העשרה

התכונות המפתיעות של הברכיסטוכרון הבדיד

דוד אגמון, המחלקה לפיסיקה, הטכניון

חזי יצחק, המחלקה לאנרגיה סולארית ופיסיקה סביבתית, המכונים לחקר המדבר, אוניברסיטת בן גוריון

דוד אגמון

חזי יצחק

"גם למראה נושן יש רגע של הולדת..." נתן אלתרמן, ירח

תקציר

בעיית הברכיסטוכרון (Nahin, 2007) היא בעיה היסטורית שדנה בשאלה איך יש לעצב תיל חלק המחבר שתי נקודות נתונות הממוקמות במישור אנכי כך שזמן הגלישה של חרוז המושחל עליו יהיה מינימלי.

בעוד שבעיית הברכיסטוכרון הרציף נפתרה כבר לפני יותר מ- 320 שנה ע"י גדולי המתמטיקאים של המאה ה-17 וביניהם האחים ברנולי, לייבניץ, ניוטון ולופיטל, לבעיית הברכיסטוכרון הבדיד הבנוי מ- N מקטעים ישרים וחלקים טרם נמצא פתרון מתמטי סגור. במאמר זה אנו מציגים פתרון לבעיה זו המסתמך בדרך פשוטה ואלגנטית על העקרונות של חשבון הווריאציות ומתקבלות בו שתי תוצאות מפתיעות:

א. זמני הגלישה בכל המקטעים שווים זה לזה.

ב. אפשר לנסח קשרים אלגבריים פשוטים בין כל הזוויות ובין כל אורכי המקטעים.

ותוצאה נוספת ומוכרת:

ג. חוק סנל מתקיים בכל נקודת הקישור שבין שני מקטעים סמוכים.

לאור זאת במקום לפתור בעיית מינימום רבת נעלמים (N-1) אורכים ומספר זהה של זוויות שיפוע ניתן להסתפק בחישוב של נעלם אחד בלבד: זווית השיפוע של המקטע הראשון. שאר האורכים והשיפועים ייגזרו מגודל זה באמצעות הקשרים ביניהם. הידע המתמטי הנדרש מהקורא הוא ברמה של אלגברה וגיאומטריה בסיסיים ולכן הוא נגיש גם לתלמידי תיכון ברמה של 5 יח"ל.

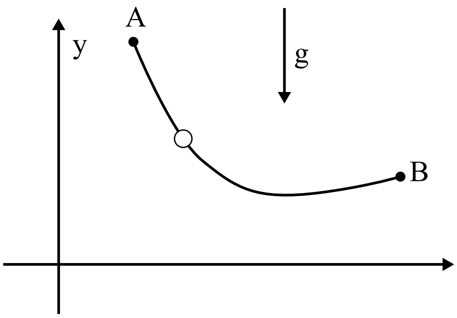
לצורך מאמר זה פותח קוד נומרי המבוסס על תוכנת ה-MATLAB שמחשב ביעילות, במהירות ובדיוק רב את שאר הפרמטרים עבור מספר שרירותי של מקטעים (100 ויותר) ומציג גרפים של התוצאות.

במאמר המשך נראה שהברכיסטוכרון הבדיד הוא בקירוב טוב גם טאוטוכרון (או איזוכרון) ואיך בדרך פשוטה יחסית ניתן לעבור מהפתרון הבדיד לרציף שהוא, כידוע, הציקלואידה.

1. מבוא

בעיית הברכיסטוכרון (Courant & Robbins, 1996) היא בעיה היסטורית מכוננת שהוצגה לראשונה לפני כ-320 שנה ע"י יוהאן ברנולי (1748-1667), אחד מבני משפחת ברנולי שהתברכה במתמטיקאים ואנשי מדע רבים. הבעיה דנה בשאלה הבאה: איך יש לעצב תיל חלק המחבר שתי נקודות נתונות הממוקמות במישור אנכי כך שזמן הגלישה של חרוז המושחל עליו יהיה מינימלי (תרשים 1)?

בעיה זו נמצאת בקו התפר שבין הפיסיקה והמתמטיקה.



תרשים 1. *הברכיסטוכרון הרציף*

בעית הברכיסטוכרון (brachistochrone) הפכה לאחת הבעיות המפורסמות ביותר בפיסיקה של סוף המאה ה-17. הבעיה פורסמה לראשונה על ידי יוהאן ברנולי ביוני 1696 והופיעה בעיתון המדעי החשוב של אותם ימים Acta Eruditorum שלייבניץ היה עורכו. משפחת ברנולי כללה מספר דורות של מתמטיקאים ומדענים מפורסמים. יוהאן ברנולי (1705-1645) פרסם את הבעיה בעיקר כדי להתגרות באחיו ג'יקוב ברנולי (1705-1654) (Courant & Robbins, 1996; Nahin, 2007). למעשה הראשון שניסח את הבעיה היה גלילאו שהציע לה פתרון שגוי (קשת של מעגל). להבדיל מבעיות מינימום-מקסימום רגילות בהן יש למצוא את הערך של המשתנה שעבורו ערך הפונקציה מינימלי או מקסימלי, בבעיה זו צריך למצוא את הפונקציה שזמן התנועה לאורך הגרף המייצג אותה הוא מינימלי. במילים אחרות, המשתנה כאן הוא פונקציה מתוך משפחה אינסופית של פונקציות שהגרפים שלהן הם למעשה מסלולים אפשריים המחברים את שתי הנקודות (ראה נספח 2). וכך כתב יוהאן ברנולי:

"…although the straight line AB is indeed the shortest between the points A and B, it nevertheless is not the path traversed in the shortest time. However, the curve, whose name I shall give if no one else has discovered it before the end of this year, is one well known to geometers" (Ben Abu et. al, 2018)

בסוף השנה הגיע לידיו רק הפתרון של לייבניץ שביקש ממנו ארכה נוספת לפתרון הבעיה. ברנולי נעתר לבקשתו של לייבניץ ודחה את מועד הגשת הפתרון עד לחג הפסחא. ברנולי התכוון לעקום שנקרא ציקלואידה. ציקלואידה היא המסלול שמתווה נקודה על חישוק המתגלגל ללא החלקה כמוראה בתרשים 11. הצילואידה נחקרה על ידי מתמטיקאים והשטח שמתחת לעקום חושב על ידי פרמה, דקרט, וטוריצ'לי. בשנת 1673 גילה הויגנס תכונה מענינת של הציקלואידה. זמן ההחלקה של כדורים על גבי ציקלואידה לא היה תלוי בנקודת ההתחלה! הוא ניצל תכונה זו כדי לבנות מטולטלת שזמן המחזור שלה לא יהיה תלוי באמפליטודה[1] (Ben Abu et. al, 2018).

