

תנודות חופשיות של מיתר גיטרה

לאב קרקובר, המרכז ללימודי קדם אקדמיים, האוניברסיטה העברית, ירושלים
והחלוקה להוראת המדעים, מכון וייזמן למדע

תקציר

מיתר גיטרה מעורר על ידי פריטה. לתנודתו החופשית של "מיתר פרוט" יש צורה פשוטה המשקפת את העקרונות הבסיסיים ביותר של תנועת הפרעות בתווך. קל מאוד להדגים זאת באמצעות פתרון ממוחשב מלווה בהדמייה. מדידה ניסויית של תנועת נקודה על גבי מיתר שמתנדד מאות פעמים בשנייה היא אתגר. מדידה כזו נעשתה על ידי תלמידים בבית הספר התיכון למדעים ולאמנויות בירושלים בתשנ"ד. מתקבלת התאמה מושלמת בין תאוריה לבין ניסוי. טכניקת המדידה משלבת עקרונות בסיסיים במכניקה, בתנועת גלים ובהשראה אלקטרומגנטית, תוך שימוש חזק באפשרויות שמעמידה לרשותינו המדידה הממוחשבת.

מילות מפתח:

החוק השני של ניוטון, תנועת הפרעות בתווך, מהירות ההפרעה, השראה אלקטרומגנטית, מיתר פרוט, מדידה ממוחשבת.

שמעניק לנו הציוד הממוחשב, ומצא כי ההתאמה בין תאוריה לניסוי יוצאת מן הכלל. בהמשך נציג את טכניקת המדידה. נציין כי כאן יוצג רק חלק מן העבודה, הקשור באופן ישיר למיתר הפרוט. הצוות עסק גם בתנודות שנובעות מעירור על ידי הקשה בפטיש.

עבודת הצוות מהווה המשך לעבודות שנעשו על ידי צוותי תלמידים בתשנ"ג, כאשר כל הקבוצות עסקו בחקר תנודות למיניהן. אריאל אלבו עסק בתנודות מיתר (ראה "תהודה - מדידת עקומות היענות" עמ' 2 בגליון זה). בתשנ"ד היו צוותים שעברו למדידות בכלי נגינה של ממש. אשוח-מירום-קלמכטר בחרו לחקור את המתרחש במיתר שנלקח מתוך כלי נגינה, כאשר הוא מעורר בשיטות מסורתיות לעירור כלי מיתר.

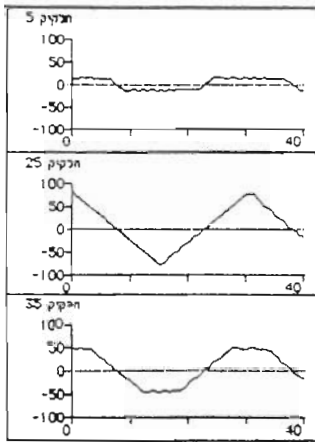
פתרון ממוחשב

נציג כאן פיתרון ממוחשב תוך שימוש במודל "גלים" של "תוכנת חקר" (Explorer). במקום לפתור משוואה דיפרנציאלית המייצגת חומר רציף, נשתמש במודל שבו יש חלקיקים בדידים (עד 50) המחוברים ביניהם באמצעות קפיצים. המודל פותר בכל צעד 50 משוואות תנועה עבור 50 החלקיקים. המשוואות מצומדות מפני שהכוח הפועל על כל חלקיק תלוי במקום שכניו. תוך כדי פתרון מוצגים על צג המחשב ייצוגים שונים של התפתחות המערכת. אנו נתעניין בשני ייצוגים: תמונת מצב של צורת המיתר ברגעים שונים וגרף מקום-זמן של חלקיקים מסויימים. רצוי להתבונן בתמונה הדינמית, אך כאן אנו נסתפק בתמונות בודדות.

