הערכת השפעת עיוות הדחיסה בהפעלת כוח על גוף

יוסף שפירא[1]

הקדמה

בעודי נדרש לעזור לנכדי בפתרון בעיות בדינמיקה, עסקתי בבעיה מס. 2 בשאלון משנת 2009. פתרונה, כפי שהוצע באתר "אלף", מביא בחשבון את השפעת עיוות הגופים (דחיסתם) ואת השפעת האנרגיה האלסטית שדחיסה זו צוברת - בעת שחרורה.

שאלה זו אינה פשוטה: אנו פותרים בעיות בפיזיקה על ידי ייצוג במודלים שפירוטם מספיק לייצוג האפקטים ולניבוי התוצאות, אך לא יותר מכך. הכללת דחיסת הגוף מחייבת בניית מודל מורכב יותר, והיא מוצדקת רק אם יש לדחיסה זו השפעה כלשהי על התוצאה.

ובכן - החלטתי לנתח את השאלה במלואה ולהגיע לניסוח שיאפשר לבחון באופן פרמטרי את ההשפעה היחסית.

בעיות רבות בדינמיקה קשורות בדחיפה או במשיכה של גופים. לצורך ניבוי התוצאות אנחנו יוצרים מודל שבו הגוף מיוצג על ידי המסה שלו, בהנחה שהוא שומר על צורתו ועל החיכוך שלו עם משטח שאיתו הוא נמצא במגע.

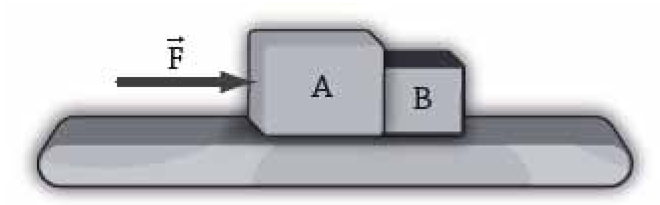
בפרק "כוחות וחוקי ניוטון", בשאלה 2 בשאלון בחינת הבגרות משנת 2009, מתבקשת שאלת הדחיסה של גוף קשיח תחת לחץ והשפעתה על הדינמיקה שלו. שאלה זו מחייבת הבהרה ובחינה:

- ההגדרה "גוף קשיח" המקובלת בפיזיקה מכוונת לגוף השומר על צורתו (גוף במצב מוצק), אך אין משמעה כי לא נגרמים לגוף כל עיוותים תחת לחץ או מתיחה. הכוחות האוחזים את חלקי הגוף יחדיו (אטומים ומולקולות) הם סופיים, ועיוותים בצורת הגוף נגרמים כתוצאה מהפעלת כוחות חיצוניים. עיוותים אלה עשויים להיות אלסטיים (משמרים) או פלסטיים, או קצת מזה וקצת מזה. (זוהי, בעיקרון, ההבחנה במצבי הצבירה של החומר: גז הוא גם דחיס וגם אינו שומר צורה; נוזל שומר נפח ו(כמעט) אינו דחיס; ומוצק שומר צורה ו (כמעט) אינו דחיס). "מקדם ההשתקמות" מגדיר את אחוז שימור האנרגיה המכנית בעת עיוות ונמדד, לדוגמה, בגובה שאליו חוזר כדור שהופל אל משטח קשיח.
- השאלה היא מה מידת ההשפעה של שחרור האנרגיה הנצברת בעיוות על הדינמיקה של המערכת. אם השפעתה מהותית - יש להרחיב את המודל הפשוט של "גוף" ולכלול מֵמדים ומקדמי עיוות בניתוח הבעיה; אם היא זניחה - סיבוך המודל אינו מוסיף לחיזוי ולהבנה. ניתן לצטט את משפטו של אלברט איינשטיין בהקשר זה: *"צריך לעשות את הדברים פשוטים ככל האפשר, אך לא יותר מכך".*

---

1 ד"ר יוסף שפירא הוא נשיא "קומ אנד סנס" (Comm&Sens), חברה לייעוץ איסטרטגי וייזמות בתחומי תקשורת אלחוטית, חישה אלקטרומגנטית והדמיה, וכן פרופסור אורח במכון הטכנולוגי של הודו במדרס. יוזם, תורם ופעיל בפרויקטים לחינוך מדעי-טכנולוגי של נוער.
קישורים: www.comm-and-sens.com, jshapira@netvision.net.il.

