על הקשר המסתורי שבין חוקי השימור והמספר π

דוד אגמון, המחלקה לפיסיקה, הטכניון

דוד אגמון

מבוא:

העובדה המפתיעה והכמעט בלתי נתפסת שניתן לחשב את המספר טרנסצנדנטי π בדיוק רצוני בהתבסס על שיקולים פיזיקליים דטרמיניסטים ידועה ומוכרת כבר כמה עשרות שנים [G. Galperin 2003].

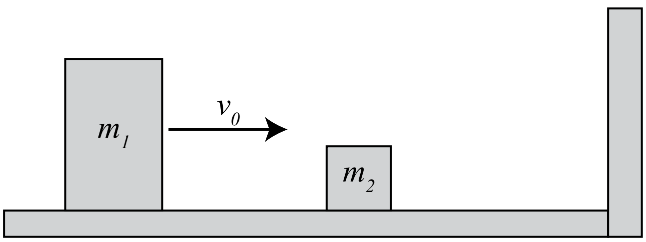
ההוכחות לכך הן אמנם אלגנטיות, מקוריות ופורצות דרך, אך מאידך די מורכבות וארוכות.

במאמר קצר זה נביא דרך חדשה, פשוטה וברורה יותר להוכיח זאת בהתבסס בעיקר על שיקולים פיזיקליים של חוקי שימור וסימטריה. נדון תחילה בגישה מקורבת ובהמשך נביא הסבר מדויק יותר.

המלצה: התחברו תחילה לקישור: קישור ל YouTube

הצגת הבעיה:

על משטח אופקי וחלק החסום בקיר אלסטי מוצבים שני בולים שמסותיהם m_1, m_2 ונתון ש $m_1 >> m_2$ כמוראה בתרשים 1. מעניקים לבול הכבד, m_1, מהירות התחלתית v_0 ביחס למשטח והוא נהדף לעבר הבול הקל, מתנגש בו באופן אלסטי לחלוטין, ומאט מעט את תנועתו. הבול הקל נהדף אל הקיר האלסטי ומוחזר ממנו באותה המהירות (מבחינת הגודל) ושב ומתנגש בבול הכבד הנע לעברו וחוזר חלילה. אחרי סדרה של n התנגשויות נהדף הכדור הכבד לאחור כשהוא "בורח" מהבול הקל.



תרשים 1

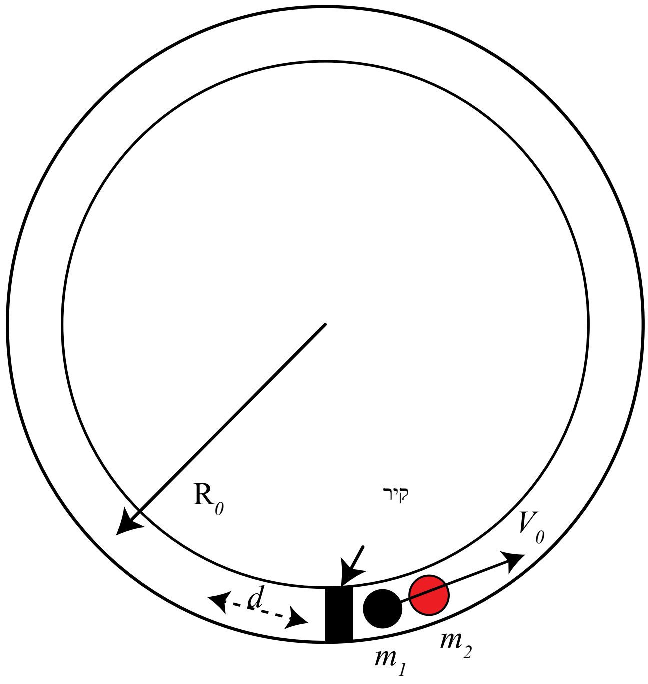
טענה: מספר ההתנגשויות, n, בנוי מהספרות של המספר π. קרי: $n = 314159.....$ וככל שיגדל היחס בין מסות הבולים: $N \equiv m_1 / m_2$, כך גם יתרבו ההתנגשויות ואיתן הספרות הבונות את π.