גדולי המתמטיקאים של אותה תקופה וביניהם ג'יקוב ברנולי, לייבניץ, ולופיטל פתרו את בעית הבריסטוכרון ושלחו את פתרונם ליוהאן ברנולי. ומי לא שלח פתרון? הגדול מכולם באותם שנים - סר אייזיק ניוטון. הדבר הפליא את יוהאן ברנולי והוא שלח עותק של הבעיה במיוחד לביתו של ניוטון. האגדה מספרת שניוטון הגיע לביתו עם ערב, קרא את הבעיה ומיד התיישב לפתור אותה. לאחר שהצליח להגיע לפתרון בשעה ארבע לפנות בוקר, הוא שלח אותו לברנולי בעילום שם. ברנולי קיבל את הפתרון של ניוטון ומיד זיהה את הפותר ואמר: "האריה ניכר על פי עקבותיו". ניוטון צוטט לאחר מכן כאומר שהוא לא אוהב להיות נושא לצחוק על ידי זרים וביחוד בעניינים הקשורים למתמטיקה...

1 למעשה, גם את הטענה שהמסלול הקצר ביותר בין שתי נקודות במישור הוא הקו הישר אפשר להוכיח אם בונים משפחה של פונקציות שהגרפים שלהן מחברים בין שתי הנקודות ומחפשים מתוכן את הפונקציה שהמסלול שלה הוא מינימלי. שיטה זו טובה גם עבור מישורים עקומים כמו פני גליל או פני כדור.

מכל הפתרונות המיוחד ובעל המשמעות העמוקה ביותר היה הפתרון של יוהאן ברנולי עצמו (Courant & Robbins, 1996)[2].

הפתרון של ברנולי (להלן נתעלם משאר בני משפחתו ונתייחס ליוהאן ברנולי כאל ברנולי) מתקשר לעבודה של פרמה לגבי המסלול של קרני אור. מניסויים שנערכו ידוע היה שקרן אור בעוברה בין שני תווכים הומוגניים שקופים בעלי מקדמי שבירה שונים נשברת על פי חוק סנל:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_2}{v_1} \qquad (1)$$

פרמה הראה שאפשר לקבל את חוק סנל מהדרישה שהמסלול בו תנוע קרן האור בין שתי נקודות יהיה זה שעבורו זמן התנועה של האור יהיה מינימלי (ראו נספח 1).

אחר כך הוא הכליל עקרון זה גם למשטחים עקומים, ולבסוף גם למעבר אור דרך תווכים לא הומוגניים כמו האטמוספירה. הרעיון של ברנולי היה לחלק את התווך לפרוסות דקות, להניח שמהירות האור בכל פרוסה כזו היא קבועה (אבל שונה בין הפרוסות) ולהפעיל את חוק סנל לגבי מעבר האור בין כל שתי פרוסות כאלה. עתה ניתן לעובי הפרוסה לשאוף לאפס ונקבל את עקרון פרמה הכללי: בתווך שקוף שאינו הומוגני מסלול קרן האור המחבר בין שתי נקודות יהיה כזה שזמן התנועה שלה יהיה מינימלי (אקסטרמלי). ברנולי הצליח להראות שאפשר להפעיל תהליך דומה גם על תנועת החרוז על התיל: חלוקת התנועה לקטעים כאשר בכל קטע משתמשים בחוק סנל, תגדיר תנאי שממנו ניתן למצוא את המסלול המבוקש, בניגוד למה שנהוג היה לחשוב, עקום זה איננו קו ישר ואף לא קשת מעגלית (כפי שהוצע ע"י גלילאו), אלא עקום הנקרא ציקלואידה (Hilderbrandt & Tromba, 1996).

הרעיונות של פרמה וברנולי התאימו להשקפה כללית על הטבע שהיתה מקובלת באותה תקופה (Courant & Robbins, 1996) כפי שניסח מאוחר יותר Maupertuis (1698-1759) (Erlichson, 1999):

“God’s intention to regulate physical phenomena by a general principle of highest perception"

Huntley שכתב ספר על יחס הזהב ועל יופי במתמטיקה התרשם עמוקות מהפתרון של ברנולי לבעיית הברכיסטוכרון וכתב (Huntley, 1970):

“The linking together of problem in mechanics with a phenomenon in optics and relating the identical solution of both to a lovely curve-the cycloid, derived from pure geometry – has an artistic appeal that can scarcely be missed."

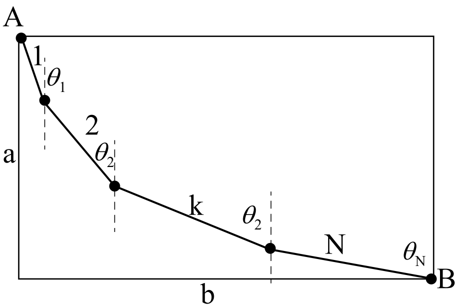
פתרון זה של ברנולי, כמו גם פתרונן של בעיות נוספות דוגמת בעיית השרשרת, הביא להתפתחותו של ענף מתמטי חדש שנגזר מהחשבון הדיפרנציאלי והאינטגראלי שנקרא חשבון וריאציות (calculus of variation) (ראו נספח 2). השימוש בחשבון הואריציות אפשר ניסוח חדש של המכניקה הקלאסית על ידי אוילר, לגראנז' והמילטון.

