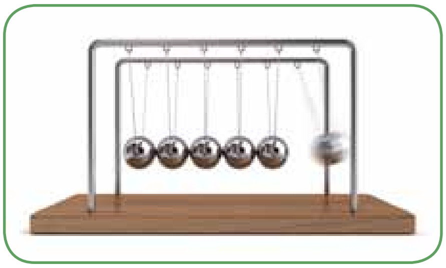
"עריסת ניוטון"- ("מטוטלת מנהלים") צעצוע או מעבדה?

ד"ר יוסף שפירא, "קום אנד סנס", חיפה*



הצעצוע ה"אינטלקטואלי" אשר מעטר שולחנותיהם של מנהלים רבים, אמנם משעשע ומהפנט. כדור אחד פוגע משחרר כדור בקצה השני של השורה. שני כדורים פוגעים משחררים שניים, וכן הלאה. הצופה המסוקרן פונה לספרי פיזיקה בסיסיים כדי לרצות עצמו בחוקי שימור התנע והאנרגיה ובהדגמתם על התנגשות בין שני כדורים. ההרחבה לשורת כדורים נראית כמתבקשת מאליה.

האמנם?

כשבתי נדרשה לפרויקט מדעי בבית ספר בארה"ב, הצעתי לה לחקור את המטוטלת המסקרנת הזו. אספנו כדורי גולף בשולי מגרש אימונים, בנינו מטוטלת לתפארת, הצבנו מצלמת וידאו, והיא צילמה ורשמה ובדקה התאמה לחוקים.

פשוט, לא?

ובכן, מה קורה כאשר הכדור הפוגע הוא בעל מסה כפולה מזו של כל אחד מהיתר? במה שונה התוצאה מזו של פגיעת שני כדורים בעלי מסה יחידה? (אותה המסה, אותה אנרגיה, אותו תנע).

ומה כאשר הכדור הפוגע הוא בעל מחצית המסה מזו של כל אחד מהיתר?

מסתבר שחסרות לנו משוואות לניתוח מטוטלת רבת כדורים, והסיבה היחידה לתגובת המטוטלת, כמו להתנגשות בין שני כדורים זהים, היא הזהות המלאה בין כל הכדורים אשר מאפשרת העברת המְתקף מקצה לקצה ללא שינוי, ובכך לתנועה אסטטית בעלת פשטות מטעה.

תובנה של מערכת זו מושגת כאשר נניח קיום מרחקים זעירים בין הכדורים. אין הם משנים את המודל, אלא מבהירים שאין לחצים (כוחות פועלים) בין הכדורים במנוחה. משעשינו זאת - לפנינו סדרת מערכות בלתי תלויות, בכל אחת שני כדורים מתנגשים, זה אחר זה.

עבור שני כדורים בעלי מסות m_1,m_2 בהתאמה ומהירויות כניסה $V_{20}=0,V_{10}$ ויציאה V_{21},V_{11} בהתאמה (הכדור השני במנוחה לפני ההתנגשות) נקבל את המשוואות האלה:

(1) $$m_1 v_{10} = m_1 v_{11} + m_2 v_{21}$$

* קישורים: jshapira@netvision.net.il, www. comm-and-sens.com

ובהנחה שההתנגשות אלסטית לחלוטין, נקבל את המשוואות האלה:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{11}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{21}^2 \quad (2)$$

לנוחותנו נגדיר $q \equiv \frac{m_1}{m_2}$. נחלץ את מהירויות המוצא:

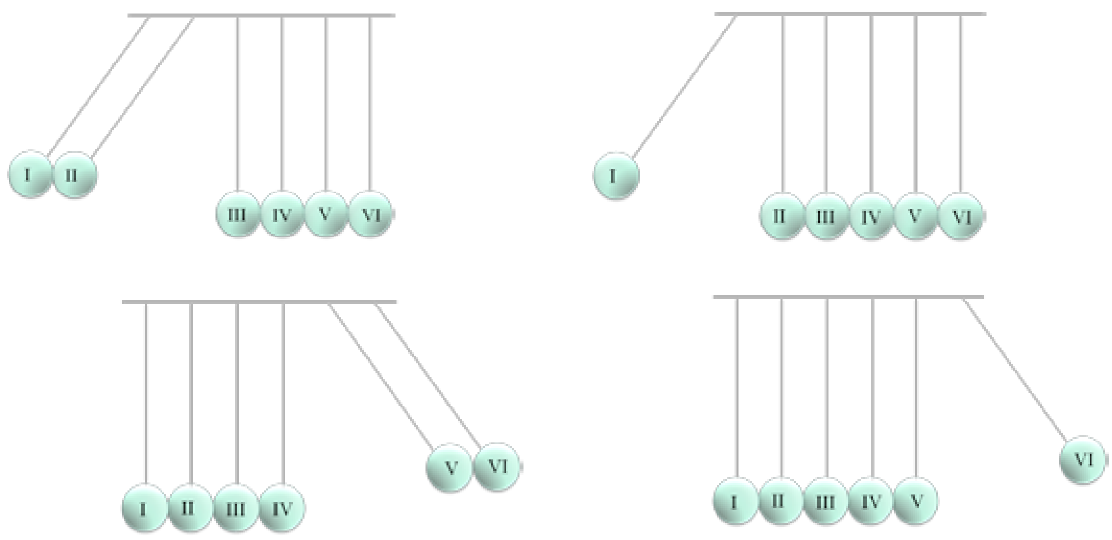
$$v_{11} = \frac{q-1}{q+1} v_{10} \quad (3)$$

$$v_{21} = \frac{2q}{q+1} v_{10} \quad (4)$$

שתי משוואות אלה מספרות את כל הסיפור. נדון כעת במספר מקרים.