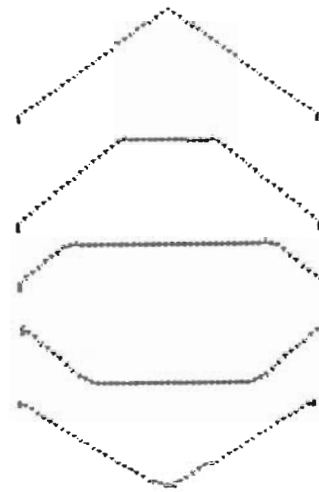
שלוש הדרכים המקובלות לעירור כלי מיתר הן פריטה, הקשה בפטיש ומשיכת קשת. הדרך הפשוטה ביותר לניתוח תאורטי היא הפריטה, מפני שמרגע שאנו משחררים את המיתר הפרוט, אין שום כוח מאלץ על המיתר והוא מתנדד חופשית (בתנועה מרוסנת, ליתר דיוק). למיתר הפרוט (plucked string) יש פתרון מתמטי אנליטי, אך אין מקובל להציגו בבית הספר מפני שלכאורה הוא מצריך אמצעים מתמטיים מעבר ליכולת התלמיד. בבית הספר מוצגים רק הגלים העומדים, שצורתם צורת סינוס (מבלי שהתלמיד יודע כיצד אפשר להביא מיתר למצב התחלתי כזה), אך אין עוסקים בתנודות הנוצרות על ידי צורת העירור הפשוטה ביותר.

בהמשך נראה כי פתרון ממוחשב עשוי להסיר את העכבות שיש לנו בעניין המיתר הפרוט. מתברר כי הפתרון הוא פשוט למדי, והוא מדגים בפשטותו עקרונות פיסיקליים בסיסיים.

שאלה מעניינת היא באיזו מידה הפיתרון המתמטי הפשוט והנקי מתגשם גם במציאות. האם המציאות אידאלית, או שגורמים משניים משתלטים על התופעה? מתבקשת מדידה של תנועת המיתר. אנו מעוניינים לעקוב אחרי תנועתה של נקודה אחת על גבי המיתר במהלך הזמן. מדובר כאן בתנועה שבה יש מאות תנודות בשנייה. כיצד אפשר לעקוב אחרי תנועה כזאת? זו היתה משימתם של שלושה מתלמידי בית הספר למדעים ולאמנויות בירושלים בתשנ"ד - חזי אשוח, רן מירום ואייל קלמכטר. הצוות מדד את התנועה בטכניקה מתוחכמת תוך שימוש באפשרויות החזקות



תרשים 2: גרפי מקום-זמן של שלוש נקודות על המיתר בעקבות פריטה באמצעותו.



תרשים 1: המיתר ברגעים שונים במהלך תנועתו בעקבות פריטה באמצעותו.

האתגר הניסויי

הן תרשים 1 והן תרשים 2 מציגים גרפים המורכבים מקווים ישירים בלבד. האם זהו תאור מתמטי אידיאלי בלבד או שגם המציאות היא כך? זהו האתגר הניסויי. כיצד אפשר לעקוב אחרי מיתר המתנדנד מאות פעמים בשנייה? הניסיון לקבל תמונות מיתר כמו בתרשים 1 באמצעות הארה סטרובוסקופית אינו עולה יפה מפני שההפרעה דועכת. נותר לנסות ולקבל גרפי מקום-זמן מן הטיפוס המתואר בתרשים 2 על סמך המחזוריים הראשונים של התנודה, לפני שהריסון משנה משמעותית את צורת הפונקציה.

כדי לערוך מדידה כזאת עלינו למצוא טכניקה להמרה של מידת הסטייה של נקודה על המיתר במתח. קצב הדגימה צריך להיות של אלפי פעמים בשנייה כדי לקבל תמונה מלאה של המתרחש במחזור הנמשך כ-1/200 של שנייה. (תדירותו של מיתר הפסנתר שעליו נעשתה המדידה). יש צורך בהפעלת הדק (trigger) כדי למדוד את חלק השנייה המדוייק שאנו מעוניינים לבחון. דרישות טכניות אלו מחייבות שימוש במדידה ממוחשבת. מכל מקום, עיקר הבעיה הוא מציאת הדרך להמרת הסטייה הרחבת של נקודה מסויימת על המיתר במתח בצורה מהימנה.

