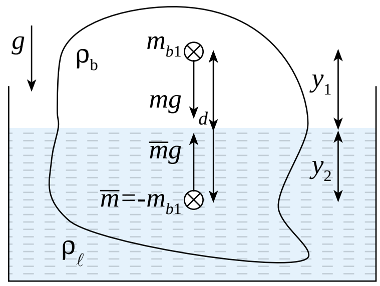
על ברווזים ואנטי ברווזים

דוד אגמון, המכינה הקדם אקדמית, הטכניון, חיפה

וודי אלן טוען שאשתו היא ממש אינפנטילית. היא תמיד גונבת לו את הברווזים מהאמבטיה... ואכן יש הנאה ילדותית, לא מבוטלת, בלהציף ברווזים וגופים אחרים. במאמר זה ננסה ל"מסד את האינפנטיליות" ולבחון לא רק מדוע צף ה"ברווז" אלא בעיקר באופן בו מתייצב גופו ביחס לפני הנוזל.



תרשים 1

כשגוף שקוע בנוזל פועל עליו, כידוע, כוח עילוי שגודלו שווה למשקל הנוזל שנדחה על ידו וכיוונו הפוך לכיוון שדה הכובד. מקורו של כוח העילוי הוא בלחץ ההידרוסטטי שמפעיל הנוזל על הגוף. מקורו של הלחץ הוא בכוח הכובד הפועל על הנוזל. ניתן על כן להסתכל על כוח העילוי כעל כוח כבידה מוכלל הפועל בכיוון הפוך לשדה הכובד $\vec{g}$. בבואנו לדון בגוף הצף על פני נוזל נוכל להשתמש ב"תחבולה" הבאה: נחלק את הגוף (מחשבתית בלבד) לשני חלקים. החלק האחד שנמצא מחוץ לנוזל, מסתו m_{b1} וכוח הכובד השקול הפועל עליו הוא $m_{b1}\vec{g}$ בכיוון מטה. והחלק השני, השקוע בנוזל, מסתו m_{b2} והוא דוחה מסת נוזל בשיעור m_l. על חלק זה פועל כוח כובד שקול שכיוונו **כלפי מעלה** וגודלו:

$$\sum\vec{F} = m_{b2}\vec{g} - m_l\vec{g} = (m_{b2} - m_l)\vec{g} = \overline{m}\cdot\vec{g} \qquad (1$$

ניתן על כן, להתייחס **לחלק השקוע** כאילו היה גוף נפרד בעל **מסה אפקטיבית שלילית*** $(\overline{m})$:

$$\overline{m} = m_{b2} - m_l < 0 \qquad (2$$

צפיפות המסה הזו שווה להפרש הצפיפויות של הגוף והנוזל:

$$\overline{\rho} = \rho_b - \rho_l < 0 \qquad (3$$

יישום רעיון אלמנטרי זה מפשט במאוד את הטיפול המתמטי בגופים צפים. נוכל כעת להמיר את המערכת הבעייתית של {גוף + נוזל}, במערכת כמעט טריוויאלית, של שני גופים צמודים ולהתעלם מהנוזל.

* מעקרון האקוויולנטיות (השקילות) נובע שהמסה הגרביטציונית שווה (או מתכונתית) למסה האינרציאלית: $m_g = m_i$. בבעיה זו המסה האינרציאלית אינה משתנה ולכן $m_g \neq m_i$.

לפני שנתחיל לשחק, נוכיח תחילה שלושה עקרונות פשוטים ביותר המגדירים את מצבו של **גוף אחיד שצף בשיווי משקל יציב**:

1) **המסה האפקטיבית** של החלק השקוע בנוזל שווה בערכה המוחלט למסת החלק שמחוץ לנוזל.
2) מרכז המסה של החלק השקוע נמצא בדיוק מתחת למרכז המסה של החלק שמחוץ לנוזל.
3) המרחק בין מרכזי המסה של שני החלקים הוא מינימלי.