כדור פוגע יחיד: זהו מקרה של התנגשות בין כדורים זהים, $q=1$. מיד קיבלנו $V_{11}=0, V_{21}=V_{10}$, כלומר: הכדור הפוגע נעצר, והנפגע יצא במהירות הכניסה של הפוגע. בסדרת ההתנגשויות בין כל כדור לזה שאחריו מתקבלת אותה תוצאה: הנפגע מקבל את מהירות הכניסה של הפוגע, וכך הלאה עד לכדור האחרון, אשר יוצא לדרך במהירות הכניסה של הראשון (איור 1א). מכאן הסימטריה המופלאה של המטוטלת.

פגיעה של שני כדורים ויותר: כאשר סדרה של שני כדורים פוגעת בשורת הכדורים ־ עד לפגיעה אין כוח הפועל בין שני הכדורים הפוגעים. הכדור הראשון (כדור II) פוגע ראשון ומתחיל את סדרת ההתנגשויות לאורך השורה, עד יציאת הכדור האחרון (כדור VI) במהירות יציאה השווה למהירות הכניסה של הכדור הראשון. מיד כשהכדור הראשון נעצר, פוגע בו מאחור הכדור השני בסדרה (כדור I) ומתחיל סדרת התנגשויות שנייה שבסיומה יוצא הכדור האחרון בשורה (כדור V) במהירות יציאה השווה למהירות הכניסה של הכדור הפוגע השני (כדור I). כיוון ששני הכדורים הפוגעים מגיעים באותה מהירות, וכיוון שההפרש בזמני הפגיעה שלהם קטן מאוד עד כדי כך שאיננו מבחינים בו, אנו צופים בזוג כדורים פוגע ולעומתו בזוג שיוצא (ראו איור 1ב). אותו תהליך קורה כאשר מספר הכדורים הפוגעים גדול משניים: למרות שמדובר בסדרה של התנגשויות המתרחשות זו אחר זו, אנו נבחין כי מספר הכדורים היוצאים מהשורה שווה למספר אלה הפוגעים בה.



ב: פגיעת שני כדורים
א: פגיעת כדור אחד

איור 1: מטוטלת של שורת כדורים אחידה

נשוב עתה לשאלתנו: מה אם **מסת הכדור הפוגע גדולה מזו של כל אחד מהכדורים בשורה?**

במקרה זה *q>1*

במפגש הראשון שאליו מגיע הכדור I במהירות V_{10} ופוגע בכדור II, מתנגש זה בבא אחריו בשורה ומעביר את התנע עד לאחרון בשורה (כדור VI) אשר יוצא במהירות V_{21}

$$v_{11} = \frac{q-1}{q+1} v_{10}; \ v_{21} = \frac{2q}{q+1} v_{10} \quad (5)$$

לאחר ההתנגשות הכדור הפוגע (כדור I), שמסתו גדולה יותר, אינו נעצר. הוא ממשיך בתנועה, במהירות פחותה של V_{11} ופוגע שנית בכדור II. הפעם מהירות היציאה (המשך התנועה) של כדור I היא V_{12}, וזו של הכדור הנפלט מהשורה (כדור V) היא V_{22}

$$v_{12} = \frac{q-1}{q+1} v_{11} = \left(\frac{q-1}{q+1}\right)^2 v_{10}; \quad v_{22} = \frac{q-1}{q+1} \frac{2q}{q+1} v_{10} \quad (6)$$

וכך בפעם ה-n (כל עוד יש לפחות n כדורים בשורה)

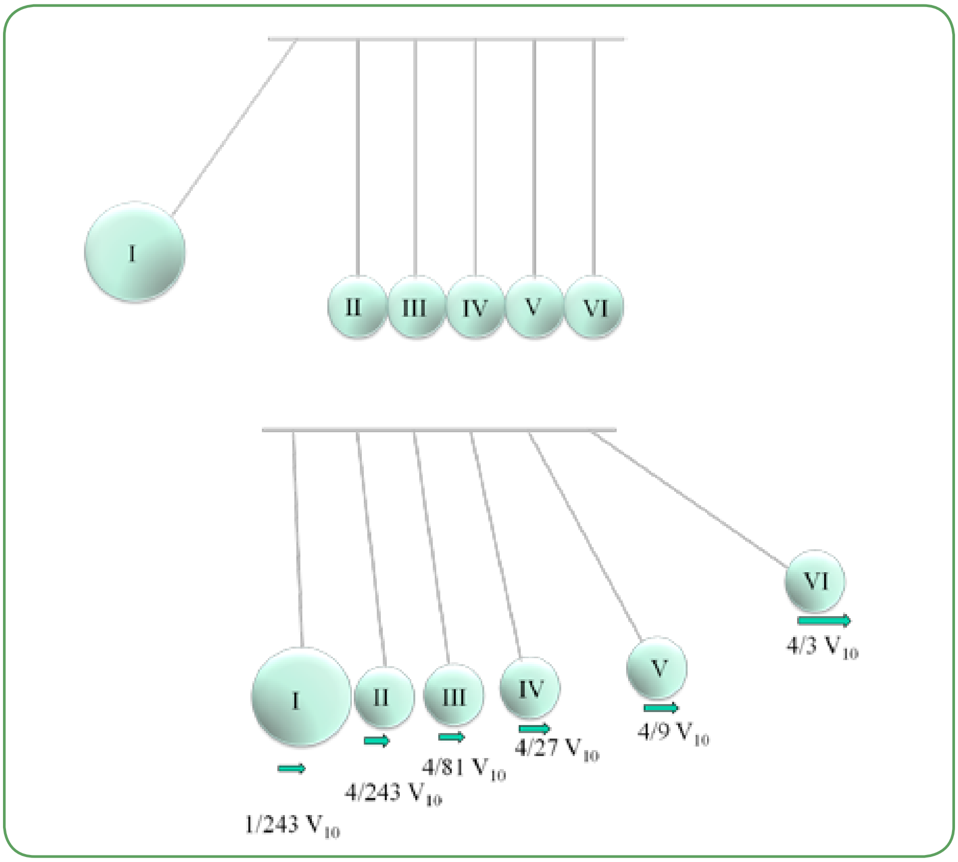
$$v_{1n} = \left(\frac{q-1}{q+1}\right)^n v_{10}; \ v_{2n} = \left(\frac{q-1}{q+1}\right)^{n-1} \frac{2q}{q+1} v_{10} \quad (7)$$

בכל התנגשות יוצא הכדור האחרון בשורה במהירות המתאימה לאותה התנגשות, v_{2i}. הסדרה v_{2i} היא טור גאומטרי. לפיכך נצפה בסדרת כדורים היוצאים כמניפה. עבור q=2, לדוגמה, לאחר הפגיעה המהירויות של הכדורים היוצאים מהשורה והמהירויות של כדור I לאחר הפגיעה יהיו לפי טבלה 1.