עקרון המדידה

עקרון המדידה מבוסס על יצירת כא"מ מושרה במיתר (המוליך). לשם כך מניחים מגנט קטן וחזק מתחת לנקודה שאחריה עוקבים. (תרשים 3). כאשר המיתר מתנדנד נוצר בו כא"מ מושרה מתכונתי למהירות חלק המיתר הנמצא מעל למגנט. מדידה ממוחשבת של המתח בין קצות המיתר נותנת בידינו את המהירות כפונקציה של הזמן. את מידת הסטייה

תרשים 1 מציג תמונות מתוך התפתחות ההפרעה במיתר. התמונה העליונה מציגה את רגע הפתיחה שבו אנו משחררים את הנקודה האמצעית. מתברר כי לאחר מכן המיתר מקבל צורת טרפז שצלעו העליונה הולכת וגדלה. בהמשך, ההפרעה עוברת לצידו השני של המיתר וחוזר חלילה. תחילה יוצא לדרך רק החלקיק האמצעי. במהלך הזמן מצטרפים אליו חלקיקים נוספים שמיישרים איתו קו, בעוד יתר החלקיקים ממתינים לרגע שבו ההפרעה תגיע אליהם.

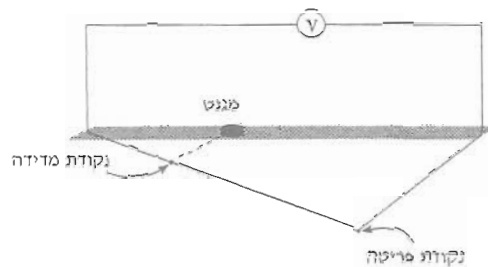
מהתנהגות זו עולה עקרון פשוט: **התפשטות ההפרעה לאורך המיתר מצריכה זמן. ההפרעה אינה מתפשטת כהרף עיין. יש להפרעה מהירות סופית.** זהו אחד הרווחים הגדולים מהתבוננות במיתר הפרוט. אי אפשר לראות את העקרון הזה מהתבוננות בגלים עומדים.

תנועת המיתר מחושבת לפי משוואות תנועה (החוק השני של ניוטון) עבור החלקיקים השונים, תוך הנחה שפועל ביניהם כוח אלסטי לינארי. מתברר כי די בהנחות אלה כדי לקבל את העקרון שהתפשטות ההפרעה מצריכה זמן. הדבר נובע מן העקרונות הראשוניים ביותר.

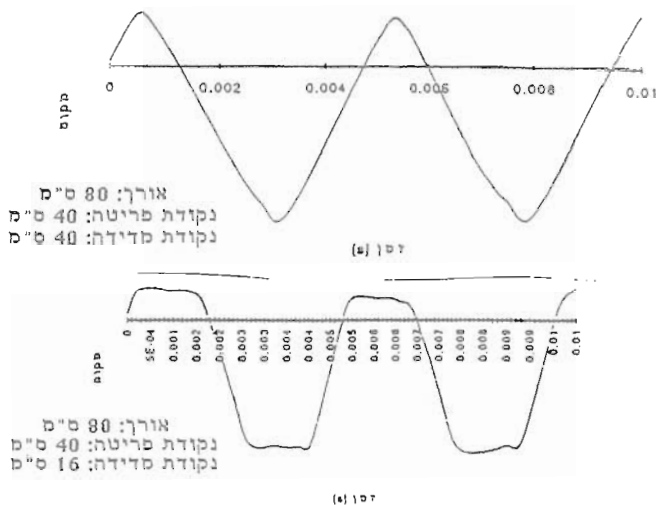
בתרשים 2 מתוארת הסטייה (הרוחבית) של שלוש נקודות על המיתר כפונקציה של הזמן. הגרף האמצעי מתאר את הנקודה האמצעית. נקודה זו מתנדדת הלוך ושוב. מהירות התנועה בכל כיוון קבועה, והחלפת הכיוון מתרחשת "כהרף עיין". הגרף העליון מתאר נקודה סמוכה לקצה המיתר.

