מעגל תהודה מכני

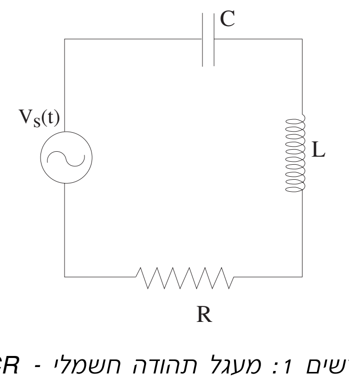
חיים דנינו, אולפנא עירונית "אמונה", בני ברק

מבוא

לתלמידים רבים מוכרת תופעת התהודה (רזוננס) במעגל תנודה חשמלי; תופעת התהודה במערכת מיכנית מוכרת הרבה פחות. במאמר זה מתוארים ניסויים אחדים המבוצעים עם מערכת מיכנית, שמטרתם להראות את ההקבלה בין תופעת התהודה בשתי המערכות. המערכת המיכנית ממחישה את מה שקורה במערכת החשמלית, וכן מאפשרת להשתמש בפיתוח המתימטי הידוע מן המערכת החשמלית כדי לפתור את המשוואה המתארת את המערכת המיכנית.

מוצעת כאן מערכת מיכנית הכוללת אלמנטים המקבילים למקור מתח חילופין, קבל, סליל ונגד במעגל זרם חילופין טורי.

במעגל זרם חילופין הכולל קבל, סליל ונגד המחוברים בטור למקור מתח חילופין (תרשים 1) שהתדר שלו ω: $V_S(t) = V_0 \sin\omega t$. הזרם במעגל משתנה בתדר זה, (לאחר שהוא מתייצב). הפתרון לזרם הוא: $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$, שמשמעותו שתדירות הזרם זהה לתדירות המקור המאלץ, אבל זרם זה הוא בהפרש פאזה למקור המאלץ. הפרש הפאזה תלוי בתגובת המערכת למקור המאלץ.



תרשים 1: מעגל תהודה חשמלי - LCR

מחוקי קירכהוף נובע כי מתח המקור בכל רגע שווה לסכום המתחים על האלמנטים במעגל. כלומר:

$$V_S(t) = V_C(t) + V_L(t) + V_R(t) \qquad (1)$$

$$V_0 \sin\omega t = \frac{Q(t)}{C} + L\frac{dI(t)}{dt} + I(t)R \qquad (2)$$

מציבים במשוואה (2): $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$ וכן $Q(t) = -\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t - \varphi)$, ומקבלים:

$$V_0 \sin\omega t = -\frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t - \varphi) + I_0\omega L\cos(\omega t - \varphi) + I_0 R\sin(\omega t - \varphi) \qquad (3)$$

משוואה זו נכונה לכל זמן t ולכן אפשר להציב t_1 המקיים $\omega t_1 - \varphi = 0$, במשוואה (3) ומקבלים:

$$V_0 \sin\varphi = -\frac{I_0}{\omega C} + I_0\omega L \qquad (4)$$

ועבור t_2 המקיים $\omega t_2 - \varphi = \frac{\pi}{2}$ מקבלים:

$$V_0 \cos\varphi = I_0 R \qquad (5)$$

חלוקת המשוואות (4) ו (5) זו בזו נותנת:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \qquad (6)$$

חיבור ריבועי המשוואות (4) ו (5) נותן:

$$V_0^2 = I_0^2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right] \qquad (7)$$

שמהן אפשר לקבל את I_0:

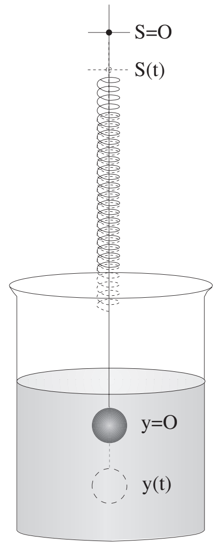
$$I_0 = \frac{V_0}{Z} \qquad (\text{7א})$$

כאשר

$$Z = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

המערכת המכנית

המערכת המכנית המקבילה למעגל זה מתוארת להלן (תרשים 2):



תרשים 2: המערכת המכנית

כדור בעל מסה M ורדיוס r שקוע בתוך נוזל צמיג (שמן מכונות) שצמיגותו $\eta = 5$ poise, וקשור לקפיץ שקצהו העליון מנודנד על ידי מנוע מאלץ לפי: $S(t) = A\sin \omega t$
נסמן את מקום הכדור, ברגע $t = 0$, במצב שיווי משקל ב-$y = 0$, כלומר במצב זה סכום הכוחות הפועלים על הגוף הוא 0, כלומר:

$$kd + \rho Ng - mg = 0 \qquad (8א)$$

כאשר:

- d התארכות הקפיץ ממצב רפוי.
- k קבוע הקפיץ.
- N נפח הכדור
- ρ צפיפות הנוזל
- ρNg כוח העילוי שהנוזל מפעיל על הכדור (כלפי מעלה)
- mg כוח הכובד הפועל על הכדור (כלפי מטה)

נניח שבזמן t הכדור נמצא ב $y(t)$ כאשר y נמדד כלפי מעלה ממצב שיווי משקל (תחילת התנועה כלפי מעלה), ולכן הקפיץ מתוח במצב זה ב $d + A\sin\omega t - y(t)$. הכוחות הפועלים על הכדור ברגע זה הם:

$$k(d + A\sin\omega t - y(t)) - \alpha\frac{dy}{dt} + \rho Ng - mg = ma \qquad (8ב)$$

(8ב) היא משוואת התנועה של הכדור, כלומר יישום החוק השני של ניוטון.

הקבלה בין המערכת החשמלית והמכנית

הביטוי הראשון במשוואת התנועה הוא הכוח שהקפיץ מפעיל על הכדור כלפי מעלה. הביטוי $-\alpha v = -\alpha\frac{dy}{dt}$ הוא כוח החיכוך המופעל על הכדור על ידי הנוזל בגלל צמיגותו, כאשר α הוא מקדם התלוי בצמיגות. קיים: $\alpha = 6\pi\eta r$.

נעביר אגפים ונקבל:

$$kd + \rho Ng - mg + kA\sin\omega t = ky(t)) + \alpha\frac{dy}{dt} + ma \qquad (9)$$

ולפי (8א) מקבלים:

$$kA\sin\omega t = ky(t) + \alpha\frac{dy}{dt} + m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (10)$$

במשוואה זו y מקביל ל Q ב (2) במעגל זרם חילופין, כאשר הצבנו בה: $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$

$$V_0\sin\omega t = \frac{Q(t)}{C} + R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2} \qquad (11)$$

ולכן קיימת גם הקבלה בין הפתרונות.

הקבלה זו אינה מתמטית בלבד, אלא ישנה הקבלה גם בתכונות של האלמנטים השונים במעגל, כפי שמתואר במסגרת.

מערכת מכנית	מעגל חשמלי
כח מאלץ $F = kA\sin\omega t$	מתח מקור מאלץ $V = V_0\sin\omega t$
(i) כח הפרופורציוני למעתק $ky(t)$	המתח על הקבל פרופורציוני למטען: $\frac{Q(t)}{C}$
(ii) כח החיכוך של הנוזל: $\alpha\frac{dy}{dt}$	המתח על הנגד $R\frac{dQ}{dt}$
(iii) כח "התנגדות" המסה לשינוי במהירותה: $m\frac{d^2y}{dt^2}$	המתח על הסליל המתבטא בהתנגדות לשינוי בזרם בו $L\frac{d^2Q}{dt^2}$

(i) התנהגות הקפיץ במעגל המיכני שהכוח עליו פרופורציוני למידת הסטייה ממצב שיווי המשקל דומה להתנהגות הקבל במעגל החשמלי שהמתח עליו פרופורציוני למטען בו הוא טעון. הקפיץ "אדיש" לשינויים מהירים בקצהו, והקבל "אדיש" לשינויים מהירים במטען בו הוא טעון. כאשר מותחים קצה אחד של הקפיץ במהירות קבועה, מפעיל הקפיץ כוח ההולך וגדל בקצהו השני. כאשר זרם קבוע טוען את הקבל המתח בין קצותיו הולך וגדל.

(ii) הנוזל מפעיל כוח חיכוך על הכדור, הפרופורציוני למהירות הכדור בתוכו. בגלל צמיגות הנוזל האנרגיה הופכת לחום בהספק של: $\overline{P} = \overline{F \cdot v}$, ובמקביל נוצר על הנגד מתח הפרופורציוני לזרם. האנרגיה הופכת לחום בנגד בהספק של: $\overline{P} = \overline{I \cdot V} = \frac{1}{2} I^2 R$

(iii) המסה "אדישה" להיותה נעה במהירות קבועה והסליל "אדיש" לזרם קבוע דרכו. המסה "מתנגדת" לשינויים במהירותה וכוח ההתנגדות מתבטא בביטוי $F = m\frac{dv}{dt}$.

על הסליל יש מתח נגדי הפרופורציוני לשינוי בזרם דרכו כלומר "מתנגד" לשינויים בזרם דרכו.