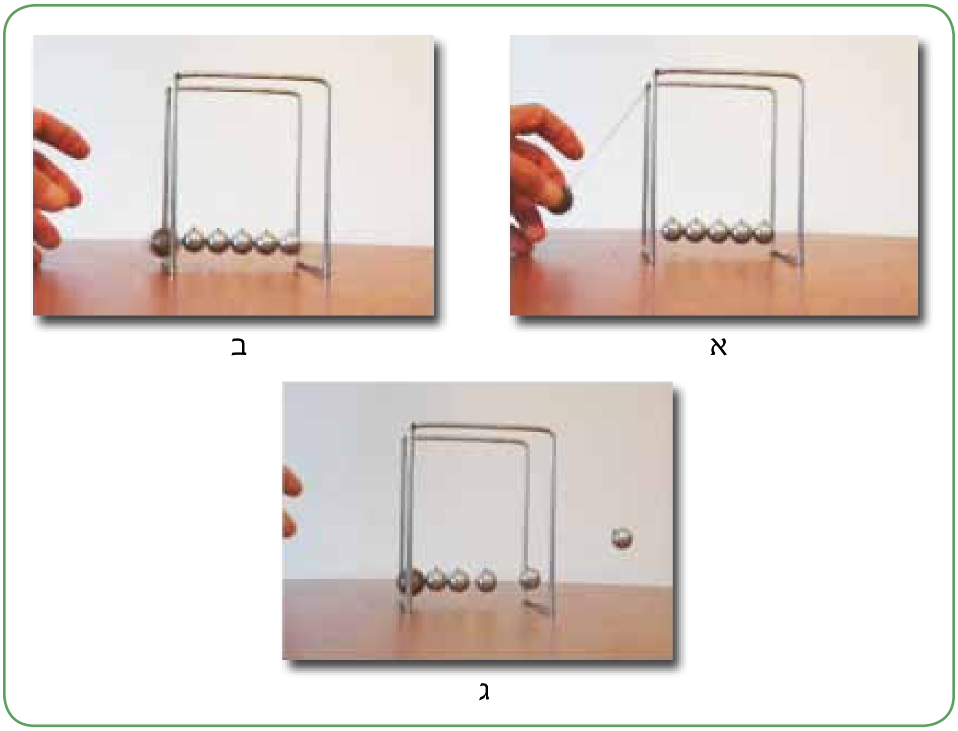
טבלה 1: מהירות היציאה של הכדור הפוגע וזו של הכדור היוצא מהשורה, בכל התנגשות

התנגשות מספר	1	2	3	4	5
מהירות כדור I יוצא \ v_{10}	1/3	1/9	1/27	1/81	1/243
מהירות כדור יוצא מהשורה \ v_{10}	4/3	4/9	4/27	4/81	4/243

סדרת התנגשויות אלה מתוארת באיור 2 ומצולמת באיור 3.



איור 2: כדור בעל מסה $2m$ *פוגע בשורת כדורים אחידה בעלי מסה* m

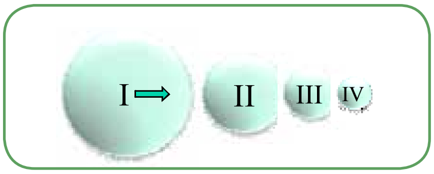


איור 3: הבזקים של התנגשות כדור גדול בשורת כדורים אחידה (התפתחות מ-א ל-ג)

מגבר מהירות

אם נסדר בשורה כדורים בעלי מסה יורדת לפי טור גאומטרי, נקבל "מגבר מהירות" [1]: מהירות היציאה של הכדור האחרון בשורה (מספר IV), לאחר שכדור מספר I התנגש בכדור הראשון בשורה (מספר II), גדולה פי M ממהירותו של אותו כדור לו התנגש בו ישירות כדור מס. I.

$$M = \frac{2^n(q^n+1)}{(q+1)^n} \qquad (8)$$



איור 4: התנגשות בשורת כדורים בעלי מסה יורדת בטור גאומטרי

כדי להבין זאת, נשוב למשוואה (5): כדור II שיצא במהירות v_{21} פוגע בכדור III. כיוון שהמסה של כדור III קטנה מזו של כדור II פי q, מהירות היציאה של כדור III, v_{31}, מתייחסת למהירות הכניסה של כדור II, v_{21}, כמו v_{21} ל- v_{11}

$$v_{31} = \frac{2q}{q+1}\left(\frac{2q}{q+1}v_{10}\right) = \left(\frac{2q}{q+1}\right)^2 v_{10} \qquad (9)$$

וכן הלאה. עבור סדרה של n כדורים תהיה מהירות היציאה של הכדור בקצה השורה

$$v_{n1} = \left(\frac{2q}{q+1}\right)^n v_{10} \qquad (10)$$

כלומר: קיבלנו מערכת שהיא "מגבר מהירות". בדיקה פשוטה מראה כי הגבר המהירות הוא גדול יותר מאשר בהתנגשות ישירה בין הכדור הפוגע לכדור האחרון (שיחס המסות ביניהם הוא q_n)[1]. הגבר מהירות זה מודגם בטבלה 2.

