

על פתרון אחת מבעיות המכניקה

איליה מזין, בית הספר התיכון מכבים-רעות-מור מודיעין,
מיכאל יאנקלוביץ', בית הספר התיכון המקיף ו', ראשון לציון

מבוא

לפעמים מורה לפיסיקה פוגש בעבודתו תרגיל שנראה לו פשוט וטריוויאלי, אך הוא בכלל לא פשוט וטריוויאלי לתלמידים, אפילו חזקים למדי, שלומדים את מקצוע הפיסיקה ברמה מוגברת. אנחנו בדקנו אחד התרגילים מסוג זה ומביאים כאן את הנושא לדיון פתוח.

הנה אחד הסעיפים מתרגיל שנכתב על-ידי ד"ר דוד זינגר.

המרחק בין שתי הערים A ו-B הוא 110 km. את שתי הערים מחבר כביש ישר. מעיר A יצאה מכונית לכיוון עיר B ב-8:00 בבוקר ונעה במהירות קבועה של $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. כאשר השעה היתה 8:30 בבוקר, יצאה מעיר B משאית לקראת העיר A ונעה במהירות קבועה של $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. מתי והיכן ייפגשו שני כלי הרכב?

אנחנו פנינו לכמה מורים וביקשנו מהם לפתור את התרגיל כך שיהיה זהה לחלוטין לפתרון השכיח והמקובל בכיתות בהן הם מלמדים.

א. בוחרים ציר וקובעים את הראשית והכיוון ומציבים עליו את שני כלי הרכב ב-A וב-B בהתאמה (תרשים 1).



תרשים 1

רושמים את משוואת התנועה לגבי כל כלי בעזרת הביטוי הבא:
 $x = x_0 + v \cdot t$

$$\begin{aligned} x_A &= x_{0,A} + v_A \cdot t_A & x_B &= x_{0,B} + v_B \cdot t_B \\ x_A &= 80 \cdot t_A & x_B &= 110 - 60 \cdot t_B \end{aligned}$$

מסבירים לתלמידים שסימן המינוס משמעותו שתנועת הגוף היא בכיוון המנוגד לכיוון הנבחר של הציר. לאחר מכן מציע המורה לשלב בין הזמנים ולקרוא לזמן תנועתו של גוף A: t

ולקרוא לזמן תנועתו של גוף B: $t - 0.5$ (הזמן נמדד בשעות).

מתקבלות שתי משוואות תנועה חדשות

$$x_A = 80 \cdot t \qquad x_B = 110 - 60(t - 0.5)$$

המפגש מתרחש כאשר שני הגופים נמצאים באותה נקודה בו-זמנית, ולכן משווים את x_A ו- x_B המתארים כל אחד את

ההעתק מנקודת המוצא A.

$$\begin{aligned} x_A &= x_B \\ 80 \cdot t &= 110 - 60(t - 0.5) \\ 80 \cdot t &= 110 - 60t + 30 \\ 140t &= 140 \\ t &= 1\text{h} \end{aligned}$$

מציבים t במשוואה $x_A = 80 \cdot 1 = 80\text{km}$ ומקבלים את המיקום נקודת המפגש וזמן המפגש מרגע יציאת המכונית.

פתרון של תרגיל דומה מופיע בספר של עדי רוזן "מכניקה ניוטונית" כרך א', עמ' 29, דוגמה 4. אנחנו בטוחים שהפתרון של מר רוזן מלא, יפה ומקצועי. יחד עם זאת כדאי שלרשות כל מורה ומורה יהיו דרכי פתרון נוספים, כמו השימוש במילים נרדפות, כדי להעשיר את הוראת הפיסיקה. דברינו לא מחליפים את הפתרונות הקיימים, אלא מוסיפים לבנק הפתרונות אפשרויות נוספות שבאות מכיווני הסתכלות שונים. תלמידים שפוגשים שאלה מסוג זה נתקלים בקשיים בקביעת תנאי ההתחלה. לא קל להם להתמודד עם כיוונים מנוגדים של תנועת הגופים ולהתמודד עם העובדה ששני כלי הרכב אינם מתחילים את תנועתם בו-זמנית.

