



# ממדף הספרים

## המשפט האחרון של פרמה

החידה ששיגעה את המוחות המבריקים ביותר בעולם במשך 358 שנים\*

סיימון סינג, תרגום מאנגלית: עודד שכטר, הוצאת ידיעות אחרונות  
אלכס לובוצקי, המכון למתמטיקה, האוניברסיטה העברית, ירושלים

שבה הודפסו גם הערות השוליים של פרמה. נוהג זה מוכר היטב בהתפתחות דף התלמוד; הערות בכתב-יד במהדורות ישנות הופכות לעתים לפירוש מודפס במהדורות חדשות. במתמטיקה זה הרבה פחות מקובל. רבות מהערותיו של פרמה היו הצהרות על טענות בלא לספק להן הוכחה. לכולן, פרט לזו שהבאנו כאן, הצליחו המתמטיקאים לשחזר הוכחות, וכך נשארה טענה זו כבעיה פתוחה: "המשפט האחרון של פרמה" - משפט שנטען אך הוכחתו (אם קיימת בכלל) נלקחה עם פרמה אל קברו.

בעצם קשה להבין למה הבעיה הזאת הפכה לבעיה המפורסמת ביותר בעולם המתמטיקה: אולי בגלל פשטותה, אולי בגלל הצהרתו של פרמה שיש לו הוכחה מופלאה. מכל מקום, הבעיה הציתה את דמיונם (שלא לומר, שיגעה את מוחם) של מתמטיקאים בכל העולם יותר מ-300 שנה. המוזר בכל העניין הוא שהבעיה לא ממש מרכזית וחשובה, ואין לה בפני עצמה שימושים או השלכות לנושאים אחרים. לא קשה להצביע על בעיות נוספות במתמטיקה שהן פשוטות לניסוח ולהבנה, והמתמטיקה חסרת אונים מולן. מדוע נהפכה דווקא בעיית פרמה לאגדה?

לשאלה סוציולוגית-תרבותית-פסיכולוגית זו סינג לא מספק תשובה. הוא רק מתאר באופן מרתק את השתלשלות הבעיה ופתרונה לבסוף, לפני שנים אחדות. בדרך לפתרון הבעיה פותחו שטחים חדשים של המתמטיקה, החשובים בהרבה מן הבעיה המקורית. סינג מנצל את ההזדמנות לקחת את הקוראים לסיור מרתק בתולדות המתמטיקה.

במדעים אחרים מקובלת מאוד כתיבה פופולרית, המביאה לקהל הרחב את ההישגים העדכניים של הדיסציפלינה. לא כך במתמטיקה. המתמטיקה זכתה לפריחה עצומה במחצית השנייה של המאה העשרים, והגיעה להישגים שקודמינו לא

בהקדמה למהדורה העברית של הספר כותב עמוס נוי: "גם מתמטיקאים הם בני אדם אלא שהם מסתירים זאת היטב, גם הם, כמובן, בשעה שהם עוסקים באחד המקצועות הקשים בעולם, מתחבטים, מתלבטים, מתבססים על אינטואיציה ותחושות בטן, שוגים - אלא שאת תוצאות המאמץ המפרך הזה הם מתרגמים לבסוף באדיקות למסמך כמו-משפטי, כתוב בשפה חמורת סבר, מנוסח על פי כללים רטוריים נוקשים וקפדניים, ונעדר לחלוטין כל קשר לתהליך היצירה שלהם עצמם, על התובנות שהנחו אותם וחיפושי הדרך והכישלונות שליוו את דרכם".

סינג מנסה, ובמידה רבה גם מצליח, להפיח רוח בעצמות היבשות. הספר עוסק בבעיה שהעסיקה את עולם המתמטיקה כ-360 שנה. תחילתה בפייר דה-פרמה (Pierre de Fermat), שופט צרפתי שחי במאה ה-17 ואשר בשעותיו הפנויות השתעשע במתמטיקה ותרם לה תרומות משמעותיות, שחרתו את שמו באותיות זהב בהיכל הנצח של המתמטיקה.

פרמה, כשלמד את התרגום הלטיני של הספר אריתמטיקה מאת דיאופנטוס (חי כ-500 שנה לפנינו!), רשם הערות בשולי הדף. אחת מהן אמרה: "לכל מספר שהועלה בחזקה גדולה מ-2 אין בנמצא שני מספרים שהועלו באותה חזקה, שסכום החזקות יהיה שווה לחזקה הראשונה". במלים אחרות: לעומת המשוואה  $x^2 + y^2 = z^2$  שיש לה הרבה פתרונות במספרים שלמים חיוביים, כמו לרוגמה  $3^2 + 4^2 = 5^2$  או  $5^2 + 12^2 = 13^2$ , הרי למשוואה  $x^n + y^n = z^n$ , אין פתרונות כאלה אם  $n$  גדול מ-2. ואז הוסיף פרמה: "יש לי הוכחה מופלאה לטענה זו, אלא ששולי הספר צרים מלהכילה".