טבלה 2: מהירות היציאה של הכדור האחרון בשורת כדורים בעלי מסה יורדת בטור גאומטרי

מס. כדורים בשורה	1	2	3	4	התנגשות ישירה עם כדור IV
q=2 מהירות כדור יוצא מהשורה \ v_{10}	4/3	16/9	64/27	256/81	32/17
q=3 מהירות כדור יוצא מהשורה \ v_{10}	3/2	9/4	27/8	81/16	81/41

נדון עתה במקרה שבו מסת הכדור הפוגע קטנה מזו של כל אחד מיתר הכדורים בשורה: כאן q<1. הכדור הפוגע ניתר לאחור, ובקצה השורה יוצא כדור במהירות נמוכה מזו של הכדור הפוגע.

עבור q=1/2, לדוגמה, $v_{21}=2/3v_{10}$: $v_{11}=-1/3v_{10}$.

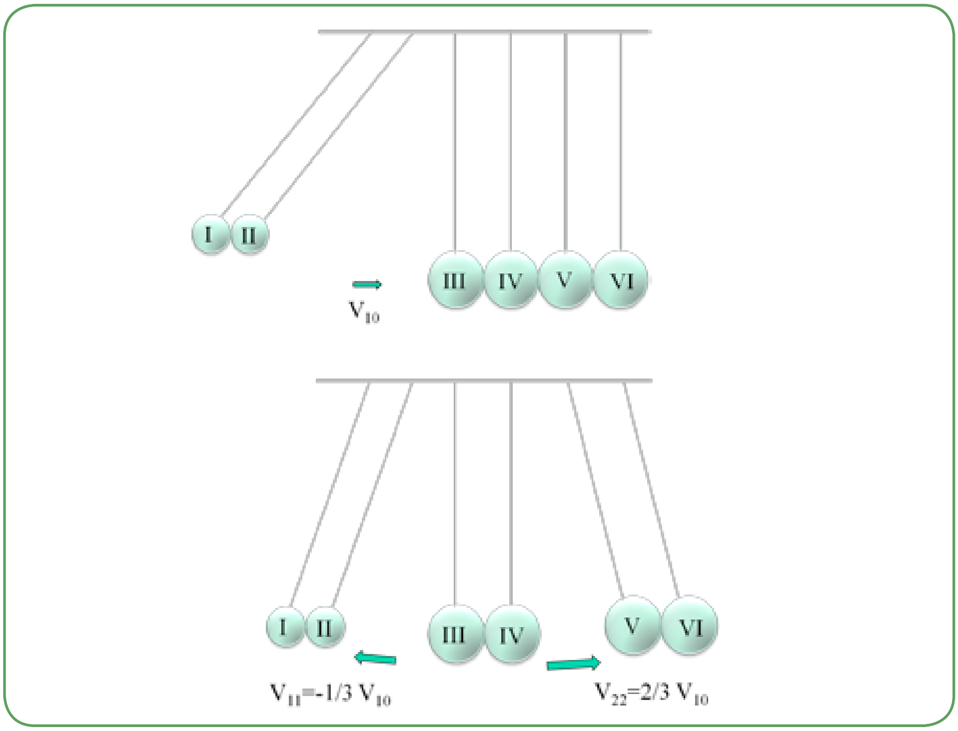
כאשר פוגעים שני כדורים, ניתרים שניהם לאחור, במהירות v22 (ראו נספח)

$$v_{22} = \frac{q-1}{q+1}v_{10} \qquad (11)$$

1 סדרת הכדורים מתאמת את מעבר האנרגיה הקינטית מהכדור הפוגע לכדור האחרון, בדומה לתיאום עכבות בקו תמסורת. מהירות הכדור היוצא גדולה יותר ככל שהתיאום רציף יותר, כלומר, ככל שמספר הכדורים בשורה גדל, עבור יחס נתון בין מסת הכדור הפוגע לזו של האחרון בשורה (q=constant).

בעוד שני הכדורים האחרונים בשורה יוצאים במהירות

$$v_{(n-1)3} = v_{n1} = \frac{2q}{q+1} v_{10} \quad (12)$$



איור 5: שני כדורים בעלי מסה m/2 פוגעים בשורת כדורים אחידה בעלי מסה m

לא סיימנו.

חשיבות השיהוי בין ההתנגשויות ותקפותו של המודל הנדון: לאורך כל התרחיש הנחנו סדרת התנגשויות המופיעות זו אחרי זו עם שיהוי זעיר ביניהן. נשאלות השאלות האלה:

1. ומה אם לא יהיה שיהוי בין ההתנגשויות?
2. ממה נובע השיהוי ?
3. מהי תקפות המודל?

ובכן ־ אם לא יהיה שיהוי בין ההתנגשויות ולא נוכל להפריד את התהליכים - אין לנו מספיק מידע כדי לנבא את התוצאות. הבעיה הופכת לבעיה לא ודאית [2]. חוסר שיהוי כרוך גם בהנחה הלא-פיזיקלית שלפיה כל הגופים הם גופים נקודתיים (חסרי מְמדים). (באין מידע מְמדי, תוצאות ההתנגשות במצבור של חלקיקים תת-אטומיים ניתנות רק לשערוך סטטיסטי).

כזכור, עסקנו עד כה בגופים כפי שהיו לפני ואחרי ההתנגשות ונמנענו מלעסוק בתהליך ההתנגשות. לצורך הבנת מקור השיהוי בין ההתנגשויות נתעמק עתה בתהליך ההתנגשות. נדון תחילה בהתנגשות בין שני גופים במערכת ייחוס של מרכז המסה של שניהם (איור 6א). שני גופים זהים מגיעים להתנגשות עם תנע $mv_{10}\backslash 2$ ו $-mv_{10}\backslash 2$, בהתאמה, ונעצרים

2 מודל זה מניח כי המקדם האלסטי k הוא קבוע במהלך הדחיסה. הנחה זו תקפה להתנגשות חד-מְמדית (גופים אחידים ובעלי חתך אחיד, ומגע על פני כל החתך. המגע בהתנגשות בין כדורים אלסטיים הוא על שטח קטן ומשתנה במהלך הדחיסה; משך המגע גדול יותר בערך פי 10^{-5}, והוא יידון בהמשך).