לצורך הערכה זו נבחן את המודל המתואר באותה שאלה (ראו איור 1). את הדחיסה בין גוף A ל-B נתאר על ידי קפיץ בין שני הגופים הנלחץ כתוצאה מהפעלת הכוח F ומהתנגדות גוף B. לאחר מכן נבטא את הקשר בין מקדם הקפיץ K, המייצג במודל את האלסטיות של הגופים A ו-B, לבין מקדם האלסטיות ("מודול יונג") λ הנתון של הגופים ונעריך באילו תנאים יש לאנרגיה האגורה בקפיץ השפעה שאינה זניחה על הדינמיקה של הגופים.



איור 1: השאלה - כוח F פועל על גוף A במשך t שניות.
הגוף נע ימינה על משטח אופקי עם מקדם חיכוך μ

נתונים:

גודל הכוח F=13N

מקדם החיכוך μ_k=0.1

מסות הגופים m_A=3kg, m_B=2kg

תחת הפעלת הכוח הקפיץ מתכווץ לכדי מרחק x. שני הגופים מואצים בתאוצה a.
מהו המרחק שינוע כל אחד מהגופים לאחר שהכוח מפסיק לפעול

- בגין האנרגיה שנאצרה בקפיץ?
- בגין האינרציה שלו?

ניתוח

משוואת הכוחות על גוף A: $F = Kx + m_A(\mu g + a)$

משוואת הכוחות על גוף B: $Kx = m_B(\mu g + a)$

נחלץ את a: $F = (m_A + m_B)(\mu g + a)$

$$a = \frac{F}{m_A + m_B} - \mu g$$

המרחק x שלאורכו התכווץ הקפיץ $x = \frac{m_B(a + \mu g)}{K} = \frac{m_B}{m_A + m_B}\frac{F}{K}$

האנרגיה האצורה בקפיץ $E_s = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{[m_B\,(a + \mu g)]^2}{2K} = \frac{\left(\frac{m_B}{m_A + m_B}\right)^2 F^2}{2K}$

ברגע שפעולת הכוח נפסקת (ונניח שההפסקה היא פתאומית, כפי שדורשת השאלה), ניתן לראות את מערכת הגופים כמערכת סגורה ולהפעיל את חוקי שימור האנרגיה והתנע. את המהירות שבה נעים הגופים בעת סיום פעולת הכוח (ולפני השתחררות הקפיץ) נציין כ-V_0.

$$V_0 = \frac{[F - (m_A + m_B)\mu g]t}{m_A + m_B}$$

2 כל אחד משני הגופים מתכווץ בהתאם לְמִמדיו ולתכונותיו, ולמען הדיוק צריך לייחס לכל גוף קפיץ. שני הקפיצים צמודים בטור אחד זה לזה ופועלים כקפיץ משולב. כיוון שלא נאמר אחרת, נניח כי הגופים שווי תכונות ונדון בקפיץ המשולב. בפרק "תובנות" נעיר על המקרה שבו התכונות של גוף אחד שונות בהרבה מאלה של הגוף האחד.

במהלך שחרור הקפיץ הגופים מתרחקים זה מזה, ומהירותם $V+v_A$, $V+v_B$ בהתאמה, כאשר V, מהירות מרכז המסה של שני הגופים בכל רגע, הוא

$$V = \frac{m_A(V+v_A)+m_B(V+v_B)}{m_A+m_B}$$

מהירותו של כל אחד מהגופים יחסית למרכז המסה היא v_A , v_B בהתאמה, ולכן מאחר שהמתקף שמפעיל הקפיץ בעת שחרורו הוא מתקף פנימי, מקבלים מחוק שימור התנע (ראו נספח) את המשוואה הזו:

$$m_A v_A = -m_B v_B$$

יש אבדן אנרגיה של מערכת הגופים בגין החיכוך על המרחק x, כך שבסיום מהלך שחרור הקפיץ, ולפני הינתקות הגופים זה מזה, תהיה המהירות של מרכז המסה של שני הגופים

$$V^2 = V_0^{\,2} - 2\mu g x$$

משוואת חוק שימור האנרגיה (בצד שמאל נמצא מאזן האנרגיה בעת הפסקת הכוח ולפני שחרור הקפיץ, ובצד ימין - המאזן ברגע הינתקות הגופים זה מזה):

$$\frac{1}{2}(m_A+m_B)V_0^{\,2}+\frac{1}{2}Kx^2=\frac{1}{2}m_A(V+v_A)^2+\frac{1}{2}m_B(V+v_B)^2+(m_A+m_B)\mu g x$$