הערות אלה של פרמה היו יורדות לתהום הנשייה אלמלא העובדה שבנו של פרמה, אשר ידע לזהות את חשיבות הערותיו של אביו, פרסם לאחר מותו מהדורה חדשה של "אריתמטיקה"

\* Simon Singh, Fermat's Last Theorem: The story of a riddle that confused the world's greatest minds for 358 years. London, Fourth Estate, 1997.

שיערום, ואולם רק מעט מזה זכה לכיסוי בספרות הפופולרית, וגם זה בעיקר בתחומים הקשורים למדעי המחשב. אחת הסיבות לכך היא ההפשטה הרבה. המתמטיקה המודרנית כל כך מופשטת, שאפילו מתמטיקאים מקצועיים מתקשים לעקוב אחר התפתחויות מחוץ לתחומם. מעניין אולי להשוות את תהליך ההפשטה שעברה המתמטיקה לתהליך דומה שעברה האמנות הוויזואלית: גם האחרונה מתקשה לעיתים לדבר אל ליבו של הקהל הרחב. באמנות ניתן להתווכח אם ההפשטה הרבה אכן תורמת. במתמטיקה העניין הוכרע: הנושאים והשיטות המופשטות שהוכנסו בעשורים האחרונים הפכו לאבני יסוד בפתרון בעיות בסיסיות וקונקרטיות, שהכלים הישירים לא יכלו להם.

פתרונו של אנדרו ויילס (Andrew Wiles) לבעיית פרמה לפני כמה שנים ממחיש זאת: ויילס משתמש בכלים של גיאומטריה מופשטת ביותר. בתחילת דרכה גיאומטריה זו זכתה לביקורת רבה, אולם עם הצלחה אי אפשר להתווכח: כשגיאומטריה זו נתנה פתרון לבעיות ישנות, נאלצו הכל להודות ביתרונותיה. וכך ממשיכה המתמטיקה במירוצה למחוזות שהם יותר ויותר קשים להסברה ולהמחשה לקהל הרחב.

ייתכן שסינג מצא את מפתח הזהב: הספר שלו הוא לא כל כך על מתמטיקה כפי שהוא על מתמטיקאים. סינג מתמקד באנשים שעושים את המתמטיקה בדרמות, באובססיות, במירוץ, בכישלונות ובהצלחות. לאורך הסיפורים האישיים הוא משלב בחן די הרבה מתמטיקה, כך שבסך הכל מתברר שגם ספר מתמטי יכול להיות ספר מתח.

סיפורה של בעיית פרמה מספק חומרים דרמטיים בשפע; החל בפיתגורס ובחבורתו שבמידה רבה אחראים (ם) לתור הזהב של המתמטיקה בתקופה היוונית ושהישגיהם המתמטיים מרשימים אפילו בקנה מידה של היום. אותו פיתגורס - כך מסופר - דן את תלמידו היפסוס למוות בטביעה לאחר שהאחרון טען שהשורש של 2 אינו מספר רציונלי. טענה זו קילקלה למורה הדגול את תמונת העולם השלמה וההרמונית, וחיסולו של התלמיד נראה כפתרון הולם. התלמיד הוטבע אמנם בים אבל צדקתו צפה על פני המים, ולאחר מותו של פיתגורס הוכרה ככונה.

וכך גם דמותו הציורית של פרמה, שבשעות היום דן כמרים סוטים למוות ובשעות הפנאי השתעשע במתמטיקה. מעניין סיפורה של סופי גירמן, שתרמה תרומה משמעותית לבעיה, אולם לאורך זמן הסתירה את זהותה והסתתרה מאחורי שם גברי, שכן אחרת מי היה מתייחס ברצינות לעבודותיה של אישה. נוגעת ללב במיוחד אישיותו של יוטקה טניימה,

המתמטיקאי היפאני הצעיר שפעל בשנות ה-50. בדיעבד התברר שעבודתו ורעיונותיו, שכלל לא נראו קשורים לדעות פרמה, היו המפתח לפתרונו בשנות ה-90. טניימה עצמו התאבד ב-1958 מסיבות לא ברורות, ולא זכה לראות בתהילתו.

ב-1993 הכריז אנדרו ויילס כי הוא פתר את בעיית פרמה על ידי כך שהוכיח השערה של טניימה - שימונה, שכבר קודם לכן הוכח כי פתרונו יגרוור בעקבותיו גם את פתרון בעיית פרמה. הצהרתו יצרה גל התרגשות בעולם והיני-יורק טיימס דיווח על כך בשער העיתון, אולם הסאגה לא הסתיימה. גם בעבודתו של ויילס התגלתה שגיאה, והיתה תחושה שהוא יצטרף לרשימה המפוארת של מתמטיקאים שמצאו הוכחות שגויות למשפט פרמה, אבל פיתחו בדרכם תיאוריות חשובות בהרבה. אלא שוויילס - שבעיית פרמה היתה בשבילו אובססיה ילדות - לא אמר נואש. בשנתיים של עבודה מאומצת הוא הצליח לתקן את ההוכחה, ואגדת פרמה הגיעה לסיומה. המשפט אכן נכון ומוכח. קשה להאמין שלפרמה אכן היתה הוכחה משלו - סביר יותר שהוא חשב שיש לו הוכחה וגם זו היתה מוטעית. אולם, מי יודע, ייתכן שלבסוף תימצא הוכחה שמשתמשת רק בכלים שהיו ידועים במאה ה-17.