ב. בניגוד לפתרון הקודם אנו ממליצים לחלק את התרגיל לשני חלקים נפרדים.

החלק הראשון: המשאית נמצאת במנוחה בעיר B והמכונית נעה לקראתה במהירות $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ במשך חצי שעה. היכן יימצאו כלי הרכב בתום מחצית השעה. חלק זה לא מהווה שום קושי לתלמיד, כי ברור שהמשאית נשארת במקומה במשך מחצית השעה הזאת והמכונית התקרבה למשאית ב-40km, כי מהירותה $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ובעצם דיברנו על תנועה של גוף יחיד. כיוון הציר החיובי נבחר ימינה והצופה נמצא על הקרקע בראשית הציר "0".

נגד זמן" שני גרפים לגבי שני כלי הרכב. גרף א בתרשים 4 מתאר את תנועת המכונית ונמצא מעל ציר הזמן, כי מהירותה חיובית (עם הכיוון הנבחר של הציר) והוא קו המקביל לציר הזמן, כי גודל המהירות לא משתנה. גרף ב בתרשים 4 מתאר את תנועת המשאית ונמצא מתחת לציר הזמן, כי מהירותה שלילית (בניגוד לכיוון הנבחר של הציר). חשוב לציין שהגרף לא מתחיל מאפס מבחינת הזמן אלא מרגע בו השעון מורה על 8^{30} . השטח הכלוא בין הגרף "מהירות נגד הזמן" לבין ציר הזמן מהווה את המרחק שעובר הגוף מכיוון ששני כלי הרכב היו בהתחלת התנועה מרוחקים זה מזה 110 km . הם ביחד השלימו אותו מרגע בו התחילו לנוע עד לרגע בו נפגשו. זאת אומרת שסכום שני השטחים הכלואים בין הגרפים לבין ציר הזמן ברגע בו כל גוף התחיל לנוע ועד לרגע המפגש (שנקרא t^* בתרשים בו כל גוף התחיל לנוע) שווה ל 110 km : השטח מתחת לגרף א $x_A = 80t$ (4 צריך להיות שווה ל 110 km : והשטח מתחת לגרף ב $x_B = 60(t - 0.5)$. סכום השטחים $80t + 60(t - 0.5) = 110$. (ראה תרשים 4).

$$80t + 60(t - 0.5) = 110$$

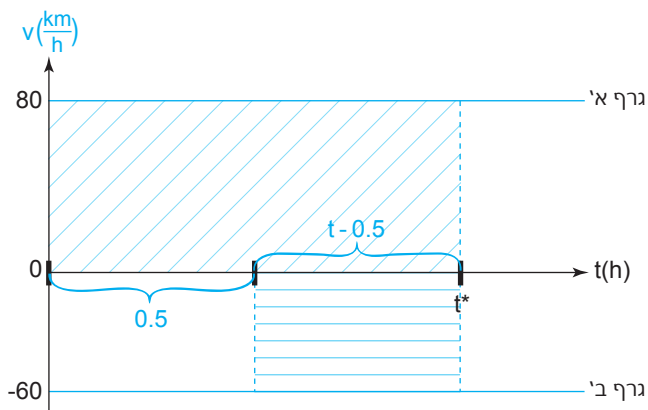
$$80t + 60t - 30 = 110$$

$$140t = 140$$

$$t^* = 1 \text{ h}$$

שני כלי הרכב ייפגשו שעה אחת לאחר יציאת המכונית. השטח הכלוא מתחת לגרף של המהירות מהווה את המרחק שעברה עד למפגש

$$80t = 80 \cdot 1 = 80 \text{ km}$$



תרשים 4

ד. (מורה א) לפי דעתי, אומר המורה, עדיף לפתור את התרגיל גרפית. נסרטט במערכת צירים אחת שני גרפים מיקום נגד זמן לגבי שני כלי הרכב. לשם כך נתאר קודם כל את המתרחש בעזרת המשוואות. (ראה תרשים 1)



