



כאוס

מאת קלריסה ברקוביץ-גלמן

חזי יצחק - בי"ס תיכון לחינוך סביבתי, מדרשת שדה בוקר והמכון לחקר המדבר, אוניברסיטת בן גוריון

חֲקִיק אַחַד עַל אֶבֶק מִתְעוֹשֵׁל, וּמְקוֹשֵׁל בּוֹ הַאֲדָמָה הַעֲצוּמָה כּוֹלָה;
פֶּרֶחַ אַחַד מֵאֵלֶּבֶט, וְהִיקוּס עוֹלָה מִתּוֹכוֹ"

מתוך חיבור צ'אן בודהיסטי עתיק

אגב הזדמנות טובה לחבר את התלמידים לפתרון נומרי של משוואות שהוא היום אחד הכלים החשובים במחקר המדעי. המחשב הוא מעין מעבדה שבאמצעותו מבצעים ניסויים. ניתן לחשוב על שימוש בתוכנות מתימטיות מודרניות יותר כמו Mathematica שבאמצעותה ניתן יהיה אף להעמיק את הלימוד. הספר יפה מאד מבחינה ויזואלית וכולל הרבה מאד שאלות ומשימות ממוחשבות. ההסברים הם ברורים ומלווים בהרבה איורים להבהרת המושגים הנלמדים.

בפרקים השונים מפותחים הכלים והמושגים המתמטיים ששייכים לדינמיקה לא ליניארית. נעשה שימוש במרחב המופע (phase space) להבדיל מהגרפים התלויים בזמן הנלמדים בתיכון. כמו כן מוסברים המושגים של נקודות שבת ויציבות, דיאגרמת התפצלויות ומושכים וכן מעריך ליאפונוב שהוא מדד לכאוסיות של מערכת דינמית. כל אלה הם מושגים חדשים המרחיבים את ההבנה הפיסיקלית של התלמידים ומהווים מושגי מפתח במדע המודרני.



הפרק השישי דן בגיאומטריה הפרקטלית שהיא הגיאומטריה של הטבע. פרקטלים הם צורות גיאומטריות המאופיינות על ידי דמיון עצמי. תכונה שבה השלם מורכב מהרבה חלקים שהם העתקים של השלם. פרקטל מגלה פרטים חדשים בכל סקלה שבה נסתכל עליו בדיוק כמו קו חוף מפורץ הכולל מפרצים בתוך מפרצים בתוך מפרצים... ניתן לאפיין את הפרקטלים על ידי מימדים שהם מספרים לא שלמים ומבטאים את מידת המורכבות שלהם, כך לדוגמה המימד הפרקטלי של קו החוף של בריטניה הוא כ-1.26. ואילו של קו החוף של ישראל הוא 1 בדיוק כמו המימד האוקלידי של ישר וזאת משום שארצנו נתברכה בקו חוף די חלק. לעומת הפרקטלים המתמטיים בעלי הדמיון העצמי המדויק, הפרקטלים בטבע הם בעלי דמיון עצמי סטטיסטי בלבד וכן מספר הסקאלות בהם הוא מופיע

הספר כאוס שיצא לאור בנובמבר 2004 עוסק באחת התורות המדעיות המרתקות ביותר שפותחה בשלושת העשורים האחרונים של המאה ה-20. מערכות כאוטיות הן מערכות דטרמיניסטיות לא ליניאריות המתאפיינות על ידי רגישות לתנאי התחלה או מה שמכונה "אפקט הפרפר", כלומר שינוי זעיר בתנאי ההתחלה של המערכת יגרום לשינוי גדול בפתרון בזמנים ארוכים ולא יבדוד יכולת החיזוי. זו הסיבה שתחזיות מזג האוויר של השירות המטאורולוגי ניתנות לארבעה ימים בלבד. למרבה ההפתעה התגלה שמערכות כאוטיות לא חייבות להיות מערכות מסובכות. התנהגות כאוטית ניתן לגלות גם במערכות פשוטות מאד כמו מטוטלת מאולצת מרוסנת, מערכת שגם תלמיד תיכון מסוגל להבניה, וזו נקודת החיבור של הספר לפיסיקה התיכונית הרגילה הנלמדת בבתי הספר שהיא בעיקרה פיסיקה ניוטונית. בעיניו של תלמיד תיכון ממוצע שסיים ללמוד פיסיקה בהיקף מורחב, היקום הוא מעין שעון משוכלל הפועל על סמך חוקים דטרמיניסטיים כמו החוק השני של ניוטון וכל מה שנותר הוא להציב את תנאי