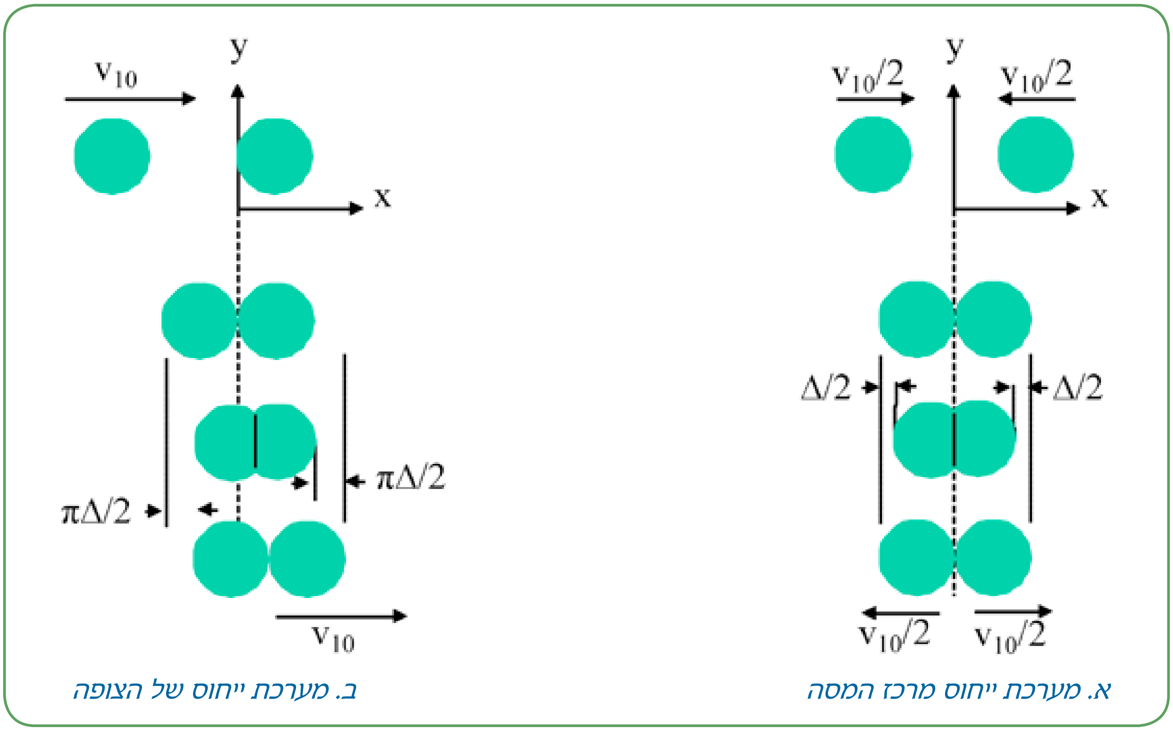
בשעה שהם מפעילים כוחות עצומים האחד כנגד ההתמדה של האחד. כוחות אלה דוחסים כל אחד מהגופים כדי $\Delta/2$. האנרגיה האלסטית שנאצרת במהלך הדחיסה - מאיצה אז את הגופים להיפרדות, כל אחד עם תנע $mv_{10}/2$, בכיוונים הפוכים. תהליך זה דומה לתנועה הרמונית פשוטה, אלא שהוא תקף למשך מחצית המחזור בלבד. נדמה את הכיווץ האלסטי של כל הגוף על ידי קפיץ בעל מקדם אלסטי k המחובר לגוף שמסתו m. קירוב זה יספיק לדיון הנוכחי. נשוב להבהירו מאוחר יותר.

זמן המחזור של אוסצילטור הרמוני, הבנוי מגוף בעל מסה m וקפיץ בעל מקדם אלסטי k, הוא

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} \quad (13)$$

תהליך ההתנגשות (איור 6א) הוא סימטרי, כך שכל גוף מתנגש לעומת מישור הסימטריה, וניתן לאפיינו כאוסצילטור הרמוני שמרכיביו m ו-k . מהלך ההתנגשות מהווה חצי מחזור של האוסצילטור, ממגע ועד להינתקות, ולכן משכו

$$\tau = \pi\sqrt{m/k} \quad (14)$$



איור 6: מהלך התנגשות בין שני כדורים (התפתחות התרחיש מלמעלה למטה)

לאחר שמצאנו את משך ההתנגשות, ומכאן את השיהוי המינימלי בין התנגשויות עוקבות - נחזור לחקור את תקפות המודל המניח התנגשויות בלתי תלויות. במערכת הייחוס של הצופה (איור 6ב) נעים הגופים המתנגשים יחד תוך התנגשות מרחק של $v_{10}\tau/2$, שהוא מרחק התנועה של מרכז המסה. אם אמנם הכדורים בשורה מצויים במגע בעת מנוחה - כי אז משמעות תזוזה זו היא פעולה של הכדור הנפגע על זה שאחריו בשורה עוד בטרם הסתיימה ההתנגשות, כך שיש תלות בין ההתנגשויות.

היכן אנחנו, אם כן? הבה נעריך את גודל התזוזה ונשווה אותו עם מרחקים זעירים שעשויים להיות בין הכדורים בכל מקרה (עקב אבק, חספוס משטח וכו'). נשווה את האנרגיה הקינטית לפני ההתנגשות עם זו האלסטית ברגע שיא הדחיסה (בהנחה שההתנגשות אלסטית לחלוטין) (איור 6א).