הוכחות:

העיקרון הראשון: במצב של שיווי משקל מתקיים $\sum\vec{F}=0$ ומכאן (ראה תרשים 1) נקבל:

$$m = |\overline{m}| \quad \text{או} \quad mg = |\overline{m}|g \qquad (4$$

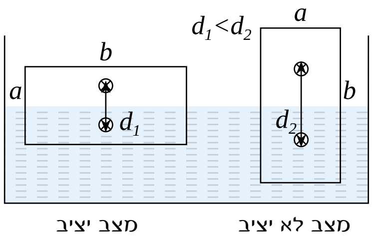
שים לב שמסות אלו קבועות בכל מצבי שיווי המשקל ואינן תלויות באופן בו מתייצב הגוף ביחס לנוזל!

העיקרון השני: מצב של שיווי משקל מחייב שגם סכום המומנטים יתאפס: $\sum\vec{M}=0$ וזה מאלץ את שני כוחות הכובד הפועלים על הגוף להיות על אותו קו פעולה, כלומר זה מעל זה.

והעיקרון השלישי: בשיווי משקל **יציב**, חייבת האנרגיה הפוטנציאלית להיות **מינימלית**. נבחר את מישור הייחוס שיעבור דרך פני הנוזל. נסמן ב $\overline{y}_1$ וב $\overline{y}_2$ את המיקום האנכי של מרכזי המסה של החלק שמחוץ לנוזל ובתוך הנוזל בהתאמה. (**שים לב ש** $\overline{y}_2 < 0$!) לכן האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת של שני החלקים היא:

$$\begin{aligned} U &= mgy_1 + \overline{m}gy_1 = mgy_1 + (-m)g(-|y_2|) \qquad (5\\ &= mg(y_1 + |y_2|) = mgd = \min \end{aligned}$$

כאשר ***d*** הוא המרחק בין שני המרכזים. אם ייתכנו מספר מצבים של שיווי משקל הם יאופיינו בכך שנפח החלק שמחוץ לנוזל (ולכן גם מסתו) יהיה זהה בכולם. המצב היציב יהיה זה שבו האנרגיה היא הנמוכה ביותר. כלומר במצב שבו ***d*** **מינימלי**.



תרשים 2

לדוגמה: תיבה אחידה וארוכה בעלת שטח חתך מלבני $a \cdot b$ *(a < b)* מתייצבת כך שהפיאה הגדולה ביותר מקבילה לפני הנוזל והגובה הוא הממד הקטן ביותר כמוראה בתרשים 2. במקרה זה מתקיים: $d_1 = a/2 < d_2 = b / 2$
באופן פופולרי נאמר שהחלק העליון "ישאף" להיות נמוך במידת האפשר בעוד שהחלק השקוע, בעל המסה השלילית, "ישאף" להיות גבוה במידת האפשר וכ"פשרה" יהיה המרחק בין מרכזי החלקים מינימלי. וכעת, כשאנו חמושים בשלושת העקרונות, ניגש למגרש המשחקים. ראשית נחשב איזה חלק יחסי מהגוף שקוע בנוזל. נסמן את נפח **כל** הגוף ואת צפיפותו ב V_b ו-ρ_l. ואת הנפח השקוע בנוזל וצפיפות הנוזל ב V' ו ρ_b. (הנפח שמחוץ לנוזל הוא $V_b - V'$) יתקבלו הקשרים המוכרים הבאים:

$$|\overline{m}| = |\overline{\rho}|V' = (\rho_l - \rho_b)V' \;\; ; \; m_{b1} = \rho_b(V_b - V') \qquad (6$$

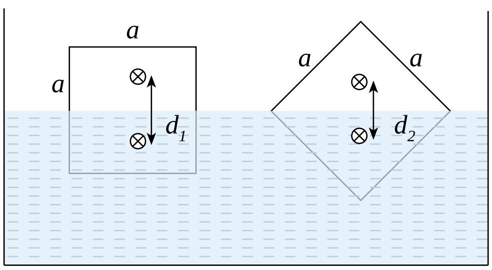
נשווה בין המסות (ראה משוואה 4) ונקבל אחרי סידור:

$$|\overline{m}| = (\rho_l - \rho_b)V' = m_{b1} = \rho_b(V_b - V') \rightarrow V' = \frac{\rho_b}{\rho_l}V_b \qquad (7$$

