לצאת מהשיגרה

גישה בלתי שיגרתית לפיתרון בעיות בפיסיקה

מאמר זה הוא הראשון מתוך סידרת מאמרים בהם יוצגו גישות חדשות לפיתרון בעיות פיסיקליות (לא תרגילים!) החל מבעיות די פשוטות ועד בעיות ברמה של אולימפיאדה לפיסיקה ובעיות הדורשות מהפותר יצירתיות. הגישות לפיתרון הבעיות מאפיינות שיטות בלתי שיגרתיות נדירות ומקוריות. הבעיות שיוצגו כוללות לקט בעיות נבחרות הלקוחות גם מאולימפיאדות לפיסיקה ממדינות שונות. בעיות אלו והגישות החדשות לפיתרונן יקלו על התלמידים המתכוננים לאולימפיאדה הארצית לפיסיקה ואף יתרמו להכנתם לקראת השתתפות באולימפיאדה בינלאומית לפיסיקה.

שיטת ההעתקים הקטנים

ולדימיר בודיק, בית ספר תיכון עמל, חדרה

המאמר מוקדש לאנטולי שפירו, מורה וידיד

כדי לתאר התנהגות של מערכת מכנית קיימות שתי גישות עקרוניות:

1. תאור המערכת על-ידי כוחות הפועלים עליה.
2. תאור המערכת תוך שימוש בחוקי שימור.

הגישה הראשונה מוגבלת מכיוון שלא תמיד ידועים כל הכוחות. חיסרון נוסף הוא שלעיתים מספר המשוואות רב ופיתרונן מסובך.

לגישה השניה - האנרגטית, יש יתרון מכיוון שמשוואות האנרגיה אינן מכילות קשרים בלתי ידועים, ולעומת זאת נותנות פיתרונות פשוטים. גישה זו אינה חדשה ותוארה כבר בשנת 1717 על-ידי יוגן ברנולי (ארכימדס השתמש בה לפיתוח חוק המנוף). היא מבוססת על העובדה שכדי להחזיק גוף במצב שיווי משקל לא נדרשת השקעת אנרגיה. על הגוף פועלים כוחות פעולה וכוחות תגובה וההעתק של התנועה שווה לאפס. העיקרון עליו מבוססת גישה זו ידוע בשם *עיקרון העבודות הוירטואליות*.

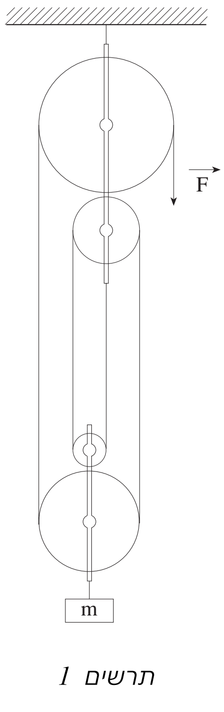
ניסוח העקרון

כדי שמערכת תימצא במצב שיווי משקל הכרחי ומספיק שכאשר מסיטים את המערכת ממצב שיווי המשקל בסטייה קטנה, סכום כל העבודות של כל הכוחות הפועלים על המערכת ישווה לאפס. מניחים, איפוא, שהמערכת נעה במידה קטנה δx, ומבטאים את עבודות הכוחות באמצעות δx. בהשוואת העבודות, δx מצטמצם.

נבדוק עיקרון זה בפתרון מספר בעיות:

בעיה 1 (של לגרנז')

אל הגלגלת התחתונה במערכת המתוארת בתרשים 1 קשורה משקולת שמסתה m. מהו הכח שבעזרתו אפשר להחזיק מערכת זו בשיווי משקל? הנח כי החוטים אינם נמתחים, הגלגלות חסרות משקל, והחוטים בין הגלגלות מקבילים.