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_{10}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \quad (15)$$

כאשר $\Delta/2$ הוא מרחק הדחיסה המקסימלי של הגוף.

תזוזת הגופים במהלך ההתנגשות (איור 6ב) היא

$$\text{תזוזה}=\frac{v_{10}}{2}\tau=\frac{v_{10}}{2}\pi\sqrt{m/k}=\frac{\Delta}{2}\sqrt{k/m}\,\pi\sqrt{m/k}=\pi\frac{\Delta}{2} \quad (16)$$

אומדן התזוזה עבור כדור פלדה במטוטלת הצעצוע הוא כ-10 מיקרון - מרחק זניח אמנם המאפשר ניתוח על פי המודל של התנגשויות בלתי תלויות (והזנחת תנודות שיוריות של הכדורים בשורה כ"שגיאות התקנה" של המטוטלת).

ניתן אם כן להסיק כי המודל ישים לגופים קשיחים, למהירות התנגשות סבירה ולמרחקים בין הכדורים הגדולים ממרחק התזוזה במהלך התנגשות. האם הוא נכון גם להתנגשויות רכות יותר ולמהירות התנגשות גדולה? - נראה שלא. נבחן לדוגמה התנגשות בין שתי רכבות. בכל רכבת מותקנים קפיצים בין הקרונות כדי לרכך התנגשות בעת תחילת נסיעה או בעצירה. קשיחות קפיצים אלה נבחרה, בהתחשב במסה של הקרונות, ליצירת משך התנגשות של שנייה עד שתי שניות (לנוחות הנוסעים). כאשר שתי רכבות מתנגשות במהירות יחסית של 50 מ'/ש', תזוזת הקרון בהתנגשות היא 100 מ'. סדרת ההתנגשויות בין הקרונות אינה בלתי תלויה אם כן.

נדגים זאת על המטוטלת שלנו. לצורך זה נחליף את כדור II בכדור רך (איור 7, שם משמש מחק גומי במקום הכדור). ההתנגשות בין כדור הפלדה לכדור גומי מיוצגת על ידי 2 קפיצים בעלי מקדמים k_1, k_2 בהתאמה, כך שהמקדם המשוקלל של שני אלה בטור הוא:

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}=\frac{k_2}{1+k_2/k_1} \quad (17)$$

שהוא קטן פי 10^4 מ k_1, ומשך ההתנגשות גדל פי 100, בהתאמה. התזוזה הגדולה במהלך ההתנגשות גורמת לכדור II להכות בכדור הבא בשורה תוך כדי התנגשותו עם כדור I. המִתקף של ההתנגשות הרכה נפרש על זמן ארוך (פי 100 ממשך התנגשות בין כדורי פלדה), והכוח האלסטי המקסימלי קטן בהתאם. הדחיסה של כדורי הפלדה לאורך השורה היא זניחה, ושחרורה אינו גורם ליציאת כדור מהשורה. יתרה מכך, כוח הפועל על גוף תורם לדחיסתו במשך המחצית הראשונה של מהלך ההתנגשות (רבע ממחזור תנועה הרמונית), $\tau/2$, ובולם את שחרור האנרגיה האלסטית במשך המחצית השנייה, כך שלא משתחרר כוח אלסטי להפרדת הכדורים. המִתקף הארוך של כדור הגומי מאיץ את כל שורת הכדורים ברכות, כפי שמראה איור 7.

איור 7 : כדור גדול פוגע בשורת כדורים אחידה, פרט לכדור הראשון בשורה, שהמקדם האלסטי שלו קטן (כדור "רך"). הכדור הרך מיוצג על ידי מחק גמיש. התפתחות התרחיש מימין לשמאל

עריסת ניוטון

"מטוטלת המנהלים" נמכרת כצעצוע פופולרי החל משנות ה-60 של המאה ה-20. שמה המקורי היה "עריסת ניוטון", אך היא זכתה לשמות רבים. מתקן המטוטלת רבת הכדורים נבנה לראשונה בתקופתו של ניוטון, כמתקן מדעי להוכחת שימור התנע, על ידי Willem Jacob's Gravesande, אשר נחשב גם למי שהניח את היסודות ללימוד הפיזיקה [3]. אותו מדען ידוע בניסוי המפורסם לאימות נוסחת האנרגיה הקינטית: הוא הפיל כדורי נחושת על גוש חימר מגבהים שונים, וקיבל כי עומק הגומה שנוצרה מתייחס ישירות לגובה הנפילה (ולריבוע המהירות). מאותה עת ממשיכה התלבטות החוקרים בפיענוח המטוטלת. Chapman [4] ניתח ב-1960 את הדינמיקה של מערכת מסות-קפיצים צמודות, הראה כי יש תנועה שיורית של הכדורים בשורה, אף כי קטנה, וזיהה אותה כבעיית התבדרות גל האנרגיה המתפשט לאורך השורה (דיספרסיה). Herrmann [5,6] ניתח את הדיספרסיה כפונקציה של מנגנון ההתנגשות בין הכדורים. [7,8] הם מאמרי סקירה ברמות שונות.

