ברכיסטוכרון פרימיטיבי

חזי יצחק, בית ספר תיכון לחינוך סביבתי, מדרשת שדה בוקר

תקציר: אחת הבעיות המפורסמות בפיזיקה של המאה ה-17 היתה בעיית הברכיסטוכרון. במאמר מתוארת בעיה מכנית פשוטה שניתן לפתור אותה באותה שיטה שבה פתר יוהן ברנולי את בעיית הברכיסטוכרון. הפתרון מתבסס על אנלוגיה בין הבעיה המכנית לבין בעיה אופטית ועושה שימוש בעקרון פרמה.

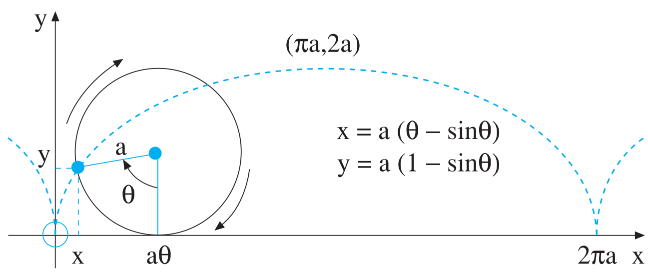
מילות מפתח: ברכיסטוכרון, עקרון פרמה, חוק סנל, ציקלואידה.

מבוא

במהלך לימודי המכניקה בכיתה י״א, אנו מלמדים את אחד החוקים הבסיסיים במכניקה – חוק שימור האנרגיה. כאשר משתמשים בחוק שימור האנרגיה לפתרון בעיות במכניקה אובדת בדרך כלל האינפורמציה לגבי זמן התנועה של גופים לאורך מסלולים שונים. לחישוב זמני התנועה של גופים לאורך מסלולים עקומים נזדקק לרוב לכלים מתימטיים משוכללים יותר. בעיית הברכיסטוכרון (brachistochrone) היא אחת הבעיות המפורסמות ביותר בפיזיקה של סוף המאה ה-17. הבעיה פורסמה לראשונה על ידי יוהן ברנולי ביוני 1696 כאתגר למתימטיקאים, והופיעה בעיתון המדעי החשוב של אותם ימים Acta Eruditorum שלייבניץ היה עורכו. משפחת ברנולי כללה מספר דורות של מתמטיקאים ומדענים מפורסמים. יוהן ברנולי פרסם את הבעיה בעיקר כדי להתגרות באחיו יעקוב ברנולי (Jakob Bernoulli 1654-1705)[2], . למעשה הראשון שניסח את הבעיה היה גלילאו שהציע פתרון, אמנם שגוי, (קשת של מעגל). **הבעיה הייתה למצוא את המסלול המחבר שתי נקודות A ו B הנמצאות במישור אנכי אבל לא על אותו אנך, שעבורו זמן ההחלקה של נקודה חומרית בהשפעת הכובד ובהעדר חכוך יהיה מינימלי.** להבדיל מבעיות מינימום-מקסימום רגילות, בבעיה זו צריך למצוא מינימום של פונקציה מתוך משפחה אינסופית של פונקציות שהן למעשה מסלולים המחברים את שתי הנקודות. וכך כתב יוהן ברנולי:

"…although the straight line AB is indeed the shortest between the points A and B, it nevertheless is not the path traversed in the shortest time. However the curve, whose name I shall give if no one else has discovered it before the end of this year, is one well known to geometers".

בסוף אותה שנה הגיע לידיו רק הפתרון של לייבניץ שביקש ממנו לתת ארכה נוספת לפתרון הבעיה. ברנולי נעתר לבקשתו של לייבניץ ודחה את מועד הגשת הפתרון עד לחג הפסחא. ברנולי התכוון לעקום שנקרא ציקלואידה (ראה תרשים 1).



תרשים 1: ציקלואידה היא העקום הנוצר על ידי המסלול שמבצעת נקודה הנמצאת על היקף גלגל הנע בתנועה של גלגול ללא החלקה. בתרשים מוצגות המשוואות הפרמטריות של הציקלואידה, כאשר a הוא רדיוס הגלגל ו-θ היא הזווית המוגדרת בסרטוט כאשר הגלגל מבצע סיבוב שלם היא משתנה בין 0 ל-2π. הפתרון לבעיית הברכיסטוכרון הוא חלק מציקלואידה הפוכה.