דיון איכותי

על מנת לפשט את החישובים נעבור למערכת שקולה הבנויה מצמד כדורים נקודתיים המתגלגלים ללא חיכוך בתוך צינור טבעתי המרותק לרצפה אופקית. מחיצה דקה המהווה קיר חוסם אלסטי מוצבת בתוך הצינור (כמוראה בתרשים 2). נזכיר שבהתנגשות אלסטית גודל המהירות היחסית שבין צמד הכדורים נשמר. היות שמסת הכדור הכבד גדולה פי N ממסת הכדור הקל (כאשר $N \approx 10^{12}$ ואף הרבה יותר) הרי שמהירותו בכל התנגשות כמעט שאינה משתנה ונותרת בקירוב מצוין v_0 גם לאחר מספר רב של התנגשויות. ולכן הכדור הקל נהדף במהירות $2v_0$ כשבשלב הראשון (שלב I) ובכל התנגשות נוספת מהירותו של הכדור הקל גדלה ב-$2v_0$ כך שאחרי כמה מאות אלפי התנגשויות התנע שלו ישתווה בגודלו לתנע של הכדור הכבד. במצב זה בו לשני הכדורים תנע שווה בגודלו והפוך בכיוונו, התנע הכולל ביחס לרצפה הוא אפס כלומר זוהי

מערכת מרכז המסה. מכאן יתחיל שלב II בו הכדור הכבד יתחיל לחזור לכיוון נקודת המוצא כשהכדור הקל שב וחובט בו ומחזיר לו את האנרגיה אותה הוא רכש בשלב I. מהעובדה שהאנרגיה הקינטית של המערכת נשמרת נסיק שהמערכת אינוואריאנטית תחת היפוך זמן[1] ולכן מספר ההתנגשויות בשלב I ישתווה למספרן בשלב II.

הדרך שיעשה הכדור הכבד בשלב II תשווה להיקף הצינור פחות המרחק הקטן ביותר מהקיר שאליו הוא יגיע בשלב I (מסומן ב- d בשרטוט). ככל שמסת הכדור הכבד גדולה יותר, כך הוא יגיע קרוב יותר לקיר בשלב I והדרך שהוא יעבור בשלב II תשאף להיקף הטבעת: $S \to 2\pi R_0$. בגבול בו $N \to \infty$ הדרך שיעבור הכדור הכבד תתלכד עם מרחק זה (הכדור הכבד יגיע למרחק זעיר מהקיר לפני שהוא יתחיל לנוע לכיוון השני). דרך זו בנויה ממאות אלפי מקטעים שבהם מתקדם הכדור הכבד בין התנגשות להתנגשות. והיות שמחד המרחק לקיר הולך וקטן ומאידך המהירות היחסית בין הכדורים גדלה בטור חשבוני הרי שגודל המקטעים הולך וקטן ושואף במהירות לאפס. וכאמור מתקיים אחרי n התנגשויות:



תרשים 2: *הכדור הכבד m_1, מתנגד אלסטית במהירות v_0 בכדור הקל m_2 שנמצא במנוחה. הכדור הקל נהדף ומתנגש אלסטית בקיר החוסם ושב ומתנגד ב m_1 וחוזר חלילה. הצינור מחובר לרצפה ומהווה את מערכת הייחוס. d הוא המרחק המינימלי שיווצר בין m_1 והקיר החוסם*

$$S(\mathrm{n}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \Delta S_k \to 2\pi R_0 \qquad 1.$$

כאשר ΔS_k הוא שיעור ההתקדמות של הכדור הכבד בפרק הזמן שבין ההתנגשות ה- k וה-k+1 ו n הוא מספר המקטעים השווה גם למספר ההתנגשויות. במאמר זה נוכיח שהמספר n בנוי מהספרות מובילות של המספר הטרנסנדנטי π, וכשמגדילים הדרגתית את מסת הכדור הכבד, מתקבלות יותר ויותר התנגשויות ובמקביל מתווספות עוד ועוד ספרות ל n על פי סדר הספרות של π.