נשוב אם כן לתכונות האלסטיות של החומר ולמנגנון ההתנגשות. נבחן התנגשות צירית בין שני גלילים, כך שהמגע מתרחש על פני כל שטח החתך של כל גליל. הצבנו קפיץ מיצג בעל מקדם אלסטי k לייצוג האלסטיות של הגוף כולו. הדחיסה האלסטית של גוף תחת לחץ ניתנת לביטוי כמותי על ידי מודול יאנג:

$$\mathrm{E}[Paskal] = \frac{\mathrm{F}/\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{L}/\mathrm{L}}\,[Newton/m^2]$$

שבו Paskal היא יחידה למדידת לחץ, A הוא שטח החתך שעליו הכוח פועל, L הוא אורך הגוף ו-ΔL הוא מידת הדחיסה (או המתיחה)[3]. מקדם הקפיץ האקוויולנטי הוא, אם כן:

$$\mathrm{K} = E\,\frac{A}{L} \quad (18)$$

ההנחה בבסיס הייצוג על ידי הקפיץ היא כי הדחיסה היא אחידה לאורך הגוף וקורית בו-זמנית לאורכו. זה כמובן קירוב של דחיסה סטטית. תגובת גופים פיזיקליים מתאחרת בהתאם למהירות הסופית של התפשטות גל הלחץ האלסטי

3 בנוסף לכיווץ או התארכות אורכית תחת כוח צירי משתנים גם המְמדים הרוחביים של הגוף. היחס שבין השינוי הרוחבי לאורכי נתון על ידי מקדם פואסון, וערכו עבור פלדה הוא כ-0.3. לטובת הפשטות לא נכללת בדיון כאן התלות במקדם זה, וממילא אין לכך השפעה רבה על הדיוק.

לאורכם. מהירות הגל האלסטי, v_c, (שהיא מהירות הקול בחומר), תלויה בצפיפות החומר (מסה ליחידת נפח) ρ ומקדם האלסטיות שלו (מודול יאנג):

$$v_c = \sqrt{E/\rho} \quad (19)$$

מהירות הקול בפלדה, לדוגמה, היא כ-5000 מ'/ש'.

עתה נבטא את משך ההתנגשות במונחים אלה

$$\tau = \pi\sqrt{m/K} = \pi\sqrt{\rho V/\left(\frac{EA}{L}\right)} = \pi\sqrt{\rho/E}\sqrt{LV/A} = \pi\frac{L}{v_c} \quad (20)$$

כאן V הוא נפח הגוף. משך ההתנגשות τ הוא מחצית המחזור של אוסצילטור הרמוני, והוא מתייחס למהירות הגל v ולאורך הגל λ $2\tau v = \lambda$

אורך הגוף, במונחים של אורך גל, הוא

$$L = \lambda/_{2\pi} \quad (21)$$

שהוא כשישית אורך גל. דבר זה מבהיר את טיב הקירוב על ידי קפיץ מקומי של התהליך המבוזר (התפשטות הגל במהלך התנגשות של שני גופים בעלי חתך אחיד (גלילים, לדוגמה). גל הלחץ הנוצר עם המגע מתפשט לאורך הגוף[4] ומוחזר מהקצה החופשי, בשעה שהוא מביא אותו לתנועה. התנתקות נוצרת כאשר שיא הגל המוחזר הגיע לנקודת המגע והניע את המסה.

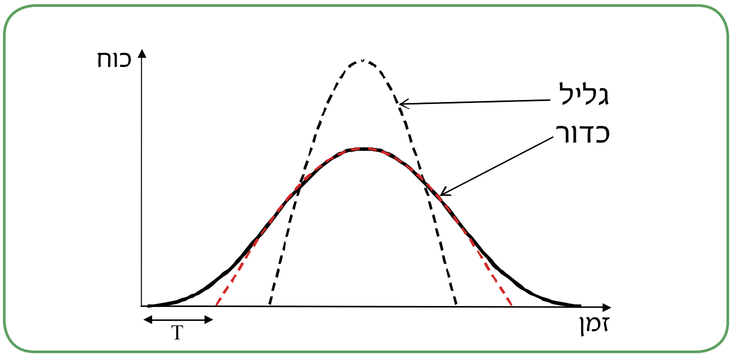
תהליך ההתנגשות של כדור הוא שונה: ברגע המגע שטח המגע הוא אפסי, אך גדל במהירות אגב יצירת אזור מגע קטן שבו מרוכז לחץ עצום. הלחץ במרבית המסה של הכדור הוא אפסי לעומת זה שבאזור המגע, כך שניתן לתאר את התהליך באמצעות קפיץ שווה-ערך באזור המגע ומסת הכדור שתפקידה אינרציאלי. תהליך זה נותח על ידי Heinrich Hertz (1882) [9] אשר אפיין את כוח הדחיסה

$$F = Kx^{3/2}\ ; K \propto E\sqrt{R} \quad (22)$$

שבו x הוא הדחיסה הצירית, E מודול יאנג ו-R רדיוס הכדור (זאת לעומת חוק הוק שבו יחס הדחיסה לינארי). כתוצאה מכך משך ההתנגשות גדול בערך פי 5 עד 10 מזה המחושב להתנגשות חזיתית של גליל באותו אורך ומסה, ותלוי באופן חלש במהירות ההתנגשות.

איור 8 מבהיר את השוני בהתפתחות הכוח לאורך זמן בעת התנגשות חזיתית (כגון התנגשות צירית של גליל) לבין התנגשות של כדור. הראשונה היא תנועה הרמונית, והתפתחות הכוח היא לפי $Sin\left(t\sqrt{K/_m}\right)$, ואילו בכדור מקדם הכוח אינו לינארי, והכוח גדל לאט בתחילה, כששטח המגע קטן. העקום המקווקו אדום הוא עקום סינוס המראה מתאם של מהלך הכוח בהמשך ההתנגשות למודל תנועה הרמונית. הערכה מקורבת של מהלך הכוח לעקום האדום מותירה זמן שיהוי T אשר עשוי להסביר מדוע כמעט שאין תנועה בשורת הכדורים למרות המגע ביניהם [6].

4 גל הלחץ האורכי גורם אמנם להתרחבות מקומית קטנה המתקדמת עם גל הלחץ, אך השפעתה של התרחבות זו על מהירות הגל האורכי זניחה בגופים קשיחים.