בעיית הברכיסטוכרון הדיסקרטי

בהמשך לבעית הברכיסטוכרון הקלסית שעסקה בפונקציות חלקות, העלו חוקרים גרסה דיסקרטית של הבעיה: כיצד אפשר לבנות מסלול המורכב מ- N מקטעים בדידים, ישרים וחלקים (תרשים 2), כך שזמן הגלישה עליו יהיה מינימלי: $t_{AB} = \min$.

לכאורה זו בעיה פשוטה יותר, אך במהרה התברר שאינה פשוטה כלל ועיקר. N המקטעים מחוברים ביניהם ע"י $(N-1)$

2 אם חושבים על האור כעל גל, ולוקחים בחשבון את עקרון הויגנס, הרי שקיימים מספר מסלולים בהם האור היוצא מנקודה אחת מגיע לנקודה אחרת. הדבר בולט במיוחד בניתוח של עקיפה דרך סדק יחיד.



תרשים 2. *הברכיסטוכרון הבדיד*

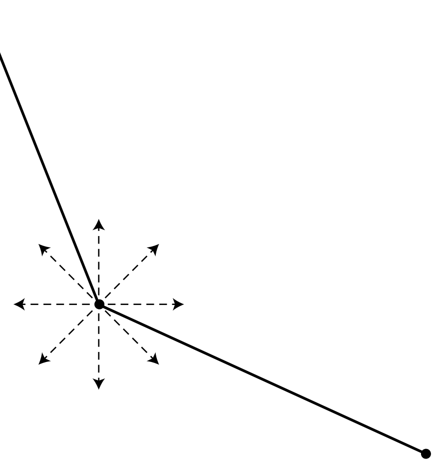
נקודות קישור ששיעוריהן: $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\cdots(x_{N-1},y_{N-1})\}$ ועל כן יש להתמודד עם בעית מינימיזציה של פונקציה של 2(N-1) משתנים, שהיא אינה טריויאלית אפילו כשמדובר בשני מקטעים בלבד. עד כה לא הוצע לה פתרון אנליטי סגור והדרך בה התמודדו איתה חוקרים אחרים הייתה על ידי פתרון נומרי המבוסס על אופטימיזציה "וטחינת מספרים". נעיר שבמקום לחשב את מיקומן של (N-1) נקודות הקישור, ניתן לחשב, באופן שקול, את אורכם ושיפועם של (N-1) קטעי הקישור.

במאמר זה נציג פתרון המתבסס על העקרון הווריאציוני (Agmon & Yizhaq, 2019) הקובע ש:

בהנחה שהמסלול הוא אכן המסלול המינימלי המבוקש, אזי **כל שינוי זעיר** (אינפיטסימלי) במיקום של כל אחת מנקודות הקישור, יגרור שינוי זעיר יותר (מסדר שני ומעלה) בזמן הגלישה הכולל של החרוז. ובשפה מתמטית: אם זמן הגלישה הכולל מ A אל Bהוא t_{AB} כאשר:

$$t_{AB}=\sum_{k=1}^{N}t_k \qquad (2)$$

(כאשר t_k הוא זמן הגלישה על המקטע ה-k)



תרשים 3. *שינוי זעיר, בכיוון שרירותי במיקום של נקודת חיבור כלשהי אינו משנה את זמן הגלישה הכולל*

אזי, אם נסיט את הנקודה ה- k בכיוון **כלשהו** בשיעור זעיר (תרשים 3), Δ , זמן הגלישה הכולל ישתנה רק בשיעור היחסי לסדר השני, קרי: ל Δ^2 כלומר השינוי מסדר ראשון (הווריאציה) יהיה זניח. נסמן זאת כך:

$$\delta t_{AB} \propto \Delta^2 \to 0 \qquad (3)$$

נעיר שהרציונל לדרישה הזו דומה למה שאנחנו כבר מכירים כשמדובר בנגזרת רגילה של פונקציה סביב נקודת קיצון (מינימום או מקסימום), גם שם שינוי זעיר סביב הנקודה גורר שינוי מסדר שני ומעלה בגודל הפונקציה ולכן הנגזרת הראשונה מתאפסת סביב נקודות קיצון.

אנו מניחים, אפוא, שכבר מצאנו את המסלול המינימלי וע"י הפעלה מושכלת של עקרון הווריאציה נמצא מהן התכונות המאפיינות אותו.

מתקבלות שלוש מסקנות ששתיים מהן מפתיעות ולא טריוויאליות ושאותן נוכיח בהמשך:

א. במסלול המינימלי זמני הגלישה על כל המקטעים שווים זה לזה:

$$t_1 = t_2 = \cdots t_N \equiv t_0 \quad (4)$$

ב. חוק סנל מתקיים בכל נקודת חיבור:

$$\frac{v_1}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{\sin\theta_2} \cdots = \frac{v_N}{\sin\theta_N} \quad (5)$$

כאשר v_k היא המהירות **הממוצעת** על המקטע ה- k שאורכו r, ו θ_k היא זווית השיפוע שלו הנמדדת ביחס לאנך (כמו זוויות הפגיעה והשבירה באופטיקה גיאומטרית).

ג. יש הפרש זוויתי קבוע בין כל שתי זוויות שיפוע עוקבות:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + 2\theta_1 \quad (6)$$

ולכן

$$\theta_k = (2k-1)\theta_1 \quad (7)$$

נכפול את (5) ב t_0 ונזהה ש $r_k = v_k t_0$ כאשר r_k הוא, כאמור, האורך של המקטע ה- k ונקבל:

$$\frac{r_1}{\sin\theta_1} = \frac{r_2}{\sin\theta_2} \cdots = \frac{r_N}{\sin\theta_N} \quad \rightarrow \quad r_k = r_1\frac{\sin\theta_k}{\sin\theta_1} = r_1\frac{\sin((2k-1)\theta_1)}{\sin\theta_1} \quad (8)$$

לכל $k = 1,2,\ldots N$ (וזהו מעין חוק סנל לאורכים ולא למהירויות)

ממשוואות (6) ו (7) נסיק שהבעיה הצטמצמה מ 2(N-1) נעלמים לנעלם אחד בלבד: θ_1 קרי: השיפוע של המקטע הראשון. וכל שאר השיפועים והאורכים ייגזרו ממנו ויחושבו בעזרת משוואות אלו.