תרשים 1

פיתרון:

נניח כי החוט נמשך בכח F לאורך העתק δH, (δ - סימון לשינוי קטן). כתוצאה מכך יוצרת מערכת הגלגלות הרמה של המסה m לגובה δh שהוא $\frac{1}{4}$ מערכו של δH עקב הכפלת הדרך שעובר החוט בסיבובו סביב הגלגלות:

$$\delta h = \frac{1}{4}\delta H$$

נשתמש בעיקרון:

$$\delta W_1 + \delta W_2 = 0$$

הכח F מבצע עבודה $F\delta H$. על המשקולת מבוצעת עבודה $-mg\delta h$ ולכן:

$$F\delta H - mg\delta h = 0$$

$$F\delta H - mg\frac{1}{4}\delta H = 0$$

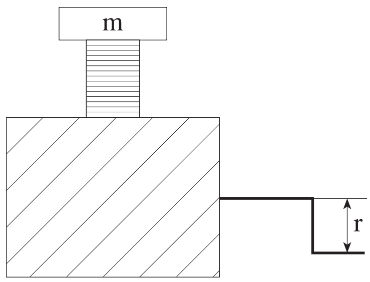
$$\boxed{F = \frac{mg}{4}}$$

קיבלנו את הכח הנדרש בצורה ישירה.

בבעיה הבאה זווית קטנה מבטאת את הסטייה ממצב שיווי משקל.

בעיה 2

תיבה מכילה מנגנון, אשר מבנהו לא ידוע. (ראה תרשים 2). עם סיבוב הידית הבורג עולה בהדרגה. סיבוב אחד גורם לעליית הבורג בגובה h (רדיוס המעגל הוא r). על הבורג מניחים משקולת m. מהו הכוח שיש להפעיל על הידית במצב שיווי המשקל של המערכת?



תרשים 2

פיתרון:

יש לציין, שבשיטות המקובלות לא ניתן לפתור את הבעיה מכיוון שלא ידועים הנתונים על תוכן התיבה.

הכח אותו יש למצוא מבצע עבודה:

$$\delta W_1 = F\delta \ell$$

כאשר מסובבים את הידית בזווית (ברדיאנים) $\delta\phi$, כך ש:

$$\delta \ell = r\delta\phi$$

נקבל עבודה:

$$\delta W_1 = Fr\delta\phi$$

סיבוב שלם של הידית בזווית 2π גורם להרמת המשקולת בגובה h. מכיוון שמבצעים סיבוב רק בזווית קטנה $\delta\phi$, המשקולת תעלה לגובה δh כך ש:

$$\delta h = \frac{h}{2\pi}\delta\phi$$

עבודת כח הכובד:

$$\delta W_2 = -mg\frac{h}{2\pi}\delta\phi$$

על פי העיקרון שראינו:

$$\delta W_1 + \delta W_2 = 0$$

$$Fr\delta\varphi - mg\frac{h}{2\pi}\delta\varphi = 0$$

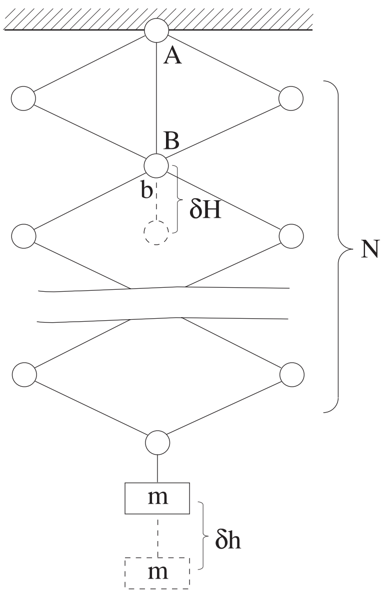
לכן הכח על הידית במצב של שיווי משקל הוא:

$$\boxed{F = mg\frac{h}{2\pi r}}$$

בעיה 3

מערכת הרמוניקה מורכבת מפסים חסרי מסה המחוברים בקצותיהם באמצעות צירים המאפשרים תנועה ללא חיכוך. (ראה תרשים 3) המערכת מכילה N יחידות שוות (מזניחים חיכוך). על ההרמוניקה תולים משקולת m. מחברים את הנקודות A ו-B באמצעות חוט.

חשב את המתיחות בחוט AB.