שים לב שיחס זה אינו תלוי ב g! ולכן הוא מתקיים בכל שדה כובד אחיד, בכל מערכת מואצת ובכל מצב אפשרי של שיווי משקל!
נשאל כעת איך תתייצב קורת עץ אחידה וארוכה בעלת חתך ריבועי $a \times a$ בנוזל שצפיפותו כפולה מצפיפות העץ? (**הערה:** במונח "קורה ארוכה" מתכוונים שאורכה גדול בהרבה ממדי החתך שלה.)
מנוסחה (7) נקבל שמחצית הקורה תהיה שקועה בנוזל. המצבים היציבים, הבאים בחשבון, מתוארים בתרשים. על פי העיקרון השלישי המצב היציב הוא זה שהמרחק בין שני מרכזי המסה הוא מינימלי. קל לראות מתרשים 3 שמתקיים:

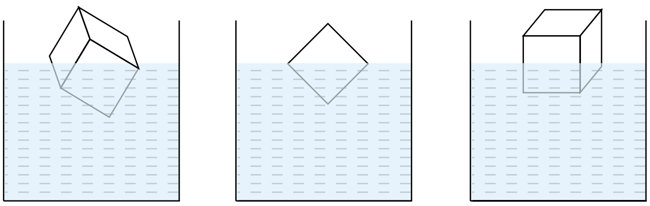
$$d_1 = 0.5a \text{ ו- } d_2 = \frac{1}{3}a\sqrt{2} = 0.4714a$$

(**זכור** שמרכז כובד של משולש הוא במפגש התיכונים הנמצא בשליש הגובה). מכאן עולה שהאפשרות השניה היא יציבה יותר. חישוב מדוקדק מראה שבמצב הראשון שיווי המשקל הוא רופף.



אפשרות 1　　אפשרות 2
תרשים 3

נעבור כעת **לקוביה** שממדיה ***a* x *a* x *a***, השקועה בנוזל שצפיפותו כפולה משלה. המצבים האפשריים מתוארים בתרשים 4. במצב א׳ הפיאה מקבילה לפני הנוזל. במצב ב׳ מקצוע הקוביה מופנה מטה. ובמצב ג׳ אחת הפינות מופנית כלפי מטה. (**הערה**: החלק השקוע ב-ג׳ הוא מעין פירמידה בעלת בסיס משושה והיא קטומה בבסיסיה.)

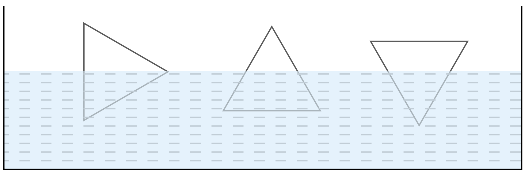

א׳　　ב׳　　ג׳
תרשים 4

במצב הראשון: $d_1 = 0.5a$

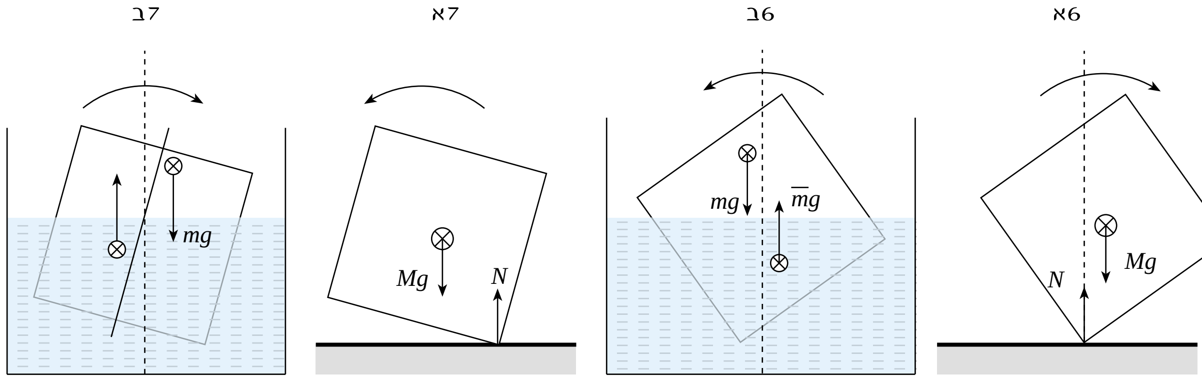
במצב השני: $d_2 = \frac{1}{3}a\sqrt{2} = 0.4714a$

