שנת לימודים תלמידים לבחינת בגרות במעבדה, ענו על שאלון אשר כלל את השאלה הבאה:

שאלה זו עוסקת בניסויים כמותיים, בהם הקשר בין המשתנים x ו- y אינו ליניארי, אך קיימות פונקציות (טרנספורמציות) $\mathrm{g}(x)$ ו- $\mathrm{h}(y)$ כך שהקשר בין $\mathrm{g}(x)$ לבין $\mathrm{h}(y)$ הוא ליניארי.
דוגמה: כאשר כוח פועל על מסות שונות, הקשר בין התאוצה a לבין המסה m אינו ליניארי, אך הקשר בין a לבין $1/m$ הוא ליניארי.
באיזו שיטה פעלו לרוב תלמידים בשיעורי המעבדה?

א. התלמידים סרטטו רק את הגרף המתאר את $\mathrm{g}(x)$ כפונקציה של $\mathrm{h}(y)$.
(בדוגמה לעיל: סרטטו רק את תלות a ב- $1/m$).

ב. התלמידים סרטטו את y כפונקציה של x, ואחר כך, על פי מידע קודם, (משיעור עיוני או על פי הנחיותיך) סרטטו את $\mathrm{g}(x)$ כפונקציה של $\mathrm{h}(y)$ ונוכחו שמתקבל גרף ישר.
(בדוגמה לעיל: סרטטו גרף המתאר את a כפונקציה של m ואחר כך נאמר להם לסרטט את a כפונקציה של $1/m$).

ג. התלמידים סרטטו את y כפונקציה של x, ואחר-כך מצאו בעצמם את הפונקציות $\mathrm{g}(x)$ ו- $\mathrm{h}(y)$; כך מצאו את הקשר בין המשתנים.
(בדוגמה לעיל: סרטטו גרף המתאר את a כפונקציה של m ואחר כך מצאו בעצמם שהתאוצה נמצאת ביחס ישר ל- $1/m$).

ד. אחרת (פרט):

24% מבין המורים שהשיבו לשאלון, סימנו את אפשרות א'.

ג. עקום חייב לעבור דרך ראשית הצירים: העקום המתאר את T^2l כפונקציה של l^2 (סעיף 5) הוא עקום ליניארי אשר בברור אינו עובר דרך ראשית הצירים (ראה תרשים 6). מבדיקת תשובות הנבחנים התברר שרבים מהם "כפו" על הגרף לעבור דרך הראשית.

שגיאה דומה התגלתה גם בבחינת הבגרות בכתב ברמה של 5 יח"ל בקיץ תשנ"ב; בשאלון במכניקה תואר ניסוי העוסק בקשר שבין מספר הגלילים (n) התלויים על קפיץ אנכי לבין זמני המחזור (T) של תנודות הגלילים. התלמידים התבקשו לסרטט גרף של T^2 כפונקציה של n, על פי טבלה שהציגה נתונים אמפיריים. ושוב, למרות שהנקודות הנסיוניות בגרף תיארו בקירוב ישר, שאינו עובר דרך הראשית, מתחו נבחנים רבים קוו ישר החותך את הראשית.

ד. מציאת פרמטרים מגרף ליניארי: בשני סעיפים 6 ו-7 יש למצוא את g ואת k מתוך הגרף המתאר את T^2l כפונקציה של l^2.

שלבי הפתרון:

1. הבעת T^2l כפונקציה של l^2 (מתוך נוסחה (1)), ורישום הקשר בצורה המקובלת להצגת קשר ליניארי

(y=ax+b).

2. זיהוי שיפוע הישר עם $\frac{4\pi^2}{g}$, וזיהוי נקודת החיתוך בין הישר והציר $T^2 l$ עם $\frac{4\pi^2 k^2}{g}$.

3. מציאת שיפוע הישר ונקודת חיתוכו עם הציר האנכי, וחישוב g ו-k מתוכם.

רוב הנבחנים לא פנו לדרך זו, ולא הסתייעו בגרף לשם חישוב g ו-k. תלמידים אלה חישבו את k באמצעות נוסחה (2) (מטלה שהיו צריכים לבצע בסעיף 8, כדרך נוספת לחישוב k). לאחר חישוב k בחרו מהטבלה ערך של l ושל T, וחישבו את g באמצעות נוסחה (1).

ה. חישוב שיפוע גרף ליניארי: גם בפתרונות של נבחנים שעלו על דרך המלך, נתגלה ליקוי משותף: רבים בחרו שתי נקודות קרובות מדי על הישר לצורך חישוב שיפוע, ובכך הגדילו את השגיאה בערכו של שיפוע הישר.

לסיכום נציין שחוקרים רבים, למשל ווימן (Wyman, 1988/89), הצביעו על כך שתלמידים אמנם משתמשים בטכניקה של עיבוד ממצאי מעבדה פעמים רבות בלימודיהם, אך הלימוד אינו נעשה בדרך כלל מתוך ראיה כוללת, ולכן תלמידים רואים כל שימוש כשלעצמו, ולא מסוגלים ליישם אסטרטגיה זו למקרים חדשים לא מוכרים.

מראי מקום

רוזן, ע. (תש"ן), אנאליזה של ניסוי, ***תהודה, עלון למורה הפיסיקה***, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, **14** (1), 56-58.

פ. סירס ומ. זימנסקי, ***פיסיקה תיכונית, מכניקה***, הוצאת יבנה, עמ' 254, 1992.

Wyman, N.R. (1988/89). A Computer Aided Unit to Teach Reduction of Experimental Data to a Functional Relationship. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 8**(2), 41-46.