נקודה זו נמצאת במנוחה רוב הזמן. הגרף התחתון מתאר את תנועתה של נקודה הנמצאת בין אמצע המיתר לבין קצהו. חלק מן הזמן הנקודה נחה. בין תקופות המנוחה התנועה היא במהירות קבועה.

אפשר לקבל מאינטגרציה של הפונקצייה מהירות-זמן. אנו מנסים למדוד תופעה מכנית-גלית על ידי שימוש בהשראה אלקטרומגנטית. אם המדידה תעלה יפה היא תחזק את בטחונו בהסבר המכני של ההתנהגות הגלית.



תרשים 3: תיאור סכמטי של שיטת המדידה.



תרשים 4: מקום כנגד זמן בנקודת האמצע (למעלה) ובנקודה אחרת (למטה) עבור פריטה באמצע המיתר (אשוח-מירום-קלמכטר).

מערך הניסוי

מיתר הפסנתר נמתח על גבי סוננומטר. הפריטה נעשתה על ידי קשירת חוט לנקודת הפריטה, משיכה באמצעות דינמומטר (לקציבת הכוח) ושיחורור. עם יציאת המיתר לדרך נוצר כא"מ שמפעיל את ההדק ומתחיל את המדידה. התוצאות נדגמות בקצב של 100000 מדידות בשנייה אל ממשק ה-MBL של סביבת העבודה "תוכנת חקר", ונאגרות בחוצץ (buffer). הדגימה נמשכת חלקיק שנייה ועם סיומה התוצאות מועברות למחשב, והמהירות יחד עם הסטייה הרוחבית (המתקבלת מאינטגרציה של המהירות) מוצגות מיידית על צג המחשב.

תוצאות המדידה

בתרשים 4 מוצגות דוגמאות של תוצאות המדידה עבור פריטה בנקודת האמצע של המיתר. הגרף העליון מתאר את תנועתה של נקודת האמצע. הגרף התחתון מתאר את התנועה של נקודה שנמצאת בין האמצע לקצה. התוצאות נמצאות בהתאמה מלאה עם אלה שהתקבלו מחישוב עיוני, כפי שהוצגו בתרשים 2. הצוות חזר על המדידות עבור קבוצה גדולה של נקודות עירור ונקודות מדידה, ובכל מקרה היתה התאמה מלאה עם התאוריה.

חלק מן הניסויים נעשו כאשר שני מחשבים פעלו במקביל. המחשב האחד היה מחשב התאוריה; המחשב השני היה מחשב הניסוי. הגרפים על צג מחשב התאוריה התקבלו מחישוב תאורטי במסגרת מודל "גלים" של "תוכנת חקר". הגרפים על צג מחשב הניסוי התקבלו מממשק ה-MBL של "תוכנת חקר". על צג מחשב התאוריה היה חלון ובו הדמייה של תנועת המיתר. זוהי דוגמה של פעילות עכשווית בפיסיקה - תאוריה וניסוי בסיוע המחשב. המחשב אינו