האיבר האחרון מבטא את איבוד האנרגיה על פני מסלול פעולת הקפיץ (הדרך הקצרה x) בגין החיכוך, מרגע הפסקת הכוח ועד לרגע הינתקות הגופים. נפתח את המשוואה

$$\frac{1}{2}(m_A+m_B)V_0^{\,2}+\frac{1}{2}Kx^2 \\ =\frac{1}{2}(m_A+m_B)(V^2+2\mu g x)+m_A V v_A+m_B V v_B+\frac{1}{2}m_A v_A^{\,2}+\frac{1}{2}m_B v_B^{\,2}$$

נצמצם ונשתמש במשוואת התנע ונקבל

$$\frac{1}{2}Kx^2=\frac{1}{2}m_A v_A^{\,2}+\frac{1}{2}m_B v_B^{\,2}$$

זו משוואת האנרגיה במערכת ייחוס של מרכז המסה.

האנרגיה המוקנית לגוף A כתוצאה משחרור הקפיץ היא

$$\frac{1}{2}m_A v_A^{\,2}=\frac{\frac{1}{2}Kx^2}{1+\frac{m_A}{m_B}}$$

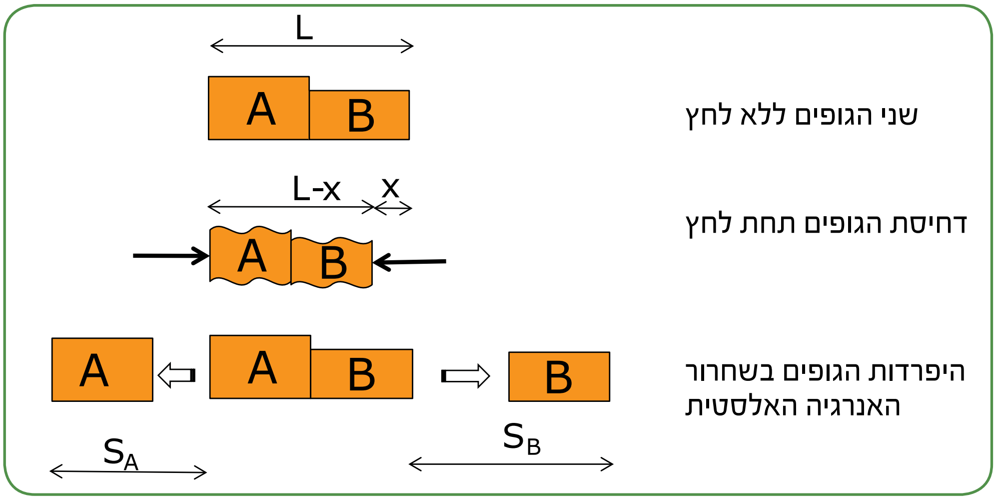
והדרך S_A שהיא תקנה לו (כנגד פעולת החיכוך) במערכת ייחוס מרכז המסה היא

$$\frac{1}{2}m_A v_A^{\,2}=m_A \mu g S_A$$

$$S_A=\frac{v_A^{\,2}}{2\mu g}=\frac{F^2}{K}\frac{m_B}{2m_A(m_A+m_B)\mu g}$$

והדרך S_B שהאנרגיה $\frac{1}{2}m_B{v_B}^2$ תקנה לגוף B תהיה, בהתאמה (בכיוון ההפוך. ראו איור 2)

$$S_B = \left(\frac{m_A}{m_B}\right)^2 S_A$$



איור 2: הדרך שעובר כל גוף בדחיסה ובהיפרדות

וסה"כ הדרך שיעברו שני הגופים במערכת הייחוס של מרכז המסה בהתרחקם זה מזה היא

$$S_A + S_B = \frac{F^2}{K}\frac{m_B}{2m_A(m_A+m_B)\mu g}\left[1+\left(\frac{m_A}{m_B}\right)^2\right]$$

נשווה מרחק זה עם הדרך S שיעבור מרכז המסה בגין המהירות V_0 שהוקנתה לו במהלך פעולת הכוח F

$$\frac{1}{2}(m_A+m_B){V_0}^2 = \frac{1}{2}\frac{[F-(m_A+m_B)\mu g]^2 t^2}{(m_A+m_B)} = (m_A+m_B)\mu g(\mathrm{S}+\mathrm{x})$$

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\frac{[F-(m_A+m_B)\mu g]^2 t^2}{(m_A+m_B)^2\mu g} - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{K}}$$

הדרך הכוללת שיעברו הגופים A, B היא אם כן $S+S_B$, $S-S_A$ בהתאמה.