2. הוכחה

לאורך כל מקטע נע החרוז בתאוצה **קבועה** שגודלה $a_k = g\cos\theta_k$ ולכן מהירותו הממוצעת v_k, לאורך מקטע זה, שווה למחצית הסכום של המהירויות הרגעיות בקצות אותו מקטע כמתואר בתרשים 4

$$v_k = \tfrac{1}{2}(u_{k-1} + u_k) \quad (9)$$

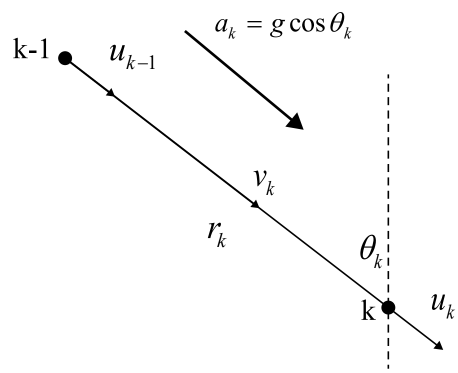
כמו כן, משיקולי שימור אנרגיה נובע שגודל המהירויות הרגעיות תלוי רק בציר האנכי (ציר y) ומכאן נובעות 3 מסקנות:

א. הזזה זעירה כלשהי של הנקודה k תשנה רק את המהירויות הממוצעות v_k ו- v_{k+1}, וכל יתר המהירויות יישארו ללא שינוי.

ב. אם הנקודה ה-k תוסט אופקית (לאורך ציר ה-x) גודל כל המהירויות לא ישתנה כלל.

ג. גודל המהירות הרגעית בסוף המקטע ה-k הוא גם גודל המהירות ההתחלתית של המקטע הבא, ה-k+1 ולכן תמיד גודל **שינוי המהירות הממוצעת** שבמקטע ה k שווה לגודל **שינוי המהירות** במקטע השכן ה- $k+1$ (כי המהירות u_{k+1} אינה משתנה) כלומר:

$$\delta v_k = \delta v_{k+1} \quad (10)$$



תרשים 4. *שהמהירות הממוצעת בקטע ה- k שווה למחצית הסכום של המהירויות*

מהאמור לעיל נסיק שכל הזזה של הנקודה ה- k תשפיע **רק** על זמני הגלישה שלאורך שני המקטעים המחוברים אליה כלומר **רק** על δt_k ו δt_{k+1}. ולאור הדרישה הווריאציונית ש: $\delta t_{\mathrm{AB}} = \delta t_k + \delta t_{k+1} = 0$ נסיק שייתכנו שני תת-מקרים:

I. $\delta t_k = \delta t_{k+1} = 0$

II. $\delta t_k = -\delta t_{k+1} \neq 0$

המקרה הראשון מתאר מצב בו, עקב ההזזה, זמן הגלישה באחד המקטעים גדל, ומאידך זמן הגלישה של שכנו קטן ובאותו שיעור. המקרה השני מתאר מצב בו נבחרה הזזה בכיוון מאוד מסוים כך שזמן הגלישה בשני המקטעים נותר ללא שינוי. מצב כזה מתאפשר אם אורך המקטע והמהירות הממוצעת בו גדלים בדיוק באותו היחס. למשל, אם גם האורך וגם המהירות משתנים ב $\pm 5\%$ היחס ביניהם, השווה לזמן הגלישה, לא ישתנה. בשפה מתמטית תנאי II מתקיים כאשר:

$$\frac{\delta r_k}{r_k} = \frac{\delta v_k}{v_k} \;\rightarrow\; \frac{\delta r_k}{\delta v_k} = \frac{r_k}{v_k} = t_k \qquad (11)$$

אם קשר זה יכול להתקיים במקטע ה- k הוא בהכרח גם יכול להתקיים במקטע העוקב, המקטע ה-k+1:

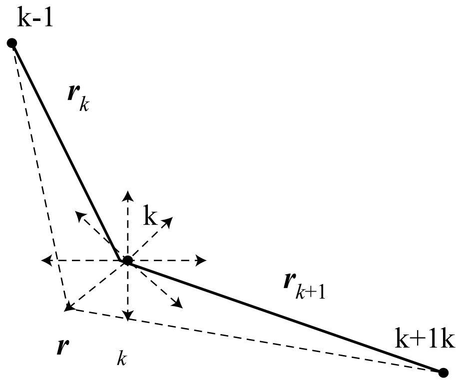
$$\frac{\delta r_{k+1}}{\delta v_{k+1}} = \frac{r_{k+1}}{v_{k+1}} = t_{k+1} \qquad (12)$$

ולכן אם נוכל להוכיח שתמיד תימצא וריאציה שמקיימת: $\frac{\delta r_k}{\delta v_k} = \frac{\delta r_{k+1}}{\delta v_{k+1}}$, אזי בהכרח גם יתקיים:

$$t_k = t_{k+1} \qquad (13)$$

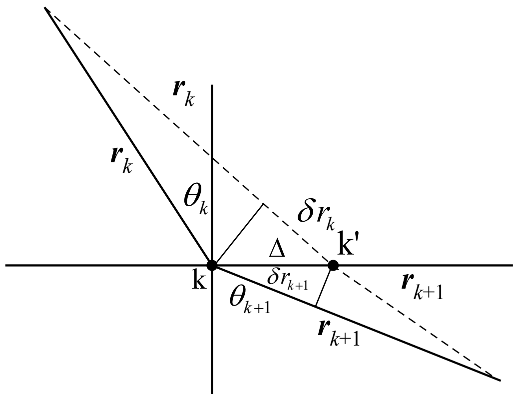
וקביעה זו, כמובן, תהיה תקפה לכל $k = 1,2,\ldots N$. ומכאן נסיק בהכרח שכל זמני הגלישה חייבים להיות שווים זה לזה. ממשוואה (8) קיבלנו שעבור כל וריאציה מתקיים $\delta v_k = \delta v_{k+1}$ וע"כ נותר לנו רק להוכיח שקיים כיוון מסויים במישור שאם נסיט אליו את הנקודה ה- k בשיעור זעיר Δ, אזי שני המקטעים הקשורים אליה יתארכו או יתקצרו בדיוק באותו השיעור. קרי: $\delta r_k = \delta r_{k+1}$. ההוכחה לכך מסתמכת על תרשים 5 שממנו ניתן ללמוד שקיימים כיוונים שעבורם מקטע אחד מתארך בעוד ששכנו מתקצר ואף קיים המצב ההפוך שבו דווקא הראשון מתקצר ושכנו מתארך ולכן, **מעיקרון הרצף**, חייב **בהכרח** להיות מצב בו שני המקטעים מתארכים או מתקצרים בדיוק באותו השיעור. וזה, כאמור, יאשש את מסקנה (א) לעיל הקובעת שבמסלול המינימלי כל זמני הגלישה חייבים להיות שווים זה לזה:

$$t_1 = t_2 = \ldots t_{\mathrm{N}} \equiv t_0 \qquad (14)$$



תרשים 5. *תמיד נוכל למצוא כיוון הסטה של הנקודה ה-k כך ששני המקטעים יתארכו בדיוק באותו השיעור*

על מנת להוכיח שחוק סנל מתקיים בכל נקודת חיבור (תת מקרה 1 ומסקנה ג' לעיל), נבחר הפעם הסטה אופקית המתאפיינת בכך שגובה הנקודה המוסטת אינו משתנה ולכן גודל כל המהירויות שבשני המקטעים הקשורים אליה נותר ללא שינוי.



תרשים 6. *הסטה אופקית מ k ל k' בשיעור זעיר Δ מאריכה את המקטע האחד ב $\delta r_k = \Delta \sin\theta_k$ ומקצרת את שכנו ב $\delta r_{k+1} = \Delta \sin\theta_{k+1}$. המקטעים החדשים, המקווקווים, כמעט מקבילים מקטעים המקוריים.*

הסטה כזו תאריך בהכרח מקטע אחד (למשל את המקטע ה- k בשיעור δr_k) ותקצר את שכנו בשיעור δr_{k+1} ולכן אם משך הגלישה של המקטע הראשון יתארך בשיעור $\delta t_k = \delta r_k / v_k$ משך הגלישה על המקטע השני חייב לכן להתקצר בדיוק באותו השיעור (בשל התנאי $\delta t_k = -\delta t_{k+1} \neq 0$) :

$$\delta t_k = \left|\delta t_{k+1}\right| \;\rightarrow\; \frac{\delta r_k}{v_k} = \frac{\left|\delta r_{k+1}\right|}{v_{k+1}} \qquad (15)$$

מתרשים 6 ניתן להתרשם שכאשר מסיטים אופקית של הנקודה k ימינה לנקודה החדשה k' בשיעור זעיר Δ אזי המקטעים החדשים שמתקבלים (המקווקווים) כמעט מקבילים למקטעים המקוריים ולכן:

$$\delta r_k = \Delta \sin\theta_k, \quad \delta r_{k+1} = \Delta \sin\theta_{k+1} \quad .14$$

נציב זאת ב (13) נסדה, נצמצם ואחרי מעט אלגברה נקבל את חוק סנל:

$$\frac{v_k}{\sin\theta_k} = \frac{v_{k+1}}{\sin\theta_{k+1}} \;\rightarrow\; \frac{v_1}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{\sin\theta_2} \cdots = \frac{v_N}{\sin\theta_N} \equiv V_0 \qquad (16)$$

כאשר V_0 הוא גודל קבוע. נעיר שאם המקטע האחרון הוא אופקי (כלומר $\theta_N = 90^0$) אזי מ (16) ניתן להסיק ש $v_N = V_0$ וזוהי המהירות שרוכש חרוז בנפילה חופשית מגובה a ולכן $V_0 = \sqrt{2ga}$.

על מנת להוכיח את מסקנה ב' נחשב תחילה את θ_1, זווית השיפוע של המקטע הראשון. בהנחה שהחרוז מתחיל את גלישתו ממצב מנוחה ומחליק בתאוצה קבועה $a_1 = g\cos\theta_1$ בפרק זמן $t_1 = t_0$ אזי מהירותו הממוצעת במקטע הראשון היא:

$$v_1 = \tfrac{1}{2}t_0 g\cos\theta_1 = V_0\sin\theta_1 \;\rightarrow\; \tan\theta_1 = \left(\frac{gt_0}{2V_0}\right) \qquad (17)$$

באופן דומה, אם כי סבוך יותר מבחינה אלגברית, ניתן להראות שבין כל שתי זוויות עוקבות מתקיים הקשר הפשוט הבא (Agmon & Yizhaq, 2019):

$$\theta_{k+1} = \theta_k + 2\theta_1 \;\rightarrow\; \theta_k = (2k-1)\theta_1 \qquad (18)$$

2.1 הערות

א. על מנת למזער את זמן הגלישה, על החרוז להתחיל לגלוש בתאוצה המרבית האפשרית כלומר בתאוצה השואפת ל-g. מהביטוי שנתקבל ב-(17) רואים שהשיפוע ביחס לאנך יחסי ל t_0 וזמן זה הולך ומתקצר ככל שמספר המקטעים גדל ולכן עבור $N >> 1$ זווית זו תשאף לאפס, כלומר החרוז אכן יתחיל את גלישתו בתנועה כמעט אנכית מטה, כנדרש.