ציקלואידה היא המסלול שמתווה נקודה על חישוק המתגלגל ללא החלקה. הציקלואידה נחקרה על ידי מתמטיקאים והשטח שמתחת לעקום חושב על ידי פרמה, דקרט, וטוריצ׳לי. בשנת 1673 גילה הויגנס תכונה מעניינת של הציקלואידה:

זמן ההחלקה של כדורים על גבי ציקלואידה אינו תלוי בנקודת ההתחלה! הוא ניצל תכונה זו כדי לבנות מטוטלת שזמן המחזור שלה לא יהיה תלוי באמפליטודה. גדולי המתמטיקאים של אותה תקופה פתרו את בעיית הברכיסטוכרון ושלחו לברנולי את הפתרון, ביניהם אחיו יעקוב, לייבניץ, ולופיטל (*l'Hôpital*). ומי לא שלח פתרון? - ניוטון, הגדול מכולם. הדבר הפליא את יוהן ברנולי והוא שלח עותק של הבעיה במיוחד לביתו של ניוטון. האגדה מספרת שניוטון הגיע לביתו עם ערב וקרא את הבעיה. הוא מייד התיישב לפתור אותה והצליח להגיע לפתרון בארבע לפנות בוקר. הוא שלח את הפתרון לברנולי בעילום שם. ברנולי קיבל את הפתרון של ניוטון ומיד זיהה את הפותר ואמר "האריה ניכר על פי עקבותיו". ניוטון צוטט לאחר מכן כאומר שאינו אוהב להיות נושא לצחוק של זרים ובייחוד בעניינים הקשורים למתמטיקה... מכל הפתרונות המיוחד ובעל משמעות עמוקה היה הפתרון של יעקוב ברנולי[3].

הפתרון של ברנולי מתקשר לעבודה של פרמה לגבי המסלול של קרני אור. ידוע שקרן אור, בעוברה בין שני תווכים הומוגניים בעלי מקדמי שבירה שונים, נשברת על פי חוק סנל. פרמה הצליח להוכיח באמצעות נגזרות שחוק סנל האמפירי הוא אקוויולנטי לדרישה שמסלול קרן האור המחבר שתי נקודות יהיה בעל הזמן המינימלי. אחר כך הוא הכליל עיקרון זה גם למשטחים עקומים ובסוף גם לתווכים לא הומוגניים כמו האטמוספירה. הרעיון שלו היה לחלק את התווך לפרוסות דקות, ולהניח שמהירות האור בכל פרוסה כזו היא קבועה. לגבי כל פרוסה כזו ניתן להפעיל את חוק סנל. עתה ניתן לעובי הפרוסה לשאוף לאפס ונקבל את עקרון פרמה הכללי: **בתווך לא הומוגני מסלול קרן האור המחבר בין שתי נקודות יהיה כזה שזמן התנועה שלה יהיה מינימלי יחסית לכל המסלולים האחרים המחברים את שתי הנקודות**. ברנולי הצליח להראות שתהליך דומה שבו התנועה תחולק לקטעים ובכל קטע נשתמש בחוק סנל תגדיר תנאי שממנו ניתן להוכיח שהמסלול המבוקש הוא ציקלואידה. רעיונות פרמה וברנולי התאימו להשקפה כללית על הטבע כפי שניסח מאוחר יותר Maupertuis (1698-1759) בדבר "God's intention to regulate physical phenomena by a general principle of highest perfection"

פתרון זה של ברנולי תרם רבות לפיתוח חשבון הווריאציות וכן לניסוח חדש של המכניקה הקלאסית על ידי אוילר והמילטון.

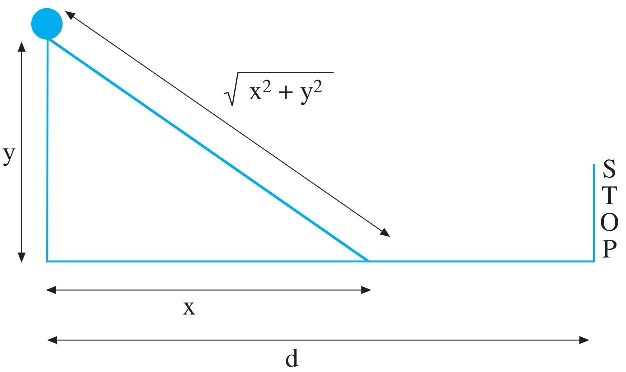
הברכיסטוכרון הפרימיטיבי

לאחרונה, בעקבות דגם שבנה אחד מתלמידי לתחרות שאורגנה על ידי מוזיאון המדע הלאומי בטכניון, נתקלתי[4] בגירסה פשוטה של בעיה זו ואציג לה שני פתרונות. הפתרון הראשון הוא פתרון המבוסס על ידע בחשבון דיפרנציאלי ואילו הפתרון השני מבוסס על אנלוגיה של הבעיה המכנית לבעיה מתחום האופטיקה, שפתרונה מתבצע באמצעות עקרון פרמה. פתרון זה עוקף בצורה מבריקה את השימוש בנגזרות.