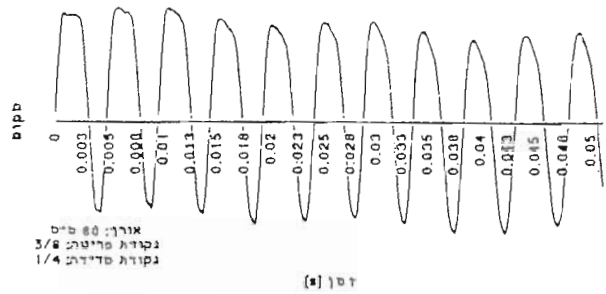
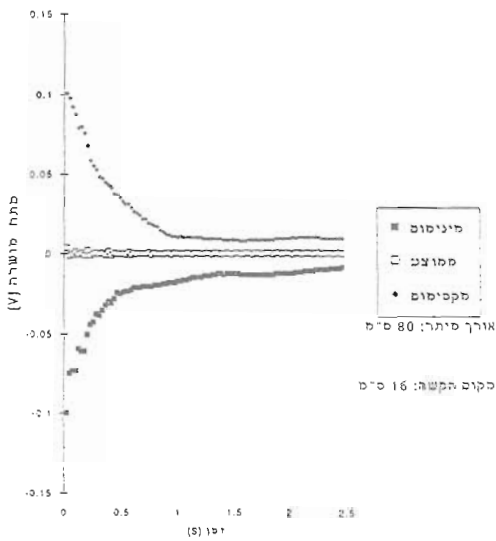
מחליף את התאוריה או את הניסוי. המחשב הוא אמצעי נוסף בשרות התאוריה והניסוי.

בניסוי זה גייסנו את ההשראה האלקטרומגנטית כדי לקבל אישוש ניסויי לתאוריה מכנית (הנובעת מן החוק השני של ניוטון) שמסבירה את התנהגות המיתר. נעזרנו באמצעים מחשביים שונים: הדק, חוצץ, קצב דגימה מהיר, ממשק MBL, הצגה גרפית, אינטגרציה נומרית ועוד. די בכך שאחד מכל הרכיבים האלה יכזיב כדי שלא תתקבלנה התוצאות המבוקשות. ההתאמה המלאה בין תאוריה לניסוי יש בה חיזוק רב. כנראה התאוריה הניוטונית של המיתר היא תאוריה טובה. אי אפשר שהניסוי יצליח אם תורת ההשראה האלקטרומגנטית של פרדיי אינה קשורה למציאות. לא היתה מתקבלת התאמה מלאה אם אחד האלמנטים המחשביים בסביבת העבודה "תוכנת חקר" לא היה פועל כהלכה. הצלחתו של הניסוי מעידה על כך שעקרונות הפיסיקה יש בהם ממש, וכי הציוד שבידינו אמין ומאפשר ללמוד ולחקור.

השפעת הריסון

ראינו כי לגרף מקום-זמן יש צורה של קוו שבור עם מעברים חדים משיפוע לשיפוע (ממנוחה למהירות קבועה וחוזר חלילה). זה בהנחה של תנועה חופשית. כיצד משפיע הריסון? השפעתו עשויה להתבטא בשתי דרכים: האחת - "ריכוך" הקוו השבור לקוו עקום; השנייה - ירידה באמפליטודת התנועה. שני ההבטים נחקרו על ידי הצוות.

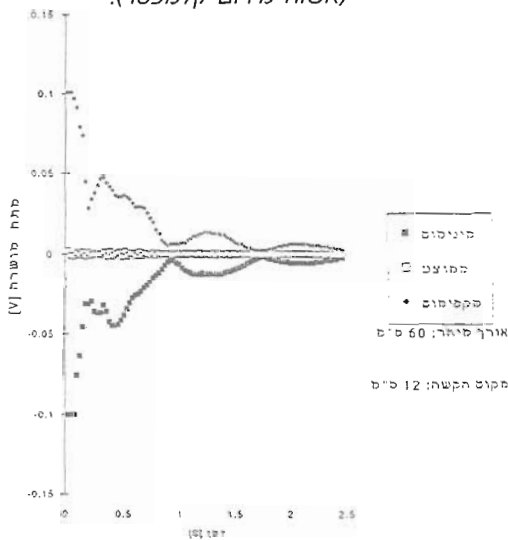
תרשים 5 מתאר גרף מקום-זמן לאורך 0.06 שניות (לעומת 0.01 שניות בתרשים 4). אפשר לראות כי כבר בפרק זמן זה מתחיל להופיע "ריכוך" של הגרף.