דיון כמותי מקורב

נבחר צינור טבעתי שרדיוסו R_0 ונעניק לכדור הכבד מהירות התחלתית v_0 ביחס לרצפה. בהנחה שמדובר בכדורים נקודתיים ושמתקיים: $m_1 = \mathrm{N}m_2$ כאשר $\mathrm{N} >> 1$, אזי מהירות הכדור הקל בעקבות ההתנגשות הראשונה תהיה $2v_0$ הוא ייהדף לאורך מסלול טבעתי שאורכו $S_0 = 2\pi R_0$, יתנגש בקיר האלסטי וייהדף בחזרה באותה המהירות וישוב ויתנגש בכדור הכבד שהמשיך בינתיים לנוע במהירות קרובה מאוד למהירותו המקורית. הדרך הכוללת שעברו שני הכדורים עד להתנגשות השנייה היא $2S_0$ כשהמהירות היחסית ביניהם היא $3v_0$ ולכן הזמן שיחלוף עד להתנגשות השנייה יהיה: $t_1 = \frac{2S_0}{3v_0} \equiv \frac{2}{3}T_0$ (כאשר $T_0 = S_0 / v_0$ הוא הזמן שנדרש לכדור הכבד להשלים הקפה מלאה אחת) במשך זמן זה התקדם הכדור הכבד בשיעור של $\Delta S_1 = v_0 t_1 = \frac{2}{3}S_0$ וצמצם את מרחקו לקיר לכדי $\frac{1}{3}S_0$. כתוצאה מההתנגשות השנייה מהירות

1 נזכיר שבמערכת מכנית שבה לא נוצר חום בגין חיכוך משוואות התנועה הן אינוואריאנטיות תחת היפוך זמן ולכן אם "נסריט" לאחור את תהליך ההתנגשויות לא נוכל להבחין איזה תהליך התרחש קודם.

הכדור הקל תגדל בעוד $2v_0$ ותגיע ל $v_2 = 4v_0$ כך שהמהירות היחסית כעת תעמוד על $5v_0$ ולכן הזמן שיעבור עד להתנגשות השלישית הוא: $t_2 = \frac{2\left(\frac{1}{3}S_0\right)}{5v_0} = \frac{2}{15}T_0$ ובזמן זה התקדם הכדור הכבד בשיעור: $\Delta S_2 = v_0 t_2 = v_0 \frac{2}{15} T_0 = \frac{2}{15} S_0$ וכו'. אם ממשיכים בדרך זו מתקבלת בקלות נוסחת טור לצעד ה-k.

2. $$\Delta S_k = \frac{2S_0}{(2k)^2 - 1} = S_0 \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{15}, \frac{2}{35}, \frac{2}{63} .... \right\}$$

והמרחק הכולל שעובר הכדור הכבד עד לתחילת נסיגתו בשל n התנגשויות יהיה שווה לסכום כל המקטעים:

3. $$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = S_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k)^2 - 1} = 2\pi R_0 \left\{ \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + ... \right\}$$

הזמן הכולל עד לרגע הנסיגה:

4. $$T(n) = \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = T_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k)^2 - 1} = \left(\frac{2\pi R_0}{v_0} \right) \left\{ \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + ... \right\}$$

קל להראות, בעזרת אינדוקציה למשל, שסכום אברי הטור שבסוגריים מתכנס לביטוי הפשוט הבא:

5. $$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k)^2 - 1} = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + ... \right\} = \frac{2n}{2n+1} \to 1$$

