

# שימושים אחדים בפיסיקה

## של משפט חתימטי

מאת: דוד זינגר  
 המחלקה להוראת המדעים  
 מכון ויצמן למדע

לפי משפט ידוע במתימטיקה הממוצע ההנדסי של  $n$  מספרים חיוביים קטן או שווה מהממוצע החשבוני שלהם:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

השוויון מתקיים כאשר  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ . ישנם שימושים רבים בפיסיקה של משפט זה עבור  $n = 2$ . במקרה פרטי זה הוכחת המשפט היא מידית. מתוך:

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$$

$$a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} \geq 0$$

נובע

ולכן

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \quad (1)$$

נביא כאן שתי דוגמאות לשימוש המשפט בהסקת מצבי אקסטרמום בפיסיקה.

### I דוגמא

נוכיח כי המרחק בין עצם ובין דמותו הממשית בעדשה מרכזת הוא לפחות  $4f$ , כאשר  $f$  מרחק המוקד של העדשה.

נסמן את מרחק העצם מהמוקד הראשון ב- $x$  ואת מרחק דמותו הממשית מן המוקד השני ב- $y$ . כידוע הקשר בין מרחקים אלה הוא:

$$xy = f^2$$

נוסחה זו ידועה כנוסחת ניוטון של העדשות.

מהנוסחה האחרונה נובע כי:

$$\sqrt{xy} = f$$

על סמך הקשר (1) שהוכחנו לעיל נוכל לרשום:

$$\frac{x+y}{2} \geq f$$

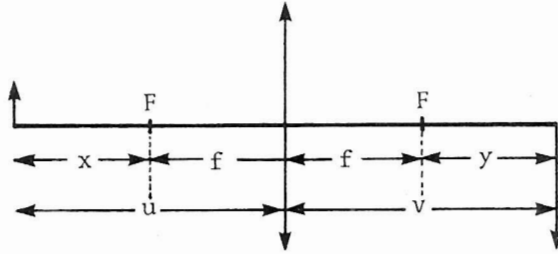
$$x+y \geq 2f$$

כלומר:

אם נסמן את מרחק העצם מהעדשה ב- $u$  ואת מרחק הדמות ממנה ב- $v$  (ראה תרשים), נקבל:

$$x = u - f$$

$$y = v - f$$



תרשים 1

נציב זאת לאי השיויון האחרון ונקבל:

$$u - f + v - f \geq 2f$$

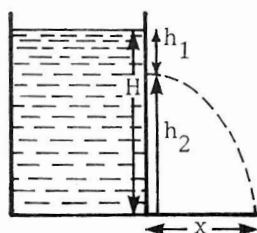
$$u + v \geq 4f$$

השיויון יתקיים כאשר  $x = y$  כלומר, כאשר  $u = v = 2f$ .

לסיכום, המרחק המינימלי בין עצם ודמותו הממשית בעדשה מרכזת הוא  $4f$ . מרחק זה מתקבל כאשר העצם והדמות נמצאים במרחק  $2f$  מהעדשה.

הערה: כאשר מלמדים, במסגרת האופטיקה הגיאומטרית, על המשקפת הארצית, עולה בדרך כלל השאלה: "מדוע אין מנצלים את עדשת הביניים, זו שבין העצמית והעינית, להגדלה נוספת?" אחת הסיבות לכך נעוצה במה שהוכחנו לעיל. ניצול כזה היה גורר אחריו הגדלת אורך המשקפת.

נוכיח כי הטווח האופקי של נוזל הפורץ מנקב במיכל המלא בנוזל בגובה  $H$  הוא מירבי כאשר הנקב נמצא בגובה  $\frac{H}{2}$  מהקרקעית. כמו כן נראה כי טווח מירבי זה שווה לגובה פני הנוזל, כלומר  $H$ .



תרשים 2

נסמן את מרחק הנקב מפני הנוזל ב- $h_1$  ואת מרחקו מקרקעית המיכל ב- $h_2$  (ראה תרשים 2).

$$h_1 + h_2 = H \quad \text{קיים:}$$

מחוק ברנולי נובע כי הנוזל פורץ מהנקב במהירות  $v_0$  הנתונה על-ידי נוסחת טוריצי'לי:

$$v_0 = \sqrt{2gh_1} \quad (2)$$

זאת כמובן בהנחה ששטח החתך של הכלי רחב במידה ניכרת מן הנקב כך שמהירות ירידת פני הנוזל ניתנת להזנחה.

תנועת סילון המים היוצא מן הנקב היא "זריקה אופקית", שהטווח  $x$  שלה נתון על-ידי:

$$x = v_0 \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \quad (3)$$

כאשר נציב את (2) ב-(3) נקבל:

$$x = 2\sqrt{h_1 \cdot h_2}$$

על סמך (1) נוכל לרשום:

$$x \leq h_1 + h_2$$

$$x \leq H$$

הטווח המירבי הוא  $H$  והוא מתקבל כאשר  $h_1 = h_2$ , כלומר, כאשר הנקב נמצא בגובה  $\frac{H}{2}$  מהקרקעית.