תנועה בשדה הגרביטציה
אסטרטגיות קוגניטיביות בפתרון בעיות פיסיקליות

טאהא מסאלחה, מרכז תוכנית המצוינים, המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל, חיפה

מבוא

במאמר זה נדגים פתרון גרפי אנליטי של בעיה פיסיקאלית מאתגרת, שנראית לכאורה תמימה[1]. הבעיה דנה בתנועתם של שני גופים: הראשון נופל נפילה חופשית על פני כדור הארץ (למשל) והשני נזרק אנכית כלפי מטה במהירות התחלתית V_0, שני הגופים מתחילים את תנועתם בו זמנית ומאותו גובה. האם ההפרש במהירות בין שני הגופים נשמר תוך כדי נפילתם?

במשך שנים רבות בחרתי לפתור בעיה זו עם תלמידי כיתה י"א במגמת פיסיקה, בביה"ס התיכון דבוריה, וגם עם הסטודנטים שלי להוראת הפיסיקה, במכללה האקדמית הערבית לחינוך בחיפה.* לפי הרשימות שלי בעשר השנים האחרונות, מתברר ש- 91% מתלמידי פיסיקה בביה"ס התיכון ו-87% מהסטודנטים להוראת הפיסיקה במכללה, פתרו את "הבעיה הקלה"**, על פי התפיסה האינטואיטיבית שלהם, אחרי מספר דקות. תשובת התלמידים הייתה שהפרש המהירויות נשמר. ניתן לומר שלא היה הבדל משמעותי בין גישת תלמידי התיכון לבין גישת הסטודנטים להוראת הפיסיקה בפתרון בעיה זו, זה עניין למחקר אחר ולא כאן המקום לפרט.[2]

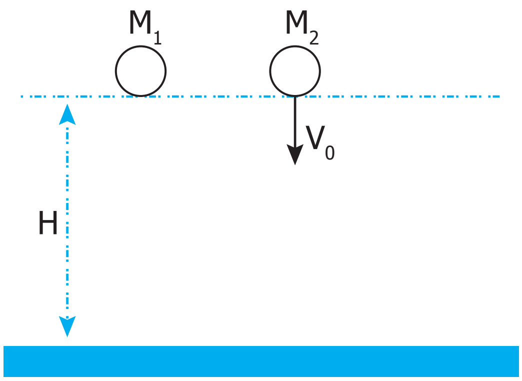
הגישה שלי בפתרון בעיות[3] מתחילה בעירור סקרנותם של תלמידי, זאת על ידי הצגת הניגוד בין הגישה השגרתית – "המסורתית" המקובלת לפתרון בעיות לבין גישה לא שגרתית הדורשת ניתוח חשיבתי – "לא מסורתית". מהניסיון שלי בהוראה, אני רואה שכלל הלומדים (תלמידים ומורים) נוטים "להתבשל" בגישה השגרתית המזנקת ראשונה למחשבתם. כיצד ניתן לעשות שימוש טוב יותר בכושר החשיבה והלמידה הטבעיים של הלומדים, על מנת לפתח כלים לחשיבה לא שגרתית?

כדי ללמוד את הבעיה מכיוונים שונים, עלינו לחדור לרמות היסודיות והראשוניות של חשיבתנו, ולחשוף את ההנחות והאמונות המנחות אותנו, להתאימם לבעיה הנתונה ולנסות להפעילם. תהליך זה דורש משאבים של חשיבה – ידע – מיומנויות, ומהווה גשר להבנה מעמיקה יותר של הבעיה הנדונה בטווח המיידי, ובו זמנית הוא מחזק את תשתית היכולת העצמית של הלומדים להתמודד עם בעיות אחרות בטווח ארוך יותר.