ולכן הדרך הכוללת שעובר הכדור הכבד אחרי n התנגשויות היא:

6. $$S(n) = 2\pi R_0 \left(\frac{2n}{2n+1} \right) < 2\pi R_0$$

נסמן את ההפרש שבין אורך של הקפה מלאה ואורך הדרך שב (6) ב- Δ ונקבל עבור $n >> 1$:

7. $$\Delta = 2\pi R_0 - 2\pi R_0 \left(\frac{2n}{2n+1} \right) = 2\pi R_0 \left(\frac{1}{2n+1} \right) \to \frac{\pi R_0}{n}$$

ומכאן מתקבל ביטוי מפורש למספר ההתנגשויות בגבול בו $n >> 1$:

8. $$n \to \pi \left(\frac{R_0}{\Delta} \right)$$

ומכיוון ש n הוא, על פי הגדרתו, מספר שלם, אזי רק חלק מהספרות של π יכלל במספר ההתנגשויות. אם למשל היחס: $\left(R_0 / \Delta\right) = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ אזי בהתאמה יתקבלו ל n הערכים הבאים:

9. $$\mathrm{n} = 314,\ 3141,\ 31415,\ 314159$$

הערות:

א. ממשוואה (4) ניתן להסיק שהזמן שלקח לכדור הכבד להגיע לקיר שואף ל T_0 שהוא גם הזמן המדויק הנדרש לו להגיע לקיר בתנועה רציפה ללא התנגשויות וזה נראה על פניו מוזר ולא הגיוני, כי מאות אלפי ההתנגשויות עם הכדור הקל היו אמורות לכאורה לעכב אותו. ההסבר לכך נעוץ בעובדה שכאשר מסת הכדור גבוהה מאד (למשל $N = 1.6 \cdot 10^{11}$) אזי גם אחרי 1000 התנגשויות מהירותו משתנה אך במעט - בכאלפית האחוז בעוד הדרך שהוא הספיק כבר לעבור מהווה 99.95% מהדרך הכוללת. כך שכל מאות אלפי ההתנגשויות הבאות מתרחשות לאורך מקטע זעיר ובפרק זמן קצר השואף לאפס כש N שואף לאינסוף.

ב. תוכנית מחשב קצרה (שהליבה שלה מכילה רק 12 שורות!) שנכתבה ב MATLAB מאששת את הקביעות לעיל. בתוכנית החישוב הוא מדויק ולוקח בחשבון את פחיתת המהירות של הכדור הכבד ואין מניחים שהיא נותרת קבועה בכל ההתנגשויות.

חישוב מדויק ע"פ GALPERIN [1]