תרשים 3

פיתרון:

נניח שהמשקולת ירדה ב-δh. מכאן שעבודת כוח הכובד:

$$\delta W_1 = mg\delta h$$

נסמן ב δH את התארכות החוט AB. עבודת המתיחות:

$$\delta W_2 = -T \cdot \delta H$$

נעזר בתרשים 3 על-מנת למצוא את הקשר בין δH ל-δh. האלכסון האנכי של כל אחת מהיחידות של ההרמוניקה התארך ב $\delta H = \frac{\delta h}{N}$. לכן:

$$mg\delta h - T\frac{\delta h}{N} = 0$$

$$\boxed{T = Nmg}$$

באמצעות עקרון זה ניתן גם להוכיח נוסחאות כגון אלו המופיעות בבעיות 4-6:

בעיה 4

נתייחס לבועת סבון כדורית דקה בעלת רדיוס r המכילה אוויר. שטח הפנים של הבועה: $S = 4\pi r^2$. נתון כי האנרגיה הקשורה למתח הפנים של הבועה ניתנת על-ידי:

$$W = \sigma \cdot S$$

σ - מקדם מתח הפנים שאופייני לכל חומר. כמו כן, הכח שמפעיל שטח הנוזל על האוויר הכלוא בבועה ניתן על-ידי מכפלת מקדם מתח הפנים (σ) בהיקף הבועה (L):

$$F = \sigma \cdot L$$

חשב מהו הלחץ הנוצר על האוויר על-ידי מתח פנים בתוך בועה כדורית בעלת רדיוס r.

פיתרון

הכח שמפעיל מתח הפנים ניתן על-ידי מכפלת שטח פני הבועה בלחץ p בתוך הבועה. לכן כאשר מקטינים את רדיוס הבועה ב δr, העבודה שמבצע מתח הפנים ניתנת על-ידי:

$$\delta W_1 = 4\pi r^2 p\delta r$$

עקב השינוי ברדיוס משתנה גם האנרגיה הקשורה למתח הפנים של הבועה. מכיוון שלבועה דקה יש שני משטחים (חיצוני ופנימי) בעלי רדיוס כמעט שווה, יש לכפול ב 2 את האנרגיה:

$$\delta W_2 = 2\sigma 4\pi[(r-\delta r)^2 - r^2] = -16\pi\sigma r\delta r$$

(מזניחים $(\delta r)^2$).

על-פי עקרון שיטת העתקים הקטנים:

$$\delta W_1 + \delta W_1 = 0$$

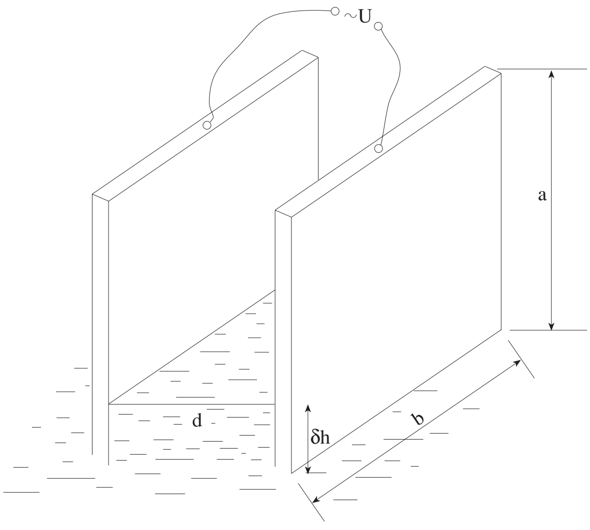
$$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 p\delta r - 16\pi\sigma r\delta r = 0$$

וכתוצאה נקבל:

$$\boxed{p = \frac{4\sigma}{r}}$$

בעיה 5

בכלי רחב נמצא נוזל בעל מקדם דיאלקטרי ε. שני מוליכים מלבניים נמצאים במגע עם פני הנוזל. המרחק בינהם הוא d, וביניהם קיים גם מתח קבוע U (ראה תרשים מס׳ 4). מהו גובה הנוזל δh בין המוליכים במצב שיווי משקל?