איור 7: מהלך הכוח בהתנגשות בין גלילים ובהתנגשות בין כדורים

התבוננות על שורת הכדורים כמערכת תמסורת מחזורית התומכת בגלים המתפשטים לאורכה מביאה תובנות חדשות: למערכת כזו של מסות וקפיצים יש מספר תדרי תהודה עצמית, והיא תומכת בגל שמהירותו קטנה בהרבה ממהירות הקול בחומר. המערכת דיספרסיבית, כלומר: מהירות הגל (מהירות הפזה) משתנה עם התדר, ולכן גל האנרגיה, הנע במהירות החבורה (אותו גל שצריך להעביר את האנרגיה לכדור האחרון), מתבדר (במקצת), וכדורים מתנתקים זה מזה לאורך השורה. בגלל מהלך הכוח בהתנגשות בין הכדורים - הדיספרסיביות במטוטלת זו קטנה יותר מאשר במערך של שורת גלילים.

לסיכום

במסענו חיפשנו את חוקי השימור במטוטלת הצעצוע ומצאנו הסבר בהוספת תנאי של רווח קטן בין הכדורים, דבר שאפשר ניתוח וחיזוי התנהגות הרמונית עם מערך כדורים זהים, תופעות של התפרסות השורה כשהסימטריה נפגמת, ואף מגבר מהירות במערך כדורים שגודלם משתנה לפי סדרה גאומטרית. שבנו לבחון את הצורך בשיהוי, להיווכח כי בלעדיו אין תשובה ודאית. בחינה מעמיקה יותר הראתה כי למעשה יש תנועה בין הכדורים בשורה, ושבנו לבחון את המנגנון כדי לגלות מבנה מחזורי התומך בגל אִטי ודיספרסיבי.

התחלנו דרכנו עם צעצוע ומצאנו עצמנו עוברים מסע מרתק דרך תופעות מהותיות בפיזיקה, מסע המשקף את תהליך הגילוי המדעי נדבך אחרי נדבך.

מקורות

1. J. D. Kerwin: Velocity, Momentum, and Energy Transmissions in Chain Collisions, AJP 40, 1152-1157 (1972).
2. D. Gale: An indeterminate Problem in Classical Mechanics, American Mathematical Monthly, Vol. LIX, No.5, May 1952.
3. J. D. Gavenda and J. R. Edington: Newton's Cradle and Scientific Explanation, TPT, 35, 411-417 (Oct 1997).
4. S. Chapman: Misconception Concerning the Dynamics of the Impact Ball Apparatus, AJP 28, 705-711 (1960).
5. L. Flansburg and K. Hudnut: Dynamic solutions for linear elastic collisions, AJP 47, 911-914 (1979).
6. F. Herrmann and P. Schmalzle: Simple explanation of a well-known collision experiment, AJP 49, 761-764 (1981).
7. F. Herrman and M. Seitz: How does the ball-chain work?, AJP 50, 977-981 (1982).
8. Donald Simanek: Newton's Cradle, http://www.lhup.edu/~dsimanek/scenario/cradle.htm
9. W.J. Stronge: Impact mechanics, Cambridge University Press (2000).

נספח: פגיעת סדרת שני כדורים, q<1

כדורים I, II מגיעים אל השורה במהירויות v_{10} ,$v_{20}=v_{10}$ בהתאמה. (האינדקס הראשון מציין את מספר הכדור, והשני - את מספר ההתנגשות).

ביציאה מההתנגשות הראשונה של כדור II עם הכדור הראשון בשורה (כדור III) מהירותו

$$v_{21}=\frac{q-1}{q+1}v_{20}$$

לצורך פשטות הביטויים נייחס להלן את כל הגדלים למהירות ההתחלתית v_{10}. נסמן על כן

$$u\equiv {}^{v}/_{v_{10}}$$

כדור II שניתר חזרה מתנגש עם כדור I. שימור התנע בהתנגשות בין כדור II לכדור I:

$$u_{10}+u_{21}=u_{12}+u_{22}=\frac{q-1}{q+1}+1=\frac{2q}{q+1}$$

ההתנגשות האלסטית והאנרגיה הקינטית נשמרת. לכן

$$u_{10}{}^{2}+u_{21}{}^{2}=u_{12}{}^{2}+u_{22}{}^{2}=\left(\frac{q-1}{q+1}\right)^{2}+1=u_{22}{}^{2}+\left(\frac{q-1}{q+1}+1-u_{22}\right)^{2}$$

$$2u_{22}{}^{2}+\left(\frac{q-1}{q+1}+1\right)\left(\frac{q-1}{q+1}+1-2u_{22}\right)-\left(\frac{q-1}{q+1}+1\right)\left(\frac{q-1}{q+1}-1\right)-2=0$$

משוואה ריבועית זו תקפה גם ל-u_{12}, שערכה יהיה שלילי (ניתור לאחור), וגם ל-u_{22}, שערכה יהיה חיובי.

$$2(u_{22}{}^{2}-1)+\left(\frac{q-1}{q+1}+1\right)\left(\frac{q-1}{q+1}+1-2u_{22}-\frac{q-1}{q+1}+1\right)=0$$

$$(u_{22}+1)(u_{22}-1)-\left(\frac{q-1}{q+1}+1\right)(u_{22}-1)=0$$

$$(u_{22}-1)\left(u_{22}-\frac{q-1}{q+1}\right)=0$$

כדור II חוזר ומכה בשורה באותה מהירות תחילית ($u_{22}=u_{20}=1$), וכך יוצאים מסוף השורה שני כדורים במהירות

$$u_{(n-1)3}=u_{n1}=\frac{2q}{q+1}\quad =\gg\quad v_{(n-1)3}=v_{n1}=\frac{2q}{q+1}v_{10}$$

הפתרון השני של המשוואה ישים לכדור I אשר מנתר לאחור במהירות

$$u_{12}=\frac{q-1}{q+1}\quad =\gg v_{12}=\frac{q-1}{q+1}v_{10}$$

כדור II מנתר מההתנגשות השנייה עם כדור III באותה מהירות $v_{21}=v_{23}$, וכך מנתרים שני הכדורים הפוגעים לאחור ביחד.