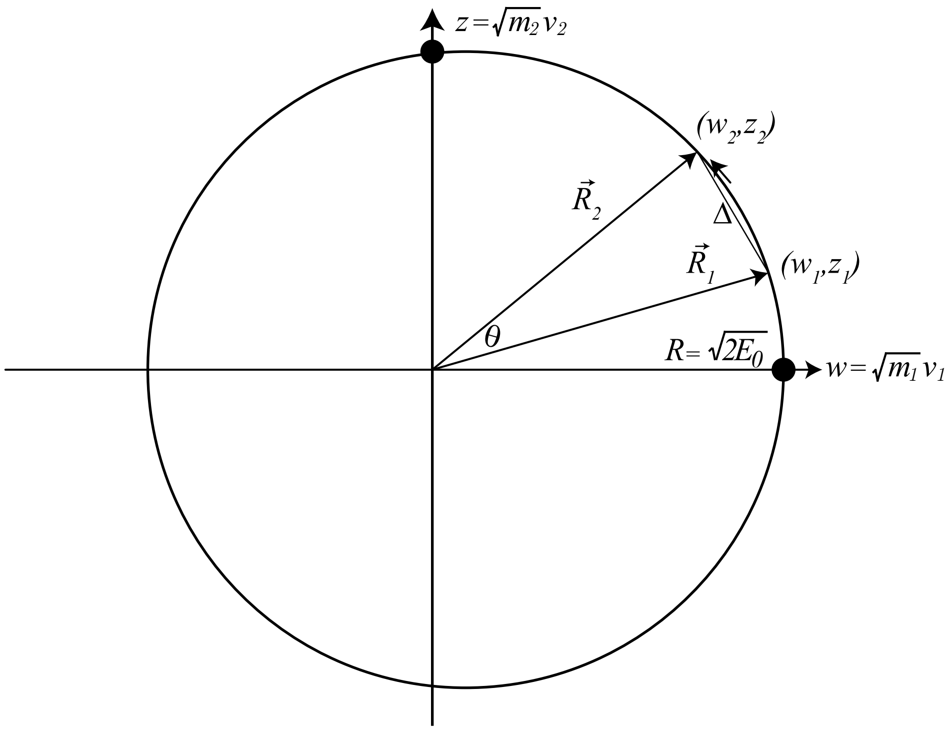
החישוב הקודם התייחס למקרים בהם היחס $\mathrm{N} \equiv m_1 / m_2 \to \infty$ כך שמהירות הכדור הכבד כמעט ואינה משתנה ולכן הוא עובר כמעט את כל הדרך במהירותו המקורית v_0. ובסעיף זה נדון במקרה הכללי ונחשב את מספר ההתנגשויות, n בתלות ביחס המסות N. לשם כך נעבור מהמישור הרגיל, מישור (x, y), למישור (w, z) המוגדר באופן הבא:

$$w \equiv \sqrt{m_1} v_1 \qquad z \equiv \sqrt{m_2} v_2 \tag{1}$$

שני חוקי השימור של התנע והאנרגיה הקינטית במישור זה יירשמו כך:

$$\sqrt{m_1} w + \sqrt{m_2} z = P_0 = \mathrm{N} m_2 v_0 \qquad w^2 + z^2 = 2E_0 \equiv R^2 = \mathrm{N} m_2 v_0^2 \tag{2}$$

קיבלנו, איפא, משוואת ישר ומשוואת מעגל שרדיוסו $R = \sqrt{2E_0} = \sqrt{\mathrm{N} m_2} v_0$. נקודות החיתוך של הישר והמעגל מייצגות את מהירויות צמד הכדורים בכל התנגשות וזאת בהסתמך על (1).



תרשים 3: *מישור (w, z) בו חוק שימור התנע מיוצג ע"י קו ישר וחוק שימור האנרגיה ע"י מעגל שרדיוסו שווה ל $\sqrt{2E_0}$. במישור זה ה"מרחק", Δ, בין שתי התנגשויות עוקבות הוא גודל קבוע וכך גם המרווח הזוויתי θ. בגבול בו $\mathrm{N} >> 1$ מתקבל $\theta = 2 / \sqrt{\mathrm{N}}$*

במישור זה הכדור הכבד יוצא מהנקודה ההתחלתית i ששיעוריה $(R, 0)$ במהירות v_0 ונע נגד מגמת השעון לנקודה הסופית $\mathrm{f}(0, R)$ שבה הוא נעצר רגעית כמתואר בתרשים 3. נספור כמה התנגשויות התרחשו במהלך תנועתו מ i ל f. לשם כך נבחר שתי התנגשויות עוקבות כלשהן שמתקיימות בנקודות (w_1, z_1) ו (w_2, z_2) ונוכיח שה"מרחק" ביניהן, קרי

אורך המיתר Δ, הוא גודל קבוע ולכן גם מרווח הזוויתי θ שבתרשים 3 הוא גודל קבוע. נעיר שבמישור (x,y) המרחק והזווית שבין שתי התנגשויות עוקבות אינם גדלים קבועים!