הצגת הבעיה הפיסיקאלית

נפילה חופשית וזריקה אנכית כלפי מטה, הנן בעיות פיסיקאליות נפוצות בקרב עמיתי מורי הפיסיקה ומוכרות לתלמידים היטב. אולם השילוב בין שתי התנועות ודיון בהפרש המהירות בין שני הגופים בגישה הלא שגרתית, נותן לבעיה זו מימד נוסף, ומפתח אצל הלומדים דרכי הסתכלות והתמודדות שונים מהמקובל. (תרשים 1)

בבעיה זו אנו מניחים ששתי המסות זהות ונמצאות בשדה גרביטציה אחיד (שתי המסות נתונות באותה סביבה פיסיקאלית).



תרשים 1: תאור סכמתי של הבעיה

המהירות כפונקציה של הזמן – הגישה השגרתית

תלמידי התיכון והסטודנטים פתרו את הבעיה הזו כפונקציה של הזמן, כדלקמן:

- המהירות של המסה הראשונה, המשוחררת ממנוחה, כפונקציה של הזמן, נתונה על-ידי:

$$V_1(t) = gt \qquad (1)$$

זאת בהנחה שתנועת שני הגופים מתחילה מגובה H מעל פני כדור הארץ ברגע $t_0 = 0$.

- המהירות של המסה השנייה, שנזרקה למטה במהירות V_0, כפונקציה של הזמן, נתונה על-ידי:

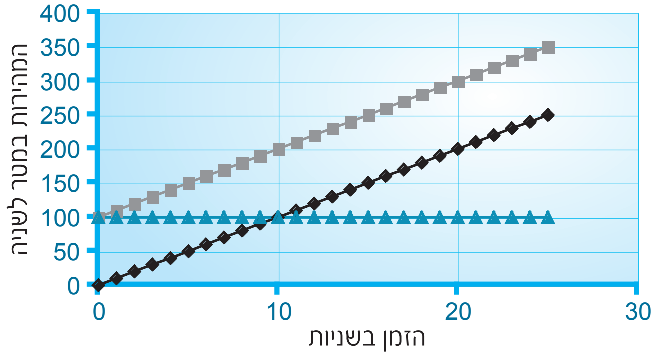
$$V_2(t) = V_0 + gt \qquad (2)$$

בכל רגע, תוך כדי תנועתן, הפרש המהירויות (שתי המהירויות מתרחשות באותו כיוון, כלפי מטה) נתון על-ידי:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V_0 \qquad (3)$$

* במכללה, 80% מהסטודנטים להוראת הפיסיקה סיימו לימודיהם התיכוניים במגמת פיסיקה 5 יחידות לימוד.

** מרבית הסטודנטים שלי השתמשו במושג זה, כשנשאלו: כיצד הם מסווגים בעיה זו? (קלה, בינונית, קשה).



גרף 1: מהירות שתי המסות כפונקציה של הזמן. הגרף האופקי מתאר את ההפרש "הקבוע" בין שתי המהירויות

שימוש בגיליון אלקטרוני (אֶקסֶל למשל), מאפשר לנו להציג ויזואלית את שתי המהירויות (גרף 1).

לצורך סרטוט גרף 1 בחרנו V_0 = 100 m/s, מכאן שהפרש המהירויות במקרה זה הוא ΔV = 100 m/s (גרף 1).

המהירות כפונקציה של גובה הנפילה – הגישה ה"לא שגרתית"

גישה זו הנה חדשה יחסית הן לתלמידי התיכון והן לסטודנטים להוראת הפיסיקה. תנועת שני הגופים מתחילה מגובה H מעל פני כדור הארץ, גובה הנפילה h הוא המרחק שאליו הגיע הגוף מנקודת התחלת התנועה, מכאן מתקבל:

- מהירות המסה הראשונה, המשוחררת ממנוחה, כפונקציה של גובה הנפילה, נתונה על ידי:

$$V_1(h) = \sqrt{2gh} \qquad (4)$$

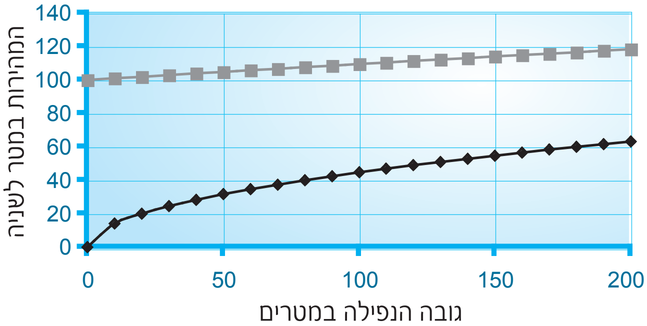
- מהירות המסה השנייה, שנזרקה למטה במהירות V_0, כפונקציה של גובה הנפילה, נתונה על ידי:

$$V_2(h) = \sqrt{V_0^2 + 2gh} \qquad (5)$$

הפרש המהירויות, בכל גובה נפילה נתון תוך כדי תנועתן, נתון על-ידי:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \sqrt{V_0^2 + 2gh} - \sqrt{2gh} \qquad (6)$$

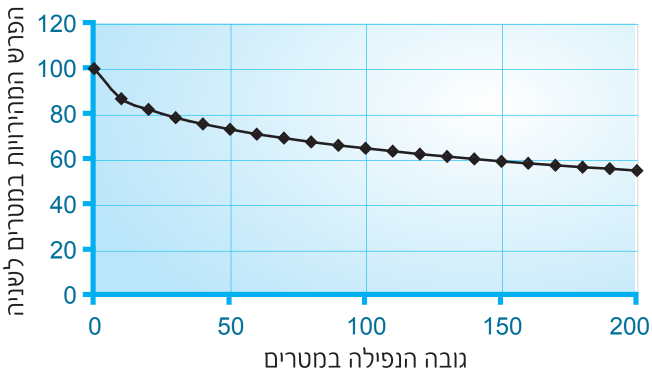
התבוננות בנוסחה 6 מראה שהפרש המהירויות כפונקציה של גובה הנפילה תלוי בגובה הנפילה ובמהירות ההתחלתית בה נזרקה המסה השנייה, ותלות זו אינה ליניארית. שימוש בגיליון האלקטרוני כמקודם, מאפשר הצגה ויזואלית של שתי המהירויות כפונקציה של גובה הנפילה (גרף 2).



גרף 2: מהירות שתי המסות כפונקציה של גובה הנפילה

הצגה גרפית של שתי המהירויות כפונקציה של גובה הנפילה (גרף 2), מראה שהפרש המהירויות של שתי המסות בהיותן באותו גובה אינו נשמר. התבוננות בגרף 2 מראה שהפרש המהירויות מקסימאלי ברגע התחלת התנועה והוא V_0, הפרש זה הולך וקטן עם נפילת שני הגופים. לצורך סרטוט גרף 2 בחרנו V_0 = 100 m/s והגובה ממנו התחילה התנועה הוא H = 200 m.

לסרטוט גרף 3, המתאר את הפרש מהירויות של שתי המסות כפונקציה של גובה הנפילה, השתמשנו בנתונים של גרף 2.



גרף 3: הפרש המהירויות של שתי המסות "שאינו נשמר" כפונקציה של גובה הנפילה

גרף 3 מראה בצורה ברורה שהפרש המהירויות הולך וקטן עם גדול גובה הנפילה, בתחילת התנועה ההפרש הוא V_0 והירידה בהפרש המהירויות חדה יחסית, בשלבי התנועה האחרונים הירידה בהפרש המהירויות מתונה יחסית.

חשוב להצביע על כך שהגופים לא יהיו באותו מקום בו זמנית. הגוף המהיר יותר (זה שנזרק במהירות V_0) יעבור את גובה הנפילה **בזמן קצר** יותר, אי לכך גודל המהירות המצטברת שלו $V(t)=V_0 + gt$ יהיה קטן יותר ולכן הפרש המהירויות ילך ויקטן. זו דרך לפתח הבנה ותפיסה אינטואיטיבית.