תרשים 2: דגם שנבנה על ידי איתי זוהר מבית הספר התיכון לחינוך סביבתי בשדה בוקר. בדגם ארבעה מסלולים שונים שאחד מהם הוא ציקלואידה ואחד הוא קו ישר. הכדורים משוחררים בו זמנית על ידי אלקטרומגנט. כל המסלולים מסתיימים באותה צורת עקומה כדי להדגים את העובדה שמהירותם הסופית של הכדורים שווה (בהנחה שהחיכוך זניח), כך שארבעת הכדורים אמורים לטפס לאותו גובה.
כמו כן נבנה דגם מכני שבאמצעותו ניתן לסרטט ציקלואידות.

תרשים 3: דגם של ציקלואידה שנבנה על ידי האמן Francesco Spighi בשנת 1775. הדגם נמצא במוזיאון בפירנצה וניתן לערוך סיור וירטואלי במוזיאון דרך האינטרנט[5]. באמצעות הדגם ניתן להמחיש שכדור המתגלגל לאורך הציקלואידה משיג את הכדור המתגלגל לאורך המישור המשופע. (צולם על-ידי המחבר)

הבעיה מתוארת בתרשים 4:



תרשים 4: ברכיסטוכרון פרימיטיבי. הבעיה היא למצוא את x כך שהזמן בו יחליק הכדור יהיה מינימלי.

אנו מעוניינים למצוא את ה-x המסוים שעבורו זמן ההחלקה של כדור קטן מגובה y לאורך המסילה הישרה באורך d, יהיה מינימלי. לאורך כל תנועת הכדור נזניח את החיכוך. x יכול להשתנות בין 0 ל-d אך y נותר קבוע. כמו כן נזניח את התנגדות האוויר ונניח שהכדור מחליק ולא מתגלגל, והחיבור בין המסילה הישרה למישור המשופע הוא מעוגל ולא חד.

א. פתרון המבוסס על ידע בנגזרות.

נחלק את תנועת הכדור לשני קטעים. בקטע הראשון הכדור מחליק לאורך המישור המשופע והוא מתחיל ממנוחה. מכיוון שהתנועה נטולת חיכוך, האנרגיה המכנית נשמרת ונוכל לרשום:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \tag{1}$$

כאשר v היא מהירות הכדור בתחתית המישור המשופע. מ-(1) נקבל ביטוי עבור מהירות זו:

$$v = \sqrt{2gy} \tag{2}$$

משום שהתנועה לאורך המישור המשופע היא תנועה שוות תאוצה הרי המהירות הממוצעת בקטע זה היא:

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{2gy}}{2} \tag{3}$$

נגדיר את t_1 כזמן התנועה לאורך המישור המשופע. זמן זה יהיה שוה לאורך המישור המשופע חלקי מהירות הממוצעת:

$$t_1 = \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2gy}} = \sqrt{\frac{2}{gy}}\sqrt{x^2+y^2} \tag{4}$$

בקטע השני הכדור מחליק במהירות קבועה על המסילה הישרה שאורכה $d - x$. נסמן ב-t_2 את זמן התנועה לאורך קטע זה:

$$t_2 = \frac{d-x}{v} = \frac{d-x}{\sqrt{2gy}} \tag{5}$$

ולכן הזמן הכולל t יהיה סכום הזמנים t_1 ו-t_2:

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2}{xy}}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{d-x}{\sqrt{2gy}} \tag{6}$$

אנו מעוניינים למצוא מינימום של (6) שזוהי פונקציה של x, ולכן יש לגזור אותה ולהשוות לאפס או בקיצור הנוהל הרגיל של מציאת נקודת קיצון של פונקציה של משתנה יחיד.

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \sqrt{\frac{2}{gy}} \quad \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2gy}} = 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{x^2+y^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

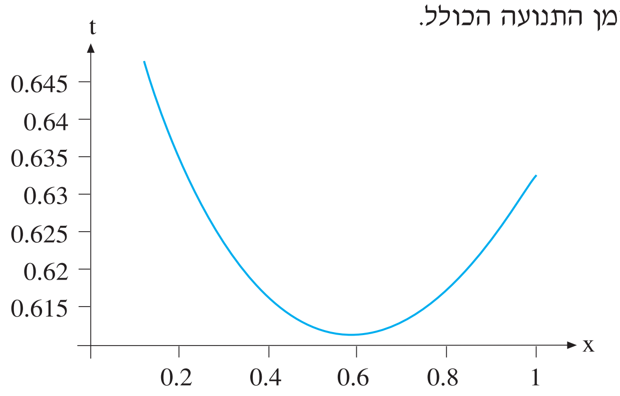
נותר עדיין לבדוק שזוהי אכן נקודת מינימום; ואוותר על הוכחה זו כאן. התוצאה שהתקבלה מעניינת משום שהיא אינה תלויה ב-d כל עוד $x<d$. ולכן פתרון זה נכון עבור:

$$y < d\sqrt{3} \tag{8}$$

עבור ערכים גבוהים יותר של y הפתרון הוא $x=d$. נוכל איפוא לרשום את הפתרון הכללי באופן הבא:

$$x = \min\left(\frac{y}{\sqrt{3}}, d\right) \tag{9}$$