<u>טענה:</u> ריבוע ה"מרחק" שבין שתי התנגשויות עוקבות במישור (w,z) הוא קבוע:

3. $$\Delta^2 = (w_2 - w_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \text{const.}$$

<u>הוכחה:</u>

ניעזר בקשרים הנובעים מחוקי השימור המקשרים בין שתי התנגשויות אלו:

4. $$v_1(2) = 2V_c - v_1(1) \to w_2 = 2\sqrt{m_1}V_c - w_1 \quad v_2(2) = 2V_c + v_2(1) \;\to\; z_2 = 2\sqrt{m_2}V_c + z_1$$

כאשר $v_1(1), v_1(2)$ המהירויות של הכדור הכבד (מספר 1) בנקודות 2 ו 1 בהתאמה וסימון דומה יהיה גם למהירויות של הגוף הקל. V_c היא מהירות מרכז המסה של הצמד המוגדרת באופן הבא:

5. $$V_c = \frac{m_1 v_1(1) - m_2 v_2(1)}{m_1 + m_2} = \frac{\sqrt{m_1}w_1 - \sqrt{m_2}z_1}{m_1 + m_2}$$

נציב את ערכי w_2, z_2 מ (4) ב (3), ניעזר ב (5) ואחרי מעט אלגברה נקבל:

6. $$\Delta^2 = \frac{8m_2E_0}{m_1+m_2} = \frac{4\mathrm{N}m_2v_0^2}{\mathrm{N}m_2+m_2} = \frac{4\mathrm{N}m_2v_0^2}{\mathrm{N}+1} \;\to\; \Delta = \sqrt{\frac{N}{N+1}}2\sqrt{m_2}v_0 \to 2\sqrt{m_2}v_0 = \text{const.}$$

ומכיוון שאורך המיתר, Δ, קטן בהרבה מרדיוס המעגל, אורכו שואף לאורך הקשת המעגלית המחברת את צמד הנקודות שבתרשים 3 ומכאן נקבל שהמרווח הזוויתי בין כל שתי התנגשויות עוקבות:

7. $$\theta \to \frac{\Delta}{R} = \frac{2\sqrt{m_2}v_0}{\sqrt{\mathrm{N}m_2}v_0} = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{N}}}$$

הכדור הכבד ייעצר רגעית בנקודה f ששיעוריה $(w,z) = (0,R)$ היוצרת זווית של $\frac{1}{4}\pi$ עם נקודת ההתחלה ולכן מספר ההתנגשוות שיתרחשו בין נקודת ההתחלה והסיום של שלב I הוא:

8. $$n_{\mathrm{I}} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\theta} = \left(\frac{\sqrt{\mathrm{N}}}{8}\right)\pi$$

בשל הסימטריה תחת היפוך זמן, מספר ההתנגשויות הכולל גם את שלב II (בו הכדור הכבד נסוג לאחור לנקודת המוצא i בעוד שהכדור הקל ממשיך לחבוט בו) הוא כפול כלומר: $\mathrm{n_{II}} = \mathrm{n_I}$ ולכן המספר הכולל:

9. $$n = 2n_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\sqrt{\mathrm{N}}}{4}\right)\pi = \left(\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{16}}\right)\pi$$

ומכאן אם נדרוש ש $\mathrm{N} = 16\cdot 10^{2\mathrm{k}}$ כאשר k הוא מספר שלם נקבל:

10. $$n = \pi\left(10^{\mathrm{k}}\right)$$

והיות ו n הוא על פי הגדרתו מספר שלם, נקבל שיופיעו בו רק k הספרות הראשונות שאחרי הנקודה העשרונית של המספר π. אם למשל $\mathrm{k} = 5$ אזי נקבל ש n = 314159

הערה: אם רוצים למשל לקבל את 10 הספרות שאחרי הנקודה העשרונית אזי נדרוש ש: $\mathrm{N} = 16\cdot 10^{20}$ ואם נדרוש שהכדור הקל ישקול רק 1gr הכדור הכבד ישקול $m_1 = \mathrm{N}m_2 = 16\cdot 10^{17}\,\mathrm{kg} = 1.610^{15}\,\mathrm{ton}$