לצורך השוואת הדרכים S_A+S_B ו-S נבחן את הפרמטר K, מקדם הקפיץ, המייצג את מקדם האלסטיות של הגופים.

החוק הראשון באלסטיות הוא "חוק הוק" שאנחנו מכירים כחוק הקפיץ $F=Kx$.

מקדם האלסטיות של גופים נקרא על שם יונג - מודול יונג - והוא מבטא את היחס שבין הכוח ליחידת שטח הפועל על הגוף לבין מידת התארכותו (או התכווצותו) היחסית כתוצאה מהפעלת הכוח.

$$\lambda[Paskal] = \frac{\mathrm{F}/\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{L}/\mathrm{L}}$$

פסקל היא יחידת לחץ $1\mathrm{P}askal = {}^{1Newton}/_{m^2}$

A מציין את השטח שעליו פועל הכוח; L - את אורך הגוף; ו-ΔL - את מידת התארכותו או התכווצותו בהשפעת הכוח.

לפיכך, לצורך ייצוג העיוות על ידי מקדם הקפיץ

$$\mathrm{K} = \lambda \frac{A}{L}$$

מה שנותר הוא להציב מספרים ולהעריך את התוצאות.

הטבלה הבאה מציינת מקדמי אלסטיות למספר חומרים מוצקים [ראו ביבליוגרפיה]:

חומר	λ[Giga Paskal]
גומי	0.01-0.1
ניילון	2-4
עץ אלון	9
בטון	30
אלומיניום	70
פלדה	200

כדי להשלים את נתוני הבעיה אנחנו צריכים להניח מהו החומר שממנו עשויים הגופים ומה צורתם של הגופים.

נניח חומר שמקדם האלסטיות שלו נמצא במרכז הטבלה: עץ אלון. הצפיפות של אלון היא $500Kg/m^3$.

נניח כי שטח החתך של כל אחד מהגופים הבאים במגע הוא $100\ \mathrm{cm}^2$. אורכי הגופים הם, אם כן

$$\mathrm{L}[m] = \frac{m[kg]}{500x10^{-2}} = \frac{m}{5}[m]$$

והם 2/5,3/5 מ', בהתאמה, וסה"כ 1 מ'. אם כך

$$\mathrm{K}[^N/_m] = 9x10^9x10^{-2}/1 = 9x10^7[^N/_m]$$

עתה נציב את יתר הערכים של הבעיה הנתונה במשוואות:

התאוצה במשך הפעלת הכוח

$$a = \frac{F}{m_A + m_B} - \mu g = \frac{13}{5} - 1 = 1.6\left[^m/_{sec^2}\right]$$

נניח כי משך הפעולה של הכוח הוא שנייה אחת. המהירות V_0 ברגע הפסקת פעולת הכוח

$$\mathrm{V}_0 = \frac{[F - (m_A + m_B)\mu g]t}{m_A + m_B} = \frac{13-5}{5} = 1.6[^m/_{sec}]$$

אורך הדרך של מתיחת הקפיץ ושחרורו

$$x = \frac{F}{K} = \frac{13}{9x10^7} = 1.44x10^{-7}[m]$$

מרחק התרחקות הגופים זה מזה

$$S_A + S_B = \frac{F^2}{K}\frac{m_B}{2m_A(m_A + m_B)\mu g}\left[1 + \left(\frac{m_A}{m_B}\right)^2\right] = \frac{169}{9x10^7}x\frac{2}{30}x\frac{13}{4} = 4.07x10^{-7}[m]$$

(כחצי מיקרון) שהוא מרחק זניח וספק אם בר מדידה. מרחק התנועה של מרכז המסה הוא

$$S = \frac{1}{2}\frac{[F-(m_A+m_B)\mu g]^2 t^2}{(m_A+m_B)^2 \mu g} - \frac{F}{K} = \frac{[13-5]^2 x 1^2}{2x25} = 1.28[m]$$

(האיבר האחרון זניח).