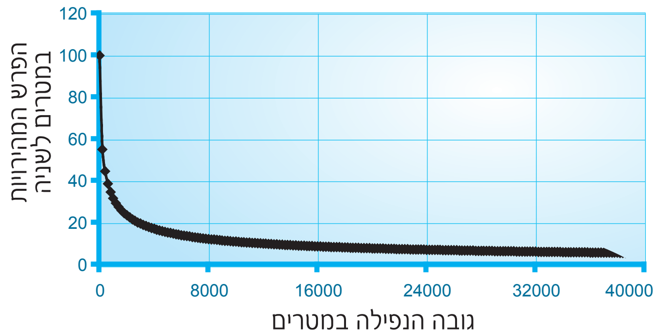
השפעת גובה הנפילה המרבי על הפרש המהירויות

בסעיף זה בחרנו מהירות זריקה התחלתית של המסה השנייה $V_0 = 100$ m/s.

I. אם הגובה המרבי, ממנו התחילה התנועה של שתי המסות, הוא גדול מאוד $H >> 1m$, אזי הפרש המהירויות לקראת סוף תנועתם מתקרב לאפס. זאת ניתן לראות בהתבוננות במשוואה 6, אם ניקח $2gh >> V_0^2$, אזי ניתן להזניח את V_0^2 לעומת 2gh. לכן הפרש המהירויות של שתי המסות מתקרב לאפס ומשוואה 6 תקבל את הצורה הבאה:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + 2gh} - \sqrt{2gh} \approx 0 \qquad (7)$$

השימוש בגיליון האלקטרוני מאפשר לנו המחשה ויזואלית שהפרש המהירויות שואף לאפס עבור גבהים גדולים יחסית. בהכנת הגרף בחרנו גובה מרבי של 40 ק"מ. בסרטוט כל הגרפים הנחנו שתאוצת הגרביטציה שווה ל־$g = 10\ m/s^2$ (גרף 4).

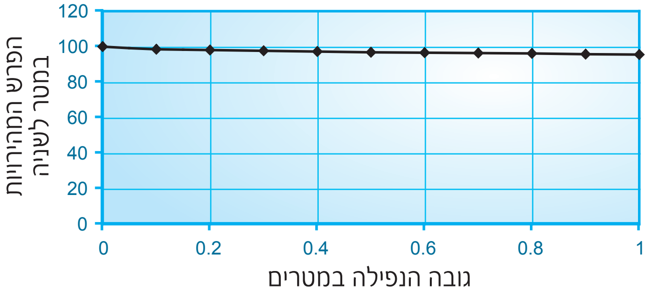


גרף 4: הפרש המהירויות של שתי המסות כפונקציה של גובה הנפילה. הגובה המרבי הוא 40 ק"מ, והמהירות ההתחלתית היא $V_0 = 100\ \frac{m}{s}$

II. אם הגובה המרבי, ממנו התחילה התנועה של שתי המסות, קטן $H \sim 1m$, הפרש המהירויות נשמר. זאת ניתן לראות כדלקמן: אם $H = 1m$, אזי גובה הנפילה מקיים: $h \leq 1m$. אבל היות שמהירות זריקת המסה השנייה $V_0 = 100$ m/s, קיים $2gh << V_0^2$, לכן ניתן להזניח את 2gh לעומת V_0^2. לכן הפרש המהירויות של שתי המסות נשמר בקירוב טוב, וערכו שווה בקירוב ל־ V_0, ומשוואה 6 תקבל את הצורה הבאה:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + 2gh} - \sqrt{2gh} \approx V_0 \qquad (8)$$

גרף 5 מראה שהפרש המהירויות כמעט לא השתנה עבור גבהים קטנים יחסית, והפרש המהירויות שמר בקירוב טוב על ערכו ההתחלתי V_0.



גרף 5: הפרש המהירויות של שתי המסות כפונקציה של גובה הנפילה. הגובה המרבי הוא מטר אחד

השפעת מהירות הזריקה של הגוף השני על הפרש המהירויות

בסעיף זה בחרנו גובה מרבי של 200 מטר לתחילת תנועת שתי המסות.