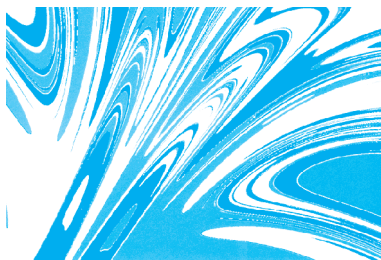
ההתחלה של המערכת ולחשב את העתיד, בסתירה להרגשתו הפנימית שהבעולם המציאותי יש ודאות אך גם הרבה אי ודאות על כל צעד ושעל. גילוי הכאוס במערכות פשוטות יחסית ולא מורכבות היה בגדר חידוש והביא לתובנות חדשות לגבי תהליך המעבר לכאוס. התברר שמערכות שונות מגלות תכונות דומות במעבר להתנהגות כאוטית, כלומר יש דפוסי התנהגות אוניברסליים החוצים דיסציפלינות מדעיות שונות.

הספר מתגבר על הקושי המתמטי הכרוך בלימוד הנושא באמצעות פתרון מיפויים חד-מימדיים שהם משוואות הפרשים רקורסיביות, שניתן לפתור אותן באמצעות איטרציות נומריות שאותן ניתן לכתוב בשפת תיכנות או להשתמש בתוכנות המסופקות על גבי התקליטור המצורף לספר. זוהי דרך

גרף של מהירות כפונקציה של המקום ולתרגל את התלמידים לנתח גרפים כאלו שמלמדים על ההתנהגות האסימפטוטית של המערכת.

במסגרת עבודת המסטר שלי בדקתי כיצד תלמידים מבינים את המושג דמיון עצמי שהוא מרכזי בגיאומטריה הפרקטלית וכיצד הם מיישמים אותו בפתרון בעיות. התלמידים התקשו להבדיל על סמך התבוננות בלבד, בין דמיון עצמי סטטיסטי המאפיין את הפרקטלים בטבע לבין אי קיום דמיון עצמי. הנושא של מהי בדיוק אקראיות ומה ההבדל בין התנהגות אקראית לבין התנהגות שיש בה מבנה פרקטלי עלה במהלך הלימוד, ותלמידים התקשו להבין כיצד מחשב יכול ליצור פלט אקראי על ידי אלגוריתם מתימטי שלכאורה אמור להיות מדויק.

כמו כן גיליתי שהתלמידים לא שולטים ברקע המתימטי של דמיון ומבלבלים בין יחס קבוע להפרש קבוע. לעומת זאת, זוג תלמידים טובים כתב עבודת חקר בה הם חיטבו את המימד הפרקטלי של מצוק הצינים הוא המצוק שמעל נחל צין בקרבת מדרשת שדה בוקר. הם השתמשו בשיטת ספירת הקופסאות המתוארת בספר וגילו שקו המצוק מורכב למעשה משני קטעים בעלי אופי שונה בהתאם למבנה הגיאולוגי שלו. קטע אחד בעל מימד פרקטלי $d = 1.1928$ ובנוי מסלעים רכים של חוואר וחרסית ואילו הקטע השני הבנוי מסלעי גיר קשים הוא בעל מימד פרקטלי נמוך יותר $d = 1.0779$. התלמידים ייחסו את ההבדל בין המימדים הפרקטליים לאופי המסולע הבונה



את שני הקטעים. זוהי דוגמה יפה לעבודה בינתחומית בנושא הקשור לכאוס שתלמידים טובים מסוגלים לבצע במהלך לימודיהם בתיכון.