מתוך הטבלה אנו למדים כי זה המצב של גופים מוצקים מלאים. המצב יהיה שונה בגופים שהם קליפות קשיחות (כגון קופסאות), שמקדם האלסטיות שלהם קטן ב-3-1 סדרי גודל (ומרחק ההתרחקות בין הגופים גדול בהתאם, ועדיין קטן מאוד, וספק אם בר מדידה בתנאי השאלה). ההתרחקות תהיה ניכרת רק בין גופים רכים מאוד, כגון ספוגים, וכן בין גופים קשיחים שביניהם מוצב קפיץ רך.

תובנות

1. חוקי המכניקה הקלסית ניתנים לניסוח באמצעות כוחות ותאוצות, או באמצעות מִתקפים ותנע - שני הניסוחים הם שווי ערך, אך בעלי דגשים שונים. מעקב אחר דינמיקה רגעית הוא נוח לביטוי באמצעות כוחות, בעוד שתרחישי מגע זמני - שבהם התצפית מתרכזת במצב שלפני המגע ואחריו - מנוסחים בנוחות במונחי מתקף ותנע. תחום הביניים - תיאור התרחיש בעת פעולת המתקף כנ"ל בין שני גופים - הוא מורכב יותר. הבעיה שאנו עוסקים בה נמצאת בתחום זה. מוגדר בה כוח חיצוני אשר בעת פעולתו דורך כוח אלסטי פנימי. בעת דעיכת הכוח החיצוני משתחררת האנרגיה האלסטית שנאגרה ומאיצה את המסות להיפרדות. תרחיש זה ניתן לתיאור פשוט יחסית בשני מקרים קיצוניים:

- דעיכת הכוח החיצון מהירה ביותר, כך שהדינמיקה בין הכוח האלסטי לאינרציה של המסות היא דינמיקה עצמית, וקצבה תלוי אך ורק ביחסי המקדם האלסטי ובמסה המואצת. משך זמן ההאצה של הכוח האלסטי שמקדמו K, אל מול מסה m, הוא t, שהוא רבע משך מחזור של תנודה הרמונית של מערכת קפיץ - מסה

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{m/K}$$

  מכאן יובן התנאי כי הכוח החיצוני דועך בזמן קצר בהרבה מהזמן t.

- לעומת זאת, אם משך הדעיכה של הכוח החיצוני גדול בהרבה מהזמן t, עוצר הכוח החיצוני השיורי בכל רגע את הכוח האלסטי; האצת המסות להתרחקות בגין הכוח האלסטי זניחה עד התבטלות, והגופים נותרים צמודים.

  עבור הדוגמה שנבחרה כמייצגת גופים קשיחים

$$K[N/m] = 9x10^7[N/m]$$

ומכאן

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{5/9x10^7} = 0.37[msec]$$

נתוני השאלה אינם מגדירים את קצב דעיכת הכוח החיצון, אך זה נתון קריטי, כאמור. לצורך הערכה - נתייחס לזמן התגובה האנושית שהוא כ-0.3 שנייה, כלומר: הפעלה (והפסקה) אנושית של הכוח החיצון, שהיא אטית פי אלף ממשך השחרור העצמי, תשאיר את שני הגופים צמודים בדוגמה זו. המצב שונה כאשר אחד הגופים - או שניהם - רך במיוחד (כדוגמת ספוג) ובעל מקדם אלסטי נמוך במספר סדרי גודל. משך השחרור גדל בהתאם לזה של הגוף הרך יותר.

2. מרחק ההיפרדות של הגופים S_A+S_B נקבע על ידי האנרגיה האלסטית הנאצרת בעת הדחיסה, וזו נקבעת על ידי הכוח המקסימלי הפועל בין הגופים. התרחיש שבו כוח חיצוני דוחף את שני הגופים הצמודים, וכך גם טוען את האנרגיה האלסטית ביניהם, שונה מאוד מתרחיש התנגשות, שבו האנרגיה האלסטית נטענת במהלך עצירת הגופים בהתנגשות. האנרגיה האלסטית הצבורה בקפיץ היא

$$\frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}\frac{F_E{}^2}{K}$$

כאשר F_E הוא הכוח האלסטי הטוען את הקפיץ. בעוד שבתרחיש הכוח החיצוני הוא

$$F_E = \frac{m_B}{m_A + m_B}F$$

(F - הכוח החיצוני הדוחף), הרי שבתרחיש ההתנגשות F_E הוא הכוח הרגעי המקסימלי במהלך ההתנגשות אשר עשוי להגיע לערכים גבוהים מאוד.