ובמצב השלישי: $d_3 = \frac{13}{48}a\sqrt{3} = 0.469a$

ומכאן עולה שהקוביה תתייצב במצב בו אחת הפינות מכוונת מטה. **נסה והיווכח!**
הערה: גם כאן, בשני המצבים האחרים הקוביה נמצאת בשיווי משקל רופף.
ונסיים בחידה הקשורה בניסוי (תרשים 5):


א׳　　ב׳　　ג׳
תרשים 5

קורת עץ ארוכה ואחידה בעלת חתך רוחב בצורת משולש שווה צלעות צפה במים. מוסיפים למים **מעט** מלח והקורה מתהפכת.
א) הסבר את התופעה.
ב) מאיזה מצב ולאיזה מצב היא עברה? האם יש פתרון יחיד לבעיה?
ג) אורך כל צלע במשולש הוא ***a***, באיזה עומק הייתה שקועה הקוביה?



תרשימים 7-6

ננסה כעת להעמיק את הבנתנו באופן הציפה של קורה ארוכה בעלת חתך ריבועי או מלבני בנוזל שצפיפות מסתו כפולה מצפיפות הקורה, ונתמקד בארבע סוגיות:

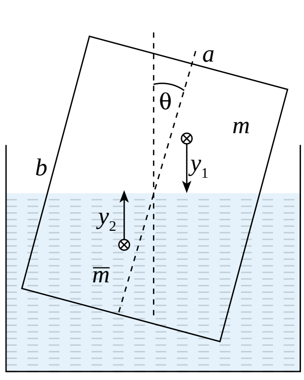
א) מדוע כשהקורה מוצבת על שולחן היא בשיווי משקל **יציב** אם היא מונחת על פיאה ובשיווי משקל **רופף** אם היא מונחת על המקצוע, בעוד שבתוך הנוזל המצב בדיוק הפוך?

ב) מה קורה ליציבות קורה ריבועית הצפה בנוזל, כשמגדילים הדרגתית את אחת הצלעות כך שהחתך הופך מריבועי למלבני?

ג) מה קורה ליציבות קורה בעלת חתך ריבועי כשמשנים הדרגתית את יחס הצפיפויות: $r = \rho_b / \rho_l$?

ד) נחקור את הקשר שבין הסימטרייה הגיאומטרית של הגוף ויחסי צפיפויות המסות של הגוף והנוזל.

א) התרשימים 6 ו-7 יסייעו להבין את הסוגייה הראשונה. קל לראות שצמד הכוחות יוצר מומנט **שמחזיר** את הקוביה למצב שיווי משקל במקרים 7א' ו 6ב', בעוד שבמקרים 6א' ו-7ב' המומנט דווקא **מוציא** את הגוף משיווי המשקל. שים לב לעובדה הבאה: מיקום מרכז הכובד של הגוף הקשיח הנמצא מחוץ לנוזל הוא קבוע ביחס למערכת קואורדינטות הצמודה אליו ואינו מושפע מסיבובו של הגוף במרחב. מאידך, כשהגוף צף, מרכזי הכובד של שני חלקיו "**נודדים**" בהתאם לאוריינטציה שלו ביחס לנוזל. (חישוב מיקום



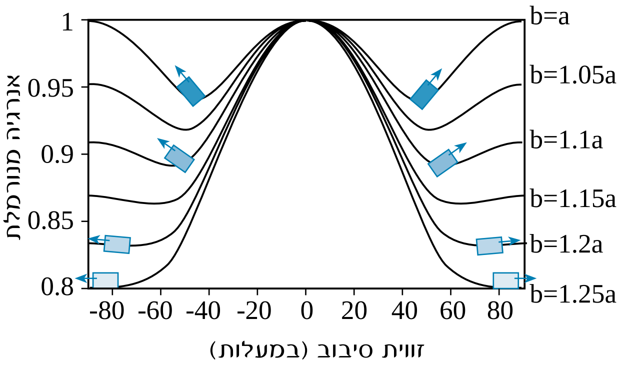
תרשים 8

מרכז הכובד במקרה זה אינו פשוט והוא דורש אינטגרציה או שיטות מתוחכמות אחרות)