סינג מספר בכישרון רב את הסיפורים הללו, ובדרך מספר בעצם את תולדות המתמטיקה ושולה פנינים רבות מים עשיר זה. כך זוכים הקוראים להיכרות עם דמותו המופלאה של אווריסט גלואה (Evariste Galois), שבגיל 21, בלילה לפני יציאתו לדו-קרב שבו העריך כי יסיים את חייו, כתב עמודים רבים של מתמטיקה שהשאירו מורשת מפוארת לעולם המתמטיקה (הייתכן שבשל כך היה עייף והפסיד בדו-קרב?), כך אנו. לומדים גם על החלומות על הילברט, גדול המתמטיקאים בתחילת המאה, למצוא אקסיומטיזציה מלאה של המתמטיקה. חלום זה נופץ בידי גֵדֵל (Gödel), ועור ועוד. הקשר של חלק מהנושאים לבעיית פרמה הוא רופף, וברור שלא הובאו אלא כרי לספר עור סיפור מעניין על מתמטיקה או מתמטיקאים, בין כך ובין כך יוצאים הקוראים נשכרים. התרגום לעברית של עודד שכטר קריא וקולח, אבל לא חף משגיאות. תרגום ספרות מדעית מציב אתגר בפני המתרגמים. ספר מדעי פופולרי אינו צריך להיות רווי בפרטים, וחוסר השלמות היא לפעמים יתרונו, אולם אסור שיכיל פרטים בלתי נכונים. כך, למשל, הטענה בעמוד 36 שכל המספרים המושלמים הם בצורה מסוימת - כאשר זה ידוע רק עבור המספרים המושלמים הזוגיים. ואכן בהמשך, בעמוד 343

מוזכרת הבעיה הפתוחה - האם כל מספר מושלם הוא זוגי. לא בדקתי, וייתכן ששגיאה זו תורגמה מהמקור. דוגמה לתרגום לא מוצלח הוא "צורה מודולרית", למושג שכבר שנים רבות מקובל בקהילה המתמטית הישראלית לקרוא לו "תבנית מודולרית". האקדמיה ללשון עברית החליטה לפני כמה שנים על מכלול שלם של מונחים עבריים למושגים מתמטיים (והמילון אפילו פורסם ב"רשומות" - כך שהפך לחוק המדינה), גם אם אין כאן הלכה למשה מסיני, מן הראוי להשתמש במונחים כפי שכבר השתמשו בשפה העברית המקצועית. שגיאה משעשעת בתרגום מופיעה בעמ' 360: המחבר מסביר מהי טופולוגיה. זה התחום המתמטי העוסק בגופים וצורות, אבל מתעניין רק ביתרונותיהם הנשמרים על ידי כיווץ ומתיחה. גופים במרחב עם אותו מספר חורים שקולים זה לזה. המתרגם מצטט את אמירתו השנונה של גיון קלי: "טופולוג הוא מישהו שאינו מבחין בין ספל קפה לסופגנייה", אלא שבאנגלית דובר בדונאט (doughnut) - הסופגנייה האמריקאית בעלת החור (שצורתה כצורת הכעך/בייגל הישראלי). סופגנייה זו אכן שקולה טופולוגית לספל קפה שיש בו חור אחד, בידיית ההחזקה, אולם התרגום העברי

חסר משמעות, שכן לסופגנייה אין שום חור. הטופולוג הישראלי יבחין בין סופגנייתו לספל הקפה שלו, אבל לא יבחין בין ספל הקפה לבין הבייגל. למרות פגמים קטנים אלה ואחרים בסך הכל הספר נפלא, ולכך הסכימו גם כמה ידידים - שאינם אנשי מדעי הטבע - שקראו את הספר. חלקם דילגו על קטעים מסוימים שהיו טכניים מדי לטעמם, אולם בולם הסכימו שהמחבר קיים את הבטחתו: לקחת את הקוראים למסע מרתק בתולדות המתמטיקה, וכדבריו: "אם אתם שונאים מתמטיקה כבר 30 שנה ואף פעם לא הבנתם על מה הרעש, הנה ספר שיוכל להוביל אתכם לתוך העסק".

### הכרת תודה

אנו מודים לפרופסור אלכס לובוצקי ולמיכאל הנדלזלץ עורך מדור ספרים ב"הארץ" על הרשות שנתנו לנו לפרסם את הכתבה ב"תהודה";  
הכתבה נלקחה ממדור "ספרים" בעיתון "הארץ" מיום

18.10.2000