הפתרון למקום המסה $y(t)$ של המשוואה מקביל אם כן לפתרון עבור $Q(t)$ במשוואה (11). ומכאן שבמערכת המכנית נציע כפיתרון (ראה משוואות (3) עד (7) במעגל החשמלי):

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t - \varphi)$$

$$v_0 = \frac{kA}{Z_m}$$

כאשר v_0 המהירות המקסימלית של הכדור, והגדרנו את Z_m:

$$Z_m = \left[\alpha^2 + \left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ומכאן שנקבל את המשרעת S של התנודה העמידה של הכדור שמסתו m:

$$S = \frac{v_0}{\omega} = \frac{kA}{\omega Z_m} = \frac{kA}{\left[\alpha^2\omega^2 + (m\omega^2 - k)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

הפרש הפאזה

במעגל החשמלי הפרש הפאזה φ (נוסחה 6) הוא בין הזרם במעגל לבין המתח של המקור. במעגל המכני הפרש הפאזה נתון על ידי:

$$tg\varphi = \frac{\omega m - \frac{k}{\omega}}{\alpha}$$

הפרש הפאזה בין התנודה של המסה m לבין הכוח המאלץ מקבילה להפרש הפאזה שבין המטען לבין מתח המקור במעגל החשמלי.

כלומר: $V(t) = V_0 \sin\omega t$

$$Q(t) = \frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t - \varphi) = \frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})$$

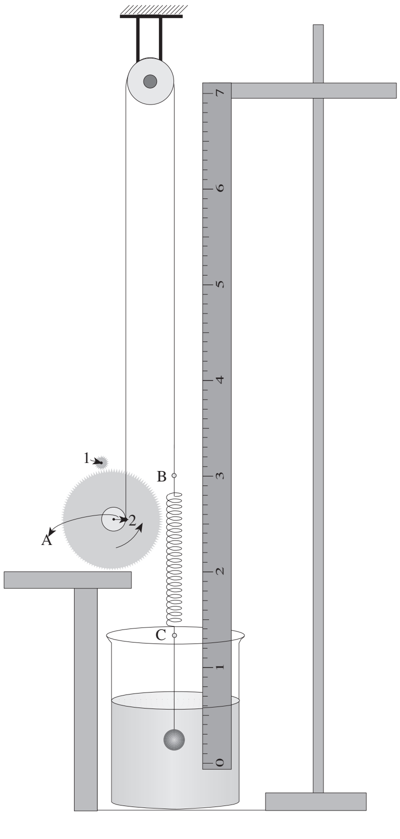
ובמעגל המכני: $F(t) = kA \sin\omega t$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t - \varphi) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})$$

זאת אומרת שהפרש הפאזה בין הכוח המאלץ לבין התנודה של m הוא $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

המערכת הניסויית

בתרשים 3 מופיע ציור סכימטי של המערכת הניסויית.



תרשים 3: מערכת הניסוי:

1. ציר הסיבוב של המקדחה

2. וו הנמצא במרחק A ממרכז הסיבוב (המשרעת של תנודת המאלץ). לוו קשור חוט ניילון העובר דרך גלגילה וקשור בקצהו השני לקצה העליון של הקפיץ B.

כמתנד מאלץ בעל תדירות משתנה לקחנו מקדחה חשמלית שלה תדירות סיבוב התלויה בעומק הלחיצה על מתג

ההפעלה, בתוספת מערכת תמסורת. מטרת מערכת התמסורת (גיר) שבמערך הניסויי היא להקטין את התדירות של המאלץ כך שתהיה בסביבות התדירות העצמית של המערכת, שהיא כשני מחזורים בשניה.

המשרעת של תנודת המאלץ ניתנת לפי המרחק מציר הסיבוב של הגלגל הגדול. הגוף המתנדנד נבחר להיות גולה שמסתה $m = 35g$ ורדיוסה $r \approx 1cm$. (התנגדות השמן לתנועת הכדור בו ניתנת לחישוב). קבוע הקפיץ המתנודד הוא: $k = 6.5\frac{N}{m}$.

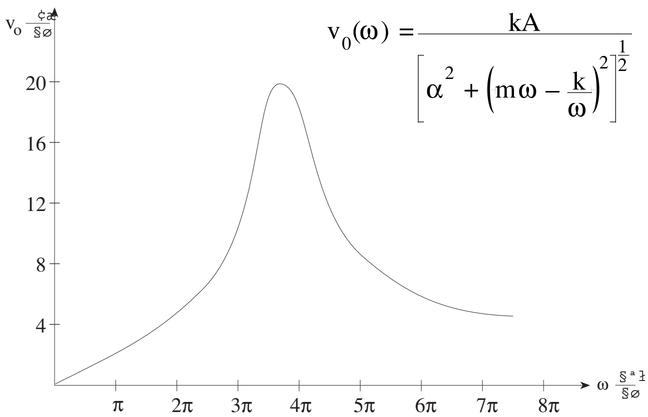
תיאור הניסויים

1. המשרעת S כפונקציה של תדירות המאלץ וגורם האיכות.