ב. במקרה המיוחד בו $N >> 1$ והמקטע ה- Nהוא אמנם אופקי (כלומר $\theta_N = \pi/2$), נקבל את הקירוב הבא:

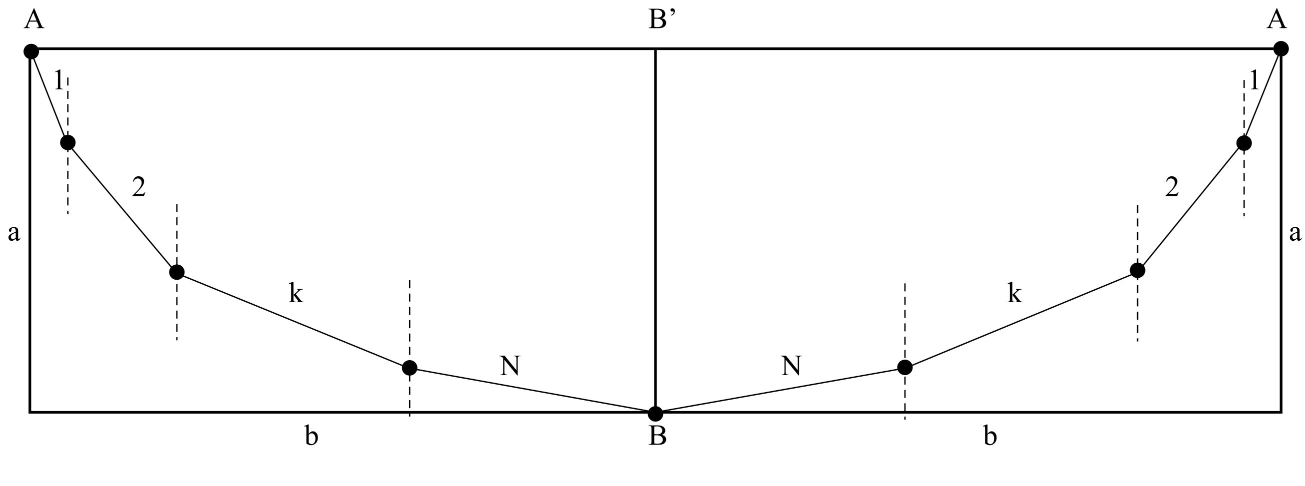
$$\sin\theta_N = \sin\tfrac{1}{2}\pi = \sin\big((2N-1)\theta_1\big) \;\rightarrow\; \theta_1 \approx \pi/4N$$

וכעת, בעזרת הקשרים: $V_0 = \sqrt{2ga}$ ו $\tan\theta_1 \approx \theta_1 = \pi/4N$ ומהעובדה שזמן הגלישה הכולל מ A ל B הוא $t_{AB} = Nt_0$ נציב כל זאת ב (17) ונקבל:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4N} = \frac{g(t_{AB}/N)}{2\sqrt{2ga}} \;\rightarrow\; t_{AB} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}} \qquad (19)$$

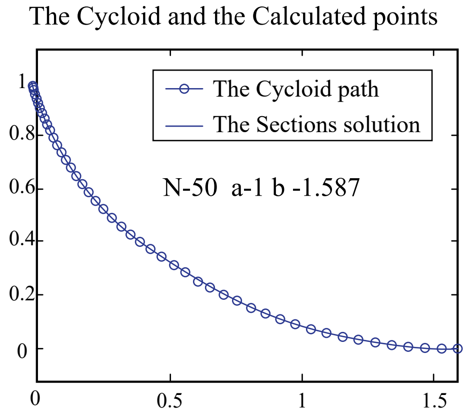
יש לשים לב שזמן זה מהווה רק **רבע** זמן מחזור של התנועה המחזורית המלאה בה בה חרוז יורד-עולה-יורד-עולה כמומחש בתרשים 7. ולכן הזמן של מחזור שלם יהיה:

$$T = 4t_{AB} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g}} = T_{cyc} \qquad (20)$$



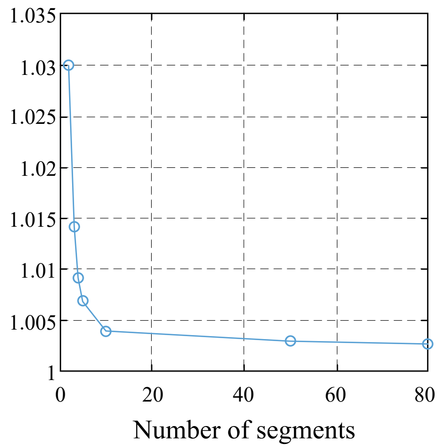
תרשים 7. *הברכיסטוכרון הבדיד כאשר הוא משוקף דרך הישר* BB'

זהו גם זמן המחזור המדויק, T_{cyc}, של חרוז הגולש על ציקלואידה רציפה העוברת דרך אותן נקודות קצה 3. בכך בעצם איששנו את הקביעה שכאשר מספר המקטעים מספיק גדול הברכיסטוכרון הבדיד מתכנס לציקלואידה שהיא הפתרון המדויק לברכיסטוכרון הרציף. תרשים 8 ממחיש זאת יפה כאן רואים בעליל שכאשר N= 50 כל נקודות הקישור ממוקמות במדויק על הציקלואידה. החישובים מלמדים שזמן הגלישה על הברכיסטוכרון הבדיד קרוב מאוד לזמן הגלישה על הציקלואידה. למשל, עבור N = 5 זמן זה ארוך רק ב 0.7% ועבור N = 80 זמן הגלישה גדול רק ב 0.3%. ומכאן גם נסיק שזמן הגלישה רגיש אך במעט למספר המקטעים.



תרשים 8. *ברכיסטוכרון בדיד בן 50 מקטעים. נקודות הקישור ממוקמות במדויק על הציקלואידה*

תרשים 9 מראה את היחס T_d / T_c בין זמן המחזור על הפתרון הדיסקרטי T_d לבין זמן המחזור על הציקלואידה הרציפה T_c כפונקציה של מספר הקטעים. יחס זה עבור $N = 80$ הוא $\frac{T_d}{T_c} = 1.0029$ והוא שואף ל-1 כאשר מספר הקטעים $N \to \infty$.