ב) גודל האנרגיה הפוטנציאלית מהווה כידוע, קריטריון לסוג שיווי המשקל (יציב/רופף/אדיש). נבחן על כן בעזרת (5) את האנרגיה הפוטנציאלית של תיבה ארוכה בעלת חתך מלבני ***a* x *b*** כפונקציה של זווית ההטיה θ (תרשים 8). מישור הייחוס יתלכד עם פני הנוזל. מטעמי סימטרייה נקבל ש $y_1 = |y_2|$ (**זכור** $y_2 < 0$!) ולכן עבור מקרה זה נקבל:

$$U = mgy_1 + (-m)g(-|y_2|) = mg(y_1 + |y_2|) = 2mgy_1$$

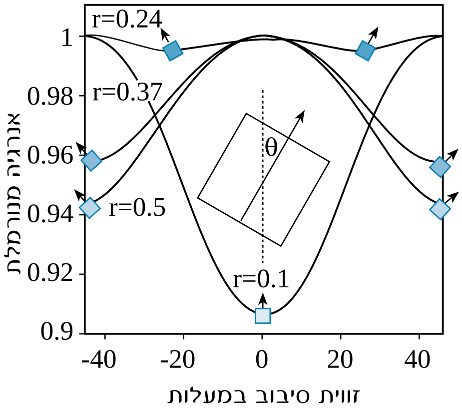
חישוב y_1 כפונקציה של זווית ההטיה θ נעשה בעזרת תוכנת *MATLAB*, ובגרף המצורף (תרשים 9) מובאת משפחת גרפים של האנרגיה הפוטנציאלית המנורמלת $\overline{U}_b(\theta)$, כשצלע b מקבלת את הערכים: b = a; 1.05a; 1.1a; 1.15a; 1.2a; 1.25a.
המינימום, כלומר המצב היציב, מתקבל כאשר: $\theta = 45^\circ, 49^\circ, 55^\circ, 62^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ בהתאמה.
כאשר $\theta = 45^\circ$ המקצוע מופנה כלפי מטה (ריבוע) וכאשר $\theta = 90^\circ$ הפיאה הגדולה מקבילה לפני הנוזל. חישוב מדוקדק



תרשים 9

מראה שכאשר $b/a > 1.3$ מתייצבת הקורה על הפיאה הגדולה ויש מעבר חלק ורציף בין שני המצבים.

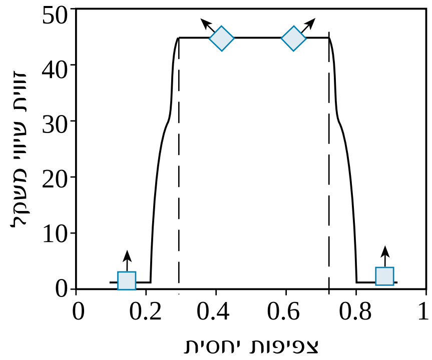
ג) גם בסוגיה זו, בעזרת תוכנת *MATLAB*, נבחנה האנרגיה הפוטנציאלית של המערכת כפונקציה של זווית ההטיה המוגדרת בתרשים 10. וזאת עבור ערכים שונים של יחסי צפיפויות: $r = \rho_b / \rho_l = 0.1; 0.24; 0.37; 0.5$.



תרשים 10: אנרגיה כנגד זווית סיבוב

מהגרפים רואים בבירור איך מצב שיווי המשקל משתנה באופן רציף ממצב I בו הפיאה מקבילה לפני הנוזל למצב II בו הקורה מסובבת ב $\theta = 45^\circ$. כשצפיפות הקורה קטנה, $r = 0.1$, היא מתייצבת במצב I. כש $r \approx 0.24$ משתוות אנרגיות המצבים, ומינימום האנרגיה מתקבל בזווית $\theta \approx 25^\circ$. וכאשר $r > 0.3$, מינימום האנרגיה מתקבל במצב II והקורה מתייצבת במצב זה. ישנה סימטרייה מעניינת בין המצבים בהם יחסי הצפיפויות הם: r ו $(1-r)$. למשל כאשר $r = 0.2$, 20% מהקורה שרויים בנוזל ו 80% מחוצה לו. וכאשר $r = 0.8$, מתהפך המצב: 80% מהגוף שרויים בנוזל ורק 20% מחוצה לו. אם הגוף סימטרי תחת **סיבוב** של 180°, יהיו המרחקים בין שני מרכזי הכובד זהים ולכן הגרפים של האנרגיות יהיו זהים (ראה נוסחה 5). ניתן, על כן, להסתפק רק בגרפים המקיימים את התנאי: $0.5 \ge r > 0$.