בסיכום, נוכחתי שתלמידים מסוגלים להבין את הרעיונות המרכזיים ואף נהנים מלימוד נושא חדש שמידי פעם גם עולה לכותרות, אך כדאי לציין שהוראת הפרק דורשת זמן רב יותר מאשר פרק בחירה שגרתי כמו זרם חילופין או מכניקה של גוף קשיח. כמו כן נדרש שינוי מחשבתי אצל המורה וגם התלמיד, העולם הופך למורכב ועשיר יותר, לא הכל צפוי בו מראש. לאור כל השינויים המתחוללים כיום בתוכנית לימודי הפיסיקה, קשה לראות היכן ניתן יהיה לשלב פרק זה בהוראת הפיסיקה ורק מורים "משוגעים" לדבר יעשו בו שימוש, וחבל.

כדאי לציין שהרעיונות של הכאוס והגיאומטריה הפרקטלית חרגו מזמן מההקשר המדעי הצר והם חלחלו לתחומים שונים כמו מוסיקה פרקטלית, אומנות וכן לפסיכולוגיה ולפילוסופיה.

תהודה

הוא כמובן סופי. הגיאומטריה הפרקטלית מאפשרת לנו לכמת את מידת החספוס, הזגזוג והפיתוליות של מבנים גיאומטריים בטבע שצלמים וציירים הבינו מבחינה אינטואיטיבית מזמן. אחרי שאתה לומד על תכונה זו של דמיון עצמי, הדרך בה אתה מסתכל על הסובב משתנה, כך קרה לי.

הפרקטלים מופיעים בתחומים שונים ומגוונים כמו בגיאומורפולוגיה, בעננים, בגידול גבישים, בפיסיולוגיה, בבוטניקה ועוד. אפשר ליצור פרקטלים בעזרת מחשב והתמונות מרהיבות ואסתטיות לעין ותלמידים ינהנים מכך. הקשר בין הגיאומטריה הפרקטלית לכאוס הוא, שבמקרים רבים מערכות כאוטיות יוצרות מבנים פרקטליים. הפרק האחרון של הספר מנתח את ה"מושך המוזר" המתקבל בתנועה של מטוטלת מרוסנת מאולצת ודן בנושא של בניית מודל למערכת פיסיקלית והתאמתו למציאות.

נשאלת השאלה האם תלמידים בתיכון מסוגלים ללמוד ולהבין את הרעיונות המוצגים בספר? האם הם מסוגלים להתגבר על הקושי המתימטי?

התנסיתי בהוראת הנושא כאוס בתור פרק בחירה. קבוצת התלמידים מנתה תשעה תלמידים בכיתה י"ב, ולפני תחילת הלימוד עברנו פעילות של יומיים בנושא כאוס ביחידה לפעולות נוער במכון ויצמן למדע, אחד הקשיים שנתקלתי בהם הוא חוסר מערכות אמיתיות להדגמה בכיתה וכן העובדה שהפיסיקה הקשורה למערכות האלו בד"כ לא נלמדת בשיעורים הרגילים בבית הספר. לתלמידים היה קשה להבין ממה בדיוק נובעת ההתנהגות

הכאוטית של המטוטלת המרוסנת המאולצת. כמו כן המושג של רגישות לתנאי התחלה עומד בניגוד לאינטואיציה הליניארית שבה הורגלו התלמידים לחשוב. בדרך כלל במשך כל לימודי הפיסיקה בתיכון אנו נוטים להזניח שגיאות קטנות כמו בדוגמא של מטוטלת מתימטית בה אנו מבצעים קירוב התקף רק לתנודות בעלות משרעת קטנה. בקירוב זה אנו מקבלים שזמן המחזור של המטוטלת אינו תלוי במשרעת. התלמידים מקבלים את הרושם, שבדרך כלל ניתן לבצע קירובים משום שהשגיאה אינה גדלה עם הזמן. והנה מתברר שזה לא הכלל, אלא היוצא מהכלל. וכאן עולה השאלה, מתי מותר לנו לבצע קירובים ליניאריים של משוואות התנועה

התלמידים התקשו להבין את המושג של מרחב המופע וזאת משום שאנו הרגלנו אותם לסרטט גרפים כפונקציה של הזמן ולא גרפים של משתנה דינמי אחד כפונקציה של משתנה אחר. לכן כדאי מידי פעם אפילו בלימודי המכניקה הרגילים לסרטט