תרשים 9. *היחס T_d/T_c בין זמן המחזור על הפתרון הדיסקרטי T_d לבין זמן המחזור על הציקלואידה הרציפה T_c כפונקציה של מספר הקטעים של הפיתרון הדיסקרטי.*

3. סיכום ודיון

מקובל לחשוב שפתרון בעיות בעזרת חשבון וריאציות הוא פתרון סבוך הנשען על משוואות דיפרנציאליות תוך שימוש אינטנסיבי בכלי החדו"א ואכן הפתרון המקובל של בעיית הבריסטוכרון הוא באמצעות משוואות אוילר-לגראנז (Desaix et. al, 2005). אך כאן בטיפול בבעית הברכיסטוכרון הבדיד עקפנו קושי זה והצגנו דרך פתרון פשוטה יחסית הנשענת על כלים אלגבריים וגיאומטריים בלבד ובכך הנגשנו את הנושא לרמה התיכונית- אם כי הוא דורש הבנה לעומק של עקרון הווריציה שאינו נכלל בתוכנית הלימודים בפיסיקה.

בהסתמך על כלים אלו נתקבלו תוצאות מפתיעות ואלגנטיות הקובעות שעל מנת שהמסלול הבדיד יהיה אכן מסלול מינימלי, הדרישות הבאות חייבות להתקיים:

א. זמני הגלישה בכל המקטעים יהיו שווים זה לזה.

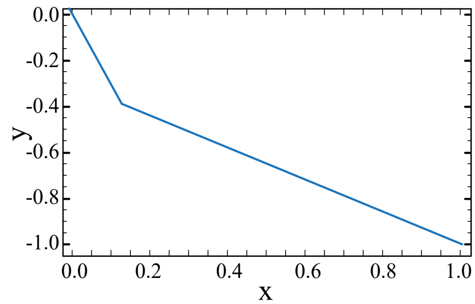
ב. יתקיימו קשרים פשוטים בין כל הזוויות ובין כל אורכי המקטעים.

ג. חוק סנל יתקיים בכל נקודות הקישור בין הקטעים (זה למעשה הוכח כבר ע"י יוהן ברנולי).

בדרך זו צומצם מספר הנעלמים מ (N-1)2 לאחד בלבד. כי בעיקרון יש למצוא את אורכם של (N-1) מקטעים ומספר זהה של זוויות השיפוע ואילו בפתרון המוצע די למצוא את השיפוע של המקטע הראשון וכל שאר המשתנים ייגזרו בדרך אלגברית פשוטה מגודל זה.

תוכנית מחשב ייעודית המבוססת על תוכנת ה-MATLAB מחשבת ביעילות, במהירות ובדיוק רב פרמטרים אלו בעבור מספר שרירותי של מקטעים (100 ואף יותר) ומציגה גרפים של התוצאות.

1. לאור זאת אנו ממליצים למורי הפיסיקה המלמדים כיתות מתקדמות של 5 יח"ל להציג את הבעיה הדיסקרטית והפתרון בפני תלמידיהם ואף לאתגר אותם בבנייה ממשית של ברכיסטוכרון בדיד וברכיסטוכרון רציף ולהשוות בין הביצועים של השניים וכן לבדוק את שיוויון זמני הגלישה בכל אחד מהמקטעים. מקרה פשוט יהיה עבור N=2 כלומר ברכיסטוכרון דיסקרטי המורכב משני מקטעים בלבד ויחסית קל לבנותו (ראה תרשים 10). כאשר מבצעים את הניסוי עם כדור המתגלגל על מסילה יש להתחשב גם בגלגול הכדור שלא אמור לשנות את התוצאות, אלא להכפיל את הזמן בקבוע (עבור גלגול ללא החלקה). בעיית הברכיסטוכרון נפתרה גם עבור מקרים מסובכים יותר כגון השפעה של חיכוך קינטי (Haws & Kiser, 1995) וכן את המסלול המהיר ביותר בתוך כדור הארץ כלומר בהשפעה של כח כבידה לא קבוע המשתנה ליניארית עם העומק (Cooper, 1996). במקרה זה הפיתרון הוא עקום שנקרא היפר-ציקלואידה שנוצרת ממעקב אחר נקודה על גלגל שרדיוס a ו המתגלגל בתוך מעגל גדול יותר שרדיוסו b (Weisstein, 2019).

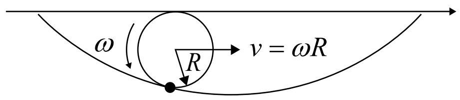


תרשים 10. *ברכיסטוכרון דיסקרטי המורכב משני קטעים.*

באמצעות תוכנה כמו Mathematica (שימוש בפונקציה FindMinimum) ניתן למצוא באופן נומרי את המינימום של הפונקציה:

$$t(x,y)=2\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2gy}}+\frac{\sqrt{(x-1)^2+(1-y)^2}}{\sqrt{2gy}+\sqrt{2g\cdot 1}}\right)$$

שמבטאת את זמן ההחלקה בין הנקודות (0,0) ל- (1,1). זמני ההחלקה המתקבלים בכל קטע הם: $t_1=0.296409, t_2=0.296452$
כלומר השגיאה היא בספרה החמישית לאחר הנקודה העשרונית.