תרשים 2 המצב ההתחלתי של החלק הראשון



תרשים 3 המצב ההתחלתי של החלק השני

החלק השני: המיוחד לחלק השני הוא שהפעם שני כלי הרכב כאילו יצאו בו-זמנית משתי נקודות זינוק. ברגע הזה המכונית נמצאת בנקודה שמיקומה 40 km והמשאית נמצאת בנקודה בעלת מיקום של 110 km . הן יוצאות בו-זמנית זו לקראת זו. המכונית במהירות $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ והמשאית במהירות $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. באיזוקוארדינטה תיפגשנה? נרשום את משוואות התנועה לגבי שני כלי הרכב לפי הביטוי הכללי לתנועה שוות מהירות $x = x_0 + v \cdot t$

$$x_A = 40 + 80 \cdot t$$

$$x_B = 110 - 60 \cdot t$$

המפגש מתרחש כאשר הקואורדינטות שוות:

$$x_A = x_B$$

$$40 + 80 \cdot t = 110 - 60 t$$

$$140t = 70$$

$$t = 0.5 \text{ h}$$

לפי דעתנו יש להדגיש את הסימן השלילי של מהירות המשאית (כיוון התנועה הפוך לכיוון הנבחר של הציר). מציבים את t באחת המשוואות, נניח לגבי המכונית,

$$x_A = 40 + 80 \cdot 0.5 = 80 \text{ km}$$

המפגש יתרחש בנקודה שהקואורדינטה שלה 80 km . **החלק האחרון:** אחרי כמה זמן מהרגע בו יצאה המכונית מעיר A נפגשים שני כלי הרכב? התשובה היא שעה אחת, משום שחצי שעה נעה המכונית בחלק הראשון של התרגיל ועוד חצי שעה בחלק השני.

ג. דרך נוספת להצגת הפתרון לסעיף זה על ידי הצגת "השטחים". ננסה לבנות במערכת צירים אחת "מהירות"

ה. (מורה ב) נבחר את הכיוון של ציר המיקום ואת ראשיתו. נצמיד את הצופה אל המשאית ונרשום את מה שהוא רואה. במשך 0.5 שעה נעה לקראתו המכונית במהירות $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ולאחר מכן מגבירה המכונית את מהירותה עד ל- $140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (המהירות היא חיובית מכיוון שהמכונית נעה בכיוון הציר לפי דעתו של הצופה). המרחק שהמכונית צריכה לעבור עד לצופה הוא 110 km. הצופה רושם משוואה המורכבת משני איברים, שאחד מהם מאפיין את התנועה של המכונית במהירות $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ והשני את תנועת המכונית במהירות $140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

$$x_{\text{מכונית}} = 80 \cdot 0.5 + 140t$$



תרשים 8:

מכיוון שהמיקום x של הצופה נשאר קבוע (לפי דעתו) גם כאשר המכונית תיפגש עם המשאית שהצופה עליה, המיקום יישאר 110 km לכל המצבים בביטוי שקיבלנו במקום $x_{\text{מכונית}} = 110$ ומקבלים:

$$110 = 80 \cdot 0.5 + 140t$$

$$110 = 40 + 140t$$

$$70 = 140t$$

$$t = 0.5h$$

התשובה היא: שני כלי הרכב ייפגשו שעה אחת מרגע בו יצאה המכונית מעיר A או חצי שעה מרגע בו מהירות המכונית לפי הצופה הצמוד למשאית הפכה להיות $140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ במקום $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. עכשיו קל לענות על החלק השני של השאלה: היכן ייפגשו שני כלי הרכב? כדי לענות על שאלה זו עדיף להצמיד את הצופה לקרקע ולרשום את משוואת התנועה לגבי המכונית בצורה הבאה:

$$x_{\text{מכונית}} = 80 \cdot t$$

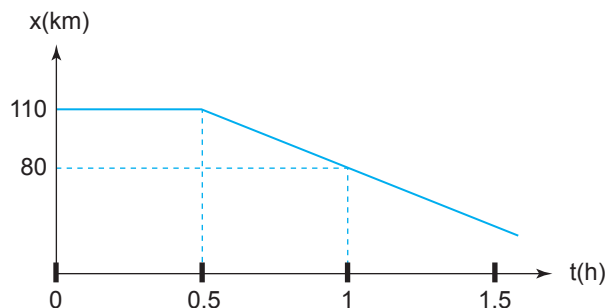
מכיוון שהזמן לא תלוי במערכת הייחוס (ברמה שלנו) הזמן בו נעה המכונית עד למפגש עם המשאית נשאר שעה אחת לכן מיקום המפגש הוא $x = 80 \cdot 1 = 80 \text{ km}$.

מראי מקום

- רוזן, ע', מכניקה ניוטונית, כרך א', עמ' 29-30, דפוס מאירי בע"מ, 1999.
- זינגר, ד', מכניקה, חלק א', עמ' 81, תרגיל 16, הוצאת "רכגולד ושות'", 1997.

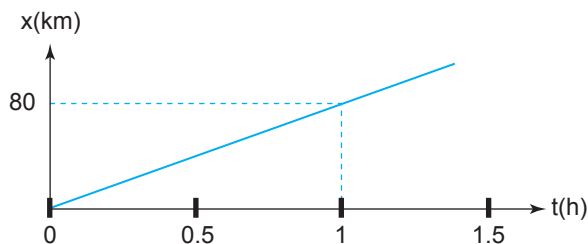
תהודה

המשאית נחה במשך חצי שעה בנקודה שמיקומה 110 km. דבר זה יבוא לידי ביטוי בגרף כקטע אופקי המקביל לציר הזמן. לאחר מכן נעה המשאית במהירות $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ בכיוון ההפוך לכיוון שנבחר כחיובי ולכן הקטע השני של הגרף יהיה קו ישר עם שיפוע שלילי של 60 - (תרשים 5).



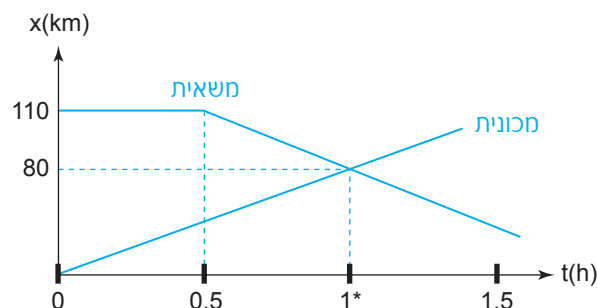
תרשים 5: מיקום המשאית בתלות בזמן

הסיפור לגבי המכונית פשוט יותר. המכונית יוצאת מייד מהנקודה שמיקומה 0 ונעה עם הכיוון החיובי של ציר ה-x במהירות של $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. הגרף נראה כקטע משופע עם שיפוע חיובי של 80 המתחיל מראשית הצירים (ראה תרשים 6).



תרשים 6: מיקום המכונית בתלות בזמן

כדי למצוא את מיקום המפגש והזמן יש להעתיק את שני הגרפים למערכת צירים אחת. שני הגרפים נחתכים בנקודה המאפיינת את המפגש של שני כלי הרכב (תרשים 7).



תרשים 7

התשובה היא: המיקום והזמן של המפגש של $x = 80 \text{ km}$, $t^* = 1 \text{ h}$ בהתאמה.