משנים את תדירות המאלץ סביב תדירות התהודה של המערכת $0.5s^{-1} < f < 5s^{-1}$ (כעשר תדירויות שונות בתחום זה) ומודדים בכל פעם את המשרעת של הגולה בתוך השמן.

הערה: יש להמתין מספר שניות להתיצבות המערכת בתדירות המאלץ עד שהשפעת הטרנזיאנט נעלמת. תופעה דומה יש גם במעגל החשמלי, אך שם זמן הרלקסציה הוא קצר ביותר.

בתרשים 4 מתואר גרף של המהירות המקסימלית כפונקציה של תדירות המאלץ. הגרף מקביל לגרף הזרם כפונקציה של תדירות המקור במעגל LCR אותו מכירים התלמידים. את המהירות המקסימלית מקבלים על-ידי הכפלת התדירות הזוויתית במשרעת.



תרשים 4: גרף המהירות המקסימלית כפונקציה של התדירות הזוויתית של המאלץ.

2. הפרש הפאזה כפונקציה של תדירות המאלץ.

כאמור הפרש הפאזה בין התנודה של המקור לתנודת הגולה בנוזל הוא $\varphi + \frac{\pi}{2}$ כאשר φ, הפרש הפאזה בין תנודת המקור $A\sin\omega t$ למהירות הגולה בנוזל, (מקביל למתח וזרם במעגל זרם החילופין) נתונה בקשר:

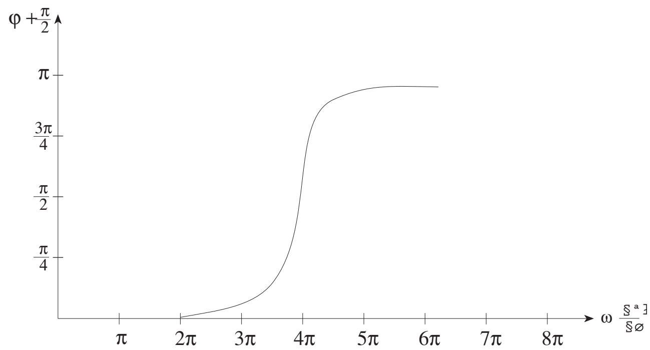
$$tg\varphi = \frac{\omega m - \frac{k}{\omega}}{\alpha} = \frac{m\omega}{\alpha}\left[1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right]$$

כאשר $\omega >> \omega_r$ $\quad \varphi \to \frac{\pi}{2}$ $\quad \varphi + \frac{\pi}{2} \to \pi$

וכאשר $\omega << \omega_r$ $\quad \varphi \to -\frac{\pi}{2}$ $\quad \varphi + \frac{\pi}{2} \to 0$

כאשר ω_r הוא תדירות התהודה. (תרשים 5)

כדי למדוד את הפרש הפאזה בין המקור לתגובת הגולה בנוזל, יש להסתכל על התנודה של הנקודה העליונה של הקפיץ B שהיא תנודת המאלץ. כשהנקודה B נמצאת במקום הגבוה ביותר נסמן על הגלגל עליו נמצא הוו (תרשים 3) את הנקודה הנמוכה ביותר, וכאשר C נמצאת במקום הגבוה ביותר, נסמן על הגלגל את הנקודה שהיא הנמוכה ביותר ***במצב זה***. הזווית שבין שתי הנקודות המסומנות היא הפרש הפאזה.



תרשים 5: הפרש הפאזה בין תנודת הגולה לתנודת המאלץ.

סיכום

מעגל התהודה המיכני המתואר מאפשר המחשת מושגים המצויים במעגל RLC טורי בחשמל. המחשה זו מושגת על-ידי הבדיקה של השתנות הפרש הפאזה בין קצות הקפיץ B ו-C, בתדירויות הנמצאות סביב תדירות התהודה של המערכת. הפרש הפאזה נע בין שני מצבים קיצוניים: ממצב של התנודדות באותה פאזה בתדירות הנמוכה מתדירות התהודה, עד למצב של אנטיפאזה בתדירות הגבוהה מתדירות התהודה.

לאחר ביצוע הניסוי הבינו התלמידים שאפשר שהמתח על הסליל יהיה גדול ממתח המקור, כשם שמשרעת הגולה גדולה יותר ממשרעת המאלץ. כמו כן, כל גודל שנמדד במעגל זרם החילופין הוקבל לגודל המתאים שנמדד במעגל המכני, והובן בצורה מוחשית יותר.