תרשים 6: דעיכת האמפליטודה במהלך הזמן (אשוח-מירום-קלמכטר).

כדי למדוד את השתנות האמפליטודה במהלך הזמן נעשה שימוש באופציה הסטטיסטית של "תוכנת חקר". ניתנה למערכת הוראה למדוד לאורך 2.5 שניות (25000 מדידות), אך לחלק את פרק הזמן ל-96 חלקים שבכל אחד מהם מחושבים המכסימום, המינימום והממוצע, ולדגום רק את אלה לגרף. התחזית היתה כי הגרפים יהיו מעריכיים, אך המדידות הראו כי המבנה מורכב מעט יותר מזה (תרשים 6). כדי להבין את ההתנהגות המורכבת חקר הצוות את הדעיכה עבור אורכי מיתר שונים ומצא כי יש מקרים שבהם מבנה נוסף מופיע בבירור (תרשים 7). מתברר כי יש פרקי זמן שבהם האמפליטודה גדלה בשל הצימוד בין המיתר לבין מערכת הסונומטר שאליה הוא צמוד. בתרשים 7 מתקבל צימוד חזק בשל התאמה בין התדירות העצמית של המיתר לבין תדירות עצמית של יתר חלקי הסונומטר.

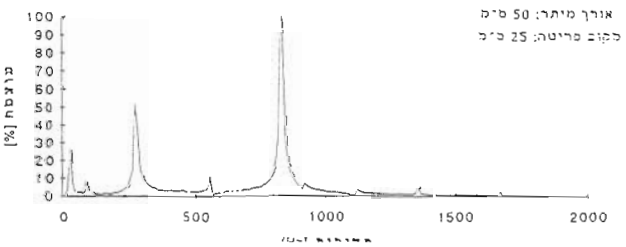
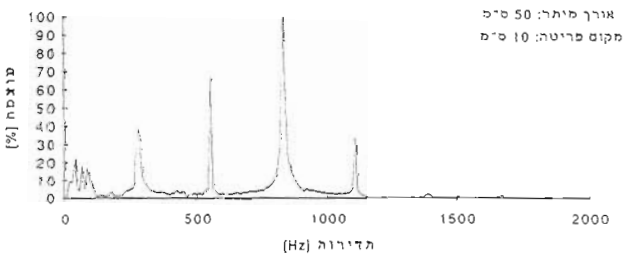
תרשים 6: דעיכת האמפליטודה במהלך הזמן (אשוח-מירום-קלמכטר).



תרשים 7: דעיכת האמפליטודה במהלך הזמן במקרה שבו יש צימוד בין המיתר לבין הסונומטר (אשוח-מירום-קלמכטר).

מדידות עם מיקרופון

מכשיר המדידה הטבעי למדידת הפלט ממיתר הוא המיקרופון. עם חישן כזה ביצע הצוות את המדידות הראשונות, לפני שהשתמש בטכניקה של כא"מ מושרה. גם כאן נלקחו דגימות בקצב של 10000 לשנייה. כדוגמה לטיפול ניתן אחר נציג כאן את הגרפים שהתקבלו מטנספורם פורייה של האות. בתרשים 8 מוצגות התוצאות עבור שתי מדידות שנעשו על אותו מיתר. הגרף העליון מייצג פריטה בנקודה סמוכה לקצה המיתר, ואנו מבחינים בתדירות בסיסית ובכפולות שלמה. הגרף התחתון מייצג פריטה שנעשתה באמצע המיתר. במקרה זה מדוכאות הכפולות הזוגיות של התדירות הבסיסית. התלמידים הוכיחו ביוזמתם (מתמטית) את המשפט הכללי בעניין זה.



תרשים 8: טרנספורם פוריה של מדידות באמצעות מיקרופון (אשוח-מירום-קלמכטר).