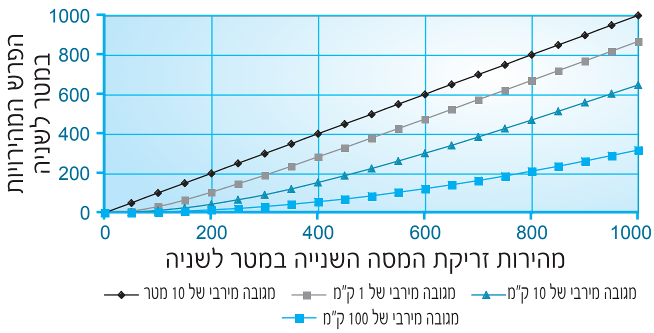
I. אם מהירות זריקת המסה השנייה V_0 גדולה מאוד, אזי $2gh << V_0^2$, עקב כך ניתן להזניח את 2gh לעומת V_0. לכן הפרש מהירויות של שתי המסות נשמר בקירוב טוב, וערכו שווה ל־V_0, ומשוואה 6 תקבל את הצורה הבאה:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + 2gh} - \sqrt{2gh} \approx V_0 \qquad (8')$$

II. אם מהירות זריקת המסה השנייה V_0 קטנה מאוד, אזי $2gh >> V_0^2$, וניתן להזניח את V_0^2 לעומת 2gh. לכן הפרש המהירויות של שתי המסות שואף לאפס, ומשוואה 6 תקבל את הצורה הבאה:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + 2gh} - \sqrt{2gh} \approx 0 \qquad (7')$$

השימוש בגיליון האלקטרוני, מאפשר מעקב אחרי השינויים בהפרש המהירויות. בגרף 6 אנו רואים את ההפרש במהירויות של שתי המסות כפונקציה של מהירות זריקת המסה השנייה, עבור סדרה של גבהים מרביים.



גרף 6: תלות הפרש המהירויות של שתי המסות כפונקציה של מהירות זריקת המסה השנייה, עבור סדרה של גבהים מרביים. אנו הנחנו שתאוצת שני הגופים אחידה וקבועה לכל הגבהים

התבוננות בגרף 6, מראה שקיים:

- חסם עליון להפרש בין שתי המהירויות: הערך הגדול ביותר שהפרש המהירויות יכול לקבל הוא גודל מהירות הזריקה של המסה השנייה (ראה נוסחה 8 ו- ′8), ללא תלות בגובה המרבי ממנו נזרקו שתי המסות.
- חסם תחתון להפרש בין שתי המהירויות: הערך הקטן ביותר שהפרש המהירויות יכול לקבל הוא אפס (ראה נוסחה 7 ו- ′7), וזה כאשר הגובה המרבי ממנו נזרקו שתי המסות גדול מאוד. ראוי לציין, שבמקרה זה, נוסחאות הקינמטיקה בהן השתמשנו בניתוח הקודם, אינן תקפות, שכן תאוצת הגופים אינה קבועה ואינה אחידה לכל הגבהים. אולם למרות זאת, הנחנו לשם פשטות, שתאוצת שני הגופים אחידה וקבועה לכל הגבהים.
- ככל שגדל הגובה המרבי ממנו התחילו שני הגופים את תנועתם, ההפרש בין שתי המהירויות ילך וישאף לאפס.
- קצב שינוי ההפרש במהירויות כפונקציה של מהירות הזריקה של המסה השנייה אינו אחיד. תלות ליניארית קיימת כאשר הגובה המרבי $h = H$ וכאשר $H \rightarrow \infty$, התלות אינה ליניארית כאשר הגובה המרבי $0 < H << \infty$.