מהגרף האחרון (תרשים 11) ניתן ללמוד מהי הזווית בה תתייצב הקורה בכל צפיפות יחסית $r = \rho_b / \rho_l$. רואים שאכן ישנם שני מצבים בסיסיים: בתחומי הצפיפות שבין 0 ל-0.2 ובין 0.8 ל-1 הקורה מתייצבת במצב I ובין 0.3 ל 0.7 הקורה מתייצבת במצב II. קיימים שני תחומי ביניים צרים בין שני המצבים כשהמעבר ביניהם הוא חד ביותר!



תרשים 11: זווית שיווי משקל כנגד צפיפות יחסית

ד. על ברווזים ואנטי-ברווזים ועל הסימטרייה שביניהם:

הקשר בין יחסי הצפיפויות ויחסי הנפחים (נוסחה 7) יוצר צימוד מסקרן בין הסימטרייה הגיאומטרית של הגוף והסימטרייה המוכללת שבין שני מצבים בהם יחסי צפיפויות הם (***r***) ו (1-***r***) (או $r_\pm = 0.5 \pm \Delta$ כש $\Delta \le 0.5$). ונחקור שני מקרים:

I **גוף ללא סימטרייה:**

אם נבצע על המערכת {נוזל + גוף} שתי פעולות:

א) נסובב את הגוף ב-180°.

ב) נשנה את יחס הצפיפויות מ $\frac{\rho_b}{\rho_l} = r$ ל $\frac{\rho_b}{\rho_l} = 1-r$.

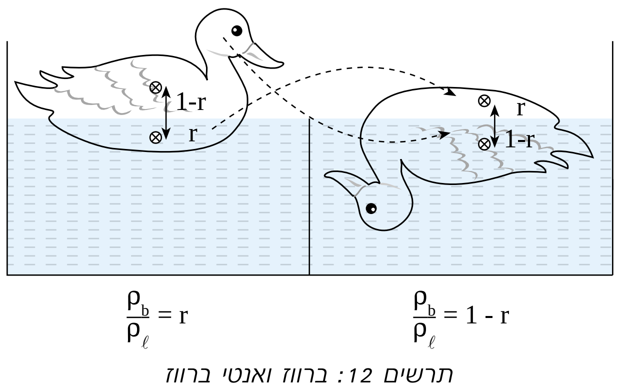
יתקבל מצב חדש ("אנטי גוף") בו הנפח שהיה בתחילה שקוע בנוזל ימצא כעת מחוץ לנוזל והחלק שהיה מחוץ לנוזל יהיה שקוע בנוזל כמומחש בתרשים 12. וכיוון שהמרחק בין שני מרכזי הכובד לא ישתנה, תישאר האנרגיה הפוטנציאלית המנורמלת ללא שינוי!

8) $\bar{U}_1(r,\theta) = \bar{U}_2(1-r,\theta+180^\circ)$ (לכל θ)

או בכתיב סימטרי:

$$\bar{U}_1(0.5\pm\Delta,\theta\pm 90^\circ) = \bar{U}_2(0.5\mp\Delta,\theta\mp 90^\circ)$$

ומכאן נסיק שאם בתחילה היה הגוף בשיווי משקל, אזי הוא יהיה **בהכרח** בשיווי משקל גם במצבו החדש.