לצורך הדוגמה נניח שהגופים A, B מתנגשים במהירות יחסית V (נניח V = 1 מ/ש). משך המגע ביניהם הוא

$$2t = \pi\sqrt{\frac{m_A + m_B}{K}}$$

והכוח המקסימלי (שהוא לפחות פי שניים מהכוח הממוצע במהלך המגע, כיוון שהכוח עולה ודועך במשך זמן זה) הוא

$$F_{Emax} \geq \frac{(m_A + m_B)V}{t} = \frac{V}{\pi}\sqrt{K(m_A + m_B)}$$

בתנאי השאלה: בתרחיש הכוח החיצון F_E=5.2[N]

בתרחיש התנגשות F_{Emax}=6,750[N]

ומאליו יובן כי במהלך התנגשות מתפתח כוח אלסטי גדול במשך המגע הקצר ומאיץ את הגופים להיפרדות. כוח זה יישווה לכוח הדחיפה החיצון רק כשמדובר בגופים בעלי מקדם אלסטי נמוך ביותר. בתנאי השאלה - K=53.4[N/m] (שהוא נמוך פי מיליון ממקדם אופייני לגופים קשיחים).

3. דוגמאות לדומיננטיות של האנרגיה האלסטית

- בעיטה בכדורגל. הכדור מלא אוויר, ומקדם האלסטיות שלו נמוך בכמה סדרי גודל מאלה של מוצקים. משך המתקף קצר (חלקי שנייה), והכדור יוצא במהירות שנמדדת בפי שניים לפחות מזו של הרגל - בגין שחרור האנרגיה האלסטית. דחיפה ארוכה של הכדור (אותו מתקף על פני זמן ארוך יותר) לא תביא אותו למהירות גדולה מזו של הרגל (אלא במידה זניחה).
- "מטוטלת מנהלים" (מטוטלת רב-כדורית). הכדור האחרון יוצא כתוצאה של הדחיסה האלסטית בין הכדורים. מקדם האלסטיות של הפלדה גבוה, המתקף (פגיעת הכדור המפעיל) קצר מאוד. הכנסת כדור ספוג בראש השורה מאריכה מאוד את משך המתקף, וכל השורה יוצאת ביחד.

4. מאליו מובן כי בתרחישים שבהם פעולת הכוח החיצון נפרסת על זמן ארוך ומקדם האלסטיות גבוה (כפי שבגופים מוצקים) - תרומתה של אנרגיית הדחיסה היא זניחה לעומת האנרגיה הקינטית בגין האצת הגוף במהלך הפעלת

הכוח. יתרה מכך - קצב עלייתו ודעיכתו של הכוח החיצון אינו מאפשר האצת הגופים להיפרדות תוך כדי פריקת האנרגיה האלסטית, אלא במקרים של גופים רכים במיוחד. בתרחישים אלה אפשר (ורצוי) להימנע מהסיבוך הנוסף הכרוך במודל הכולל נתוני חומר ותצורה הנדרשים לחישוב התגובה האלסטית.

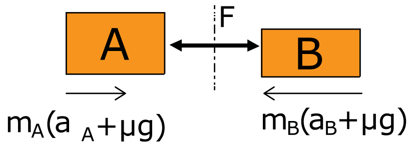
ביבליוגרפיה

"מקדם האלסטיות", "מודול האלסטיות", "מודול יונג" - הם שמות שונים למקדם המגדיר את קשיחות החומר. הסבר וטבלאות לחומרים שונים ניתן למצוא באתרי האינטרנט תחת שמות אלה, וכן באנגלית

http://en.wikipedia.org/wiki/Young's_modulus

נספח: שימור התנע במערכת עם חיכוך

התנע נשמר גם במערכת עם חיכוך: הכוח F פועל בין שני הגופים (ראו איור).



מאזן הכוח על גוף A

$$F = m_A(a_A + \mu g)$$

בעוד שעל גוף B פועל אותו כוח בכיוון הפוך

$$F = m_B(a_B + \mu g)$$

ולכן, בכל רגע

$$m_A(a_A + \mu g) = -m_B(a_B + \mu g)$$

וכמובן, באינטגרציה על פני זמן

$$m_A v_A = -m_B v_B$$