תרשים 4

פיתרון:

נניח שהנוזל עולה ב δh. כאשר פני הנוזל עולים לגובה δh, מרכז הכובד שלו עולה לגובה $\frac{\delta h}{2}$ (כמו במקרה של מוט המונח על מישור אופקי ומעבירים אותו למצב אנכי). נזניח את השינוי במסת הנוזל:

$$\delta W_1 = -mg\frac{\delta h}{2} = -\frac{1}{2}\rho ghdb\delta h$$

עבודת כוחות השדה החשמלי:

$$\delta W_2 = \frac{U^2}{2}\delta C$$

השינוי בקיבול הוא רק בתחום δh. הוא שווה איפוא ל:

$$\delta C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} - \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

מכאן ש:

$$\delta C = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 b}{d}\delta h$$

וגם:

$$\delta W_2 = \frac{1}{2}U^2\frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 b}{d}\delta h$$

מן העיקרון:

$$\delta W_1 + \delta W_2 = 0$$

מתקבל:

$$\boxed{\delta h = \frac{U^2(\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{\rho g d^2}}$$

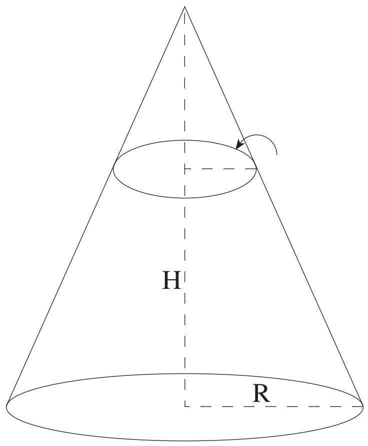
מומלץ לנסות לפתור תרגילים אלו, לא רק בדרך שהראינו כאן, אלא גם על-ידי שיטות אחרות, כדי להשתכנע שזו דרך יעילה ונוחה.

לחידוד המוח:
מורים המוצאים עניין בגישות בלתי שיגרתיות בפתרון בעיות בפיסיקה מוזמנים לפתור את הבעיה הבאה על-פי העיקרון שהוסבר במאמר זה:

בעיה 6

לולאה אלסטית בעלת מסה m נמצאת במצב מנוחה במישור אופקי על חרוט חלק וישר שגובהו H ורדיוס בסיסו R. יש למצוא את המתיחות של הלולאה. (ראה תרשים 5).

תשובה: $T = \frac{mgH}{2\pi R}$



תרשים 5

כותב המאמר מזמין את המורים לשלוח אליו את פתרונותיהם לבעיה זו.
כתובת: ולדימיר בודיק, הגיבורים 33ב, חדרה.
פיתרונות מעניינים יפורסמו בגיליון הבא של תהודה.

השתלמויות בפיסיקה למורים בחטיבה העליונה של בית הספר העל-יסודי שיערכו בקיץ תשנ״ג במחלקה להוראת מדעים במכון ויצמן למדע

הקורס	הספרים הדרושים*	תקופת הקורס	מיקום הקורס**
פיסיקה מודרנית 56 שעות	נושאים בפיסיקה של המאה העשרים	22.6 - 24.6 ; 27.6 - 28.6 ; 30.6 - 1.7	1
מכניקה (על פי תוכנית הלימודים החדשה) 80 שעות	רכישה במהלך הקורס	21.6 - 24.6 ; 27.6 - 28.6 ; 30.6 - 1.7 ; 4.7 - 5.7	1
אור וגלים (לכיתות י׳) 64 שעות	אור וגלים אור וגלים - מדריך למורה (חלק א)	21.6 - 24.6 ; 27.6 - 28.6 ; 30.6 - 1.7 ;	2
גלים ולייזרים 56 שעות	גלים ואופטיקה פיסיקלית אור וגלים - מדריך למורה (חלק ב)	4.7 - 8.7 ; 11.7 - 12.7 ;	2

* כל הספרים בהוצאתנו, וניתן לרוכשם בחנויות הספרים. נא להצטייד בהם מראש.
** 1 - המחלקה להוראת המדעים, בניין מדרשת פיינברג, מכון ויצמן למדע, רחובות, בשעות 08.30 - 15.00 .
2 - ביה״ס התיכון ע״ש בליך, רח׳ המאה ואחד, רמת-חן, רמת-גן, בשעות 08.30 - 15.00 .