תרשים 12: ברווז ואנטי ברווז

II **גוף בעל סימטרייה**

אם הגוף סימטרי תחת פעולת סיבוב של 180° (למשל מלבן) נקבל שלכל r ו θ מתקיים:

9) $\bar{U}_1(r,\theta)=\bar{U}_2(r,\theta\pm180^\circ)$ ולכן מתקיים גם:

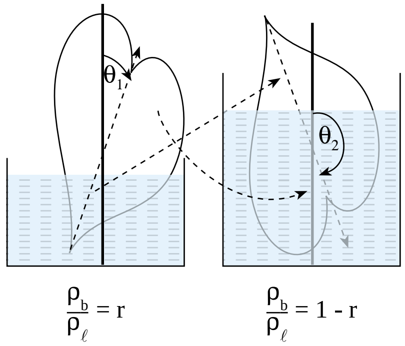
10) $\bar{U}_1(r,\theta)=\bar{U}_2(1-r,\theta)$

ובהכללה: אם לגוף ישנה סימטרייה תחת סיבוב בזווית α_n (למשל במשושה $\alpha_n=\pm60^\circ$) אזי מתקיים:

11) $\bar{U}_1(r,\theta)=\bar{U}_2(r,\theta\pm\alpha_n)=\bar{U}_3(1-r,\theta\pm\alpha_n+180)$

אם לגוף ישנה **סימטרייה של שיקוף**, דוגמת הגוף בתרשים 13, אזי לכל זווית θ, הנמדדת בין האנך ומישור השיקוף, מתקיים:

12) $\bar{U}_1(r,\theta)=\bar{U}_2(r,-\theta)=\bar{U}_3(1-r,180-\theta)$



תרשים 13: גוף בעל סימטריה של שיקוף

פרוש הדבר הוא שאם הגוף הצף מסובב בזווית θ_1 ומבצעים על המערכת את הפעולות הבאות:

א) מסובבים את הגוף בזווית $\theta_2=180-\theta_1$.

ב) משנים את יחסי הצפיפויות: $r\rightarrow1-r$.

נקבל ששני המצבים שקולים מבחינה אנרגטית. כדוגמה לסימטריית שיקוף בחרנו קורה ארוכה בעלת חתך של משולש ישר זווית **ושווה שוקיים.** הגרף המצורף מתאר את האנרגיה הפוטנציאלית המנורמלת של הקורה כפונקציה של זווית הסיבוב θ (תרשים 14).

נבדקו שני מקרים סימטריים בהם:

א) $r_1=0.15$ ב) $r_2=1-r_1=0.85$

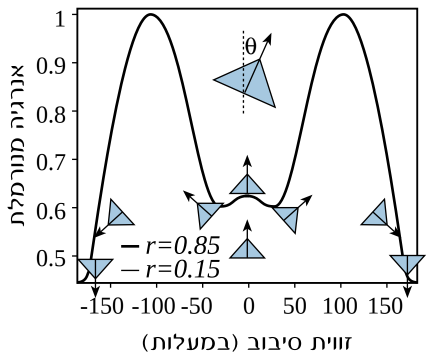
במקרה הראשון מצבי שיווי המשקל מתקבלים בזוויות:

$\theta_1=0,\ \theta_2\approx\pm135^\circ$

במקרה השני מצבי שיווי המשקל מתקבלים בזוויות:

$\theta'_1=180^\circ,\ \theta'_2\approx\pm45^\circ$

הגרפים שנתקבלו, אכן מקיימים את משוואה (12).



תרשים 14

נסיים ברמז לחידה לעיל: יש להראות שיתכנו שלושה מצבי ציפה יסודיים: (ראה תרשים 5 הצמוד לחידה)

1) כאשר $\rho_b/\rho_l>0.5$, הקורה תתייצב במצב א'.

2) כאשר $\rho_b/\rho_l<0.5$, הקורה תתייצב במצב ב'.

3) כאשר $\rho_b/\rho_l=0.5$, הקורה תתייצב במצב ג'.

תודה מיוחדת לבן קיני ולאהוד גזית על הערותיהם ועל עזרתם המועילה.

לקריאה נוספת:

דוד אגמון "מכניקה בגובה העיניים וממעוף הציפור" (מהדורה שניה שתצא בקרוב).

למורים המתעניינים בנושא, מומלץ ליצור בבית המלאכה גופי עץ (או פוליאוריטן מוקצף) בצורת תיבות, מנסרות, גלילים, גזרות כדוריות וכו'. ולערוך ניסיונות מאלפים משעשעים ומפתיעים.