ואם נניח שפרק הזמן הממוצע בין התנגשויות עוקבות הוא $\Delta t = 0.1\text{s}$ אזי הזמן הכולל יהיה:

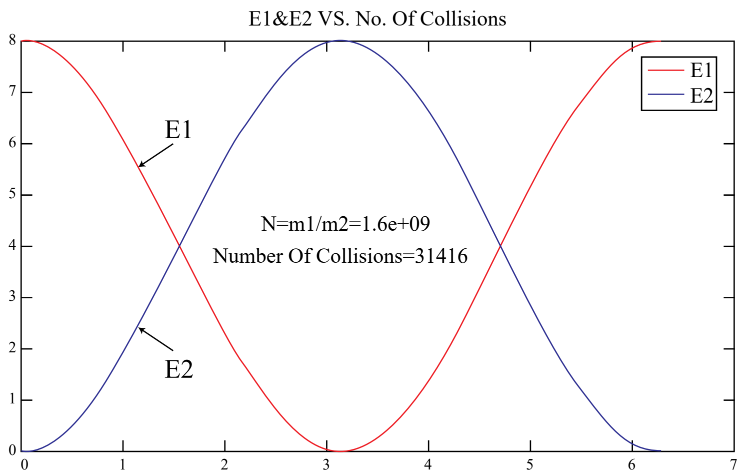
$$T = n\Delta t \approx 3.1\cdot 10^{10} 0.1 = 3.1\cdot 10^{9}\text{s} \approx 35\text{days}$$

מסקנה: גם במקרה האידיאלי של התנגשויות אלסטיות ללא חיכוך התהליך הזה לחישוב π הוא לחלוטין אינו מעשי! אם נניח שהמהירות ההתחלתית של הגוף הכבד היא רק $v_0 = 1\text{m/s}$, אזי האנרגיה הקינטית שלו תהיה כ 200,000 KTON של TNT פי כ- 15,000 מהפצצה האטומית שהוטלה על הירושימה...

סיכום

במאמר זה הראינו בשתי דרכים איך ניתן בעזרת מערכת פיזיקלית להפיק באופן איטרטיבי עוד ועוד ספרות של המספר הטרנסדנטי π. המסתורין של הקשר, הלכאורה תמוה, שבין מספר ההתנגשויות ובין π מוסר ברגע בו הראינו שמספרן יחסי ל π כלומר: $n = r\pi$ כשקבוע היחס r הוא מספר התלוי ביחס המסות N. לכן, אם נבחר את N כך שהקבוע r יהיה מהצורה: $r = 10^k$ הרי שבהכרח יובטח שמספר ההתנגשויות יהיה בנוי מהספרות העשרוניות של π.

נעיר שבדיעבד הבעיה נראית די טריוויאלית, אבל על הדרך, כערך מוסף, התמודדנו בבעיה מעניינת הקשורה בחוקי השימור של תנע, אנרגיה ובהיפוך זמן.



תרשים 4: *האנרגיה הקינטית של צמד הכדורים בתלות במספר ההתנגשויות. בשלב I בו הכדור הכבד נע נגד מגמת השעון הוא מוסר אנרגיה לכדור הקל ובשלב II מתהפכת המגמה והכדור הקל מחזיר את האנרגיה שצבר לכדור הכבד. מספר שווה של ההתנגשיות בכל שלב.*

מקורות

[1] G. GALPERIN “PLAYING POOL WITH π (THE NUMBER π FROM A BILLIARD POINT OF VIEW)“ REGULAR AND CHAOTIC DYNAMICS, V. 8, No. 4, 2003 [2] M. Z. Rafat and D. Dobie “Throwing π at a wall” arXive:1901.06260v1 [physics.class-ph] 17 jan 2019