דיון וסיכום

פתרון הבעיה הנתון כאן שונה מהפתרון הנתון במדריך למורה,[4] ראינו כאן גישה לא שגרתית, של פתרון בעיות פיסיקאליות, תוך ניצול מושכל של הגיליון האלקטרוני. במאמר קודם[3] ראינו כיצד גישה זו תורמת להעצמת היכולת של הלומד (תלמיד ומורה) וכיצד היא מפתחת חשיבה רב כיוונית אצל הלומד כשהוא בא לנתח בעיות ולפתור אותן. הנאת התלמידים בפתרון כזה ומידת הבנתם של הנושא הנלמד (הנחקר), אינה פחותה ממידת הנאתי בניתוח הבעיה והעלאת יכולת ההכללה למצבים שונים ובעיות אחרות. פתרון הבעיה בגישה זו כולל בתוכו מכלול של הסברים שקיים ביניהם סדר לוגי וניתן לקשר ביניהם, בנוסף לכך אתה עשוי לפגוש אפשרויות שלא עלו בדעתך קודם. לא רק זה, אלא ניתן לעקוב אחרי מידת השינוי המתרחש במעבר בין המצבים השונים וגם ללמוד ולחקור את קצב השינוי ומהותו. בגישה זו מפתחים הלומדים את יכולתם להתמודד בהצלחה עם הבעיות הכמותיות והאיכותיות.

מראי מקום

1. רוזן ע., קראקובר ז., (1996). "מכניקה ניוטונית", כרך א', בעיה 41 עמוד 68, המחלקה להוראת המדעים מכון ויצמן למדע.
2. מסאלחה ט. (2006). "התפתחות תפיסת המושגים הפיסיקאליים מתיכון למכללה ולאוניברסיטה", יפורסם בקרוב.
3. מסאלחה ט. (2005). "פתרון אנליטי של בעיות פיסיקאליות בעזרת המחשה גרפית במחשב". תהודה (1)**25**,עמ' 8.
4. רוזן ע., (1999). "מכניקה ניוטונית" - מדריך למורה, עמוד 23, המחלקה להוראת המדעים מכון ויצמן למדע.

תודות

אני מודה לד"ר דוד סלע על הערותיו החשובות.

תהודה

לידיעת המורים!

בהתאם לכתוב בחוזר מיוחד ה' תשנ"ה יזכו מאמרים שלכם שיפורסמו ב"תהודה" בגמול השתלמות כפי שפורסם בחוברת "זכויותיך", (אוקטובר-נובמבר 94, עמ' 47, אוקטובר 1994) סעיף 36ג'. להלן הקטע הרלבנטי:

עבודת מחקר או פרסום מדעי

עובד הוראה, שכתב עבודת מחקר או חיבור מדעי, שפורסם בכתב-עת או בקלטת, תיבדק זכותו לגמול השתלמות ע"י ועדה מיוחדת הפועלת ליד גף דירוג והסמכה באגף כוח-אדם בהוראה. זאת בתנאי שהעבודה הנדונה לא זיכתה את עובד ההוראה בדרגת שכר או בתואר. הוועדה תחליט על מספר הגמולים לפי שיקול דעתה ועפ"י הכללים כלהלן:

עריכה, ליקוט או תרגום אינם מזכים בגמול השתלמות.

עובד הוראה המועסק באגף תוכניות לימודים, במרכז להוראת המדעים (מל"מ), במרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח) וכיו"ב, לא יזוכה בגמול בעד כתיבה בתוקף תפקידו.

עובד המועסק בהוראה בהיקף של 2/3 ממשרה מלאה לפחות, והוא מועסק גם בכתיבה באחת המסגרות הנ"ל בהיקף של עד 1/3 משרה, יהיה זכאי להגיש בקשה לגמול בעבור כתיבת חומר לימודי. לשם כך עליו להמציא אישור על שיעור משרתו משני מקומות העבודה.

משרד החינוך לא יתחייב להחזיר את הפרסומים. חלקם נשארים בספריות שונות של המשרד, אך רובם מוחזרים לבעליהם.

בקשות עפ"י סעיף זה יוגשו ע"ג טופס מיוחד מס' ח"ת 050.202, שניתן לקבלו בלשכות המחוזיות של משרד החינוך.