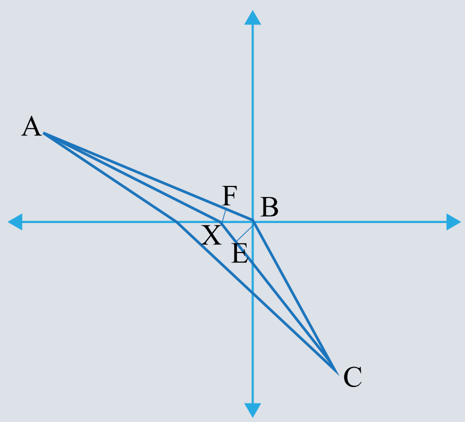


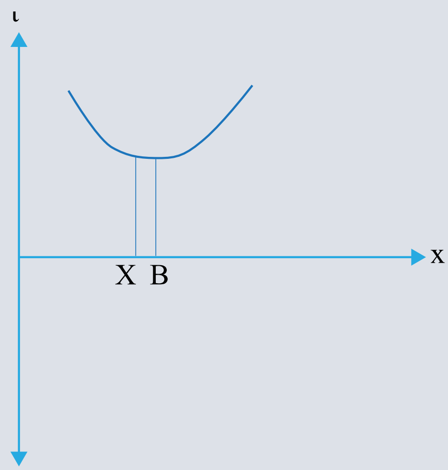
תרשים 11. *נקודה הנמצאת על היקפו של גלגל המתגלגל ללא החלקה (כאן הוא מתגלגל על התקרה!) הוא מתווה את עקום הציקלואידה.*

נספח 1

מעקרון פרמה לחוק סנל[1]

הגרף שמשמאל מציג מספר מסלולים אפשריים שלאורכם יכול האור לנוע בין שתי נקודות A ו- C המצויות בתווכים שונים. הגרף שמימין מציג את הזמן שנדרש לאור להגיע מ- A ל- C כפונקציה של מיקום הנקודה X. הנקודה B מתאימה לזמן הקצר ביותר של כל הזמנים האפשריים למעבר האור. מהגרף הימני אפשר לראות כי עבור נקודות הסמוכות ל-B, אין למעשה שינוי בזמן בקרוב ראשון (אבל יש שינוי זעיר מסדר שני . הדבר מאפיין נקודות מינימום).





השיטה למצוא את נקודת המינימום תהיה להזיז את המקום X באופן מזערי ביחס ל-B, ולדרוש כי השינוי בזמן יהיה אפסי. כלומר, שהאור עובר באותו הזמן את הקטע FB ואת הקטע XE. נניח שמהירות האור בתווך העליון היא v_1 ובתווך התחתון היא v_2 אזי:

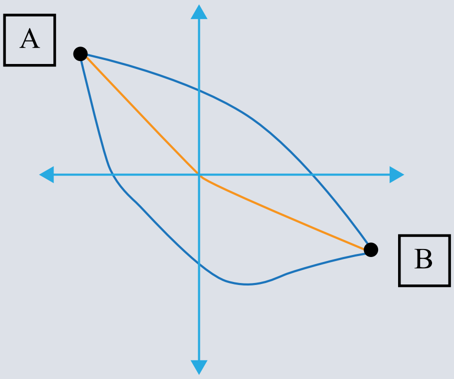
$$FB=\frac{v_1}{v_2}XE$$

מכאן בעזרת קצת טריגונומטריה נקבל את חוק סנל. כדאי לשים לב לכך שאם מתייחסים לאור כאל גל, הרי שלפי עקרון הויגנס האור אכן יכול להגיע במסלולים שונים מ- A ל- C.

1 בעקבות פיינמן 3-26

נספח 2

חשבון וריאציות



חשבון הוריאציות עוסק במציאת ערכי הקיצון של פונקציות שהמשתנה שלהן הוא פונקציות. פונקציה כזו (פונקציה של פונקציות) נקראת "פונקציונל". במלים אחרות, חשבון הוריאציות מאפשר למצוא עבור איזו פונקציה יקבל הפונקציונל את ערך הקיצון שלו.

בבעיה בה עסק פרמה השאלה היא מבין כל הפונקציות שהגרף המתאר אותן מחבר בין שתי נקודות שונות, מהי הפונקציה שאם האור ינוע לאורך הגרף שלה זמן התנועה שלו בין אותן שתי נקודות יהיה הקצר ביותר. זמן התנועה של האור הוא לפיכך פונקציה של המסלולים השונים המחברים בין שתי הנקודות (פונקציה של פונקציות). שיטה זו דומה בעיקרון לשיטה למציאת נקודות קיצון של פונקציה רק שבמקום לחפש את הערך של המשתנה שעבורו הפונקציה מקבלת ערך קיצון, המשתנה כאן הוא פונקציה שהגרף שלה מחבר בין שתי נקודות:

רשימת מקורות

[1] Nahin, P. J. 2007. When the least is the best. Princeton University Press, p. 200-238.

[2] Courant, R.and Robbins, H. 1996. What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods, 2nd ed. Oxford, England: Oxford University Press.

[3] Ben Abu, Y. Wolfson, I.Eshach, H., and Yizhaq, H. 2018. Energy, Christiaan Huygens, and the Wonderful Cycloid—Theory versus Experiment. Symmetry. 10. 111. 10.3390/sym10040111.

[4] Courant, R.and Robbins, H. 1996. What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods, 2nd ed. Oxford, England: Oxford University Press.

[5] Hilderbrandt, S.,Tromba, A. 1996. The Persimmons Universe; Springer: New York, NY, USA p. 241.

[6] Erlichson, H. 1999. Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time Eur. J. Phys. 20 299.

[7] Huntley, H.E. (1970). The divine proportion, p 86.

[8] Agmon, D., Yizhaq, H. 2019. The remarkable properties of the discrete brachistochrone. European Journal of Physics, 40.

[9] Desaix, M., Anderson, D. and Lisak, M. 2005. The brachistochroneproblem—an introduction to variational calculus for undergraduate students Eur. J. Phys. 26 857.

[10] Haws, L. and Kiser, T. (1995). Exploring the Brachistochroneproblem.The American Mathematical Monthly, 102:328-336.

[11] Cooper, Paul 1966. Through the Earth in Forty Minutes. American Journal of Physics, Volume 34, Issue 1, pp. 68-70.

[12] Weisstein, Eric W. "Hypocycloid." From MathWorld{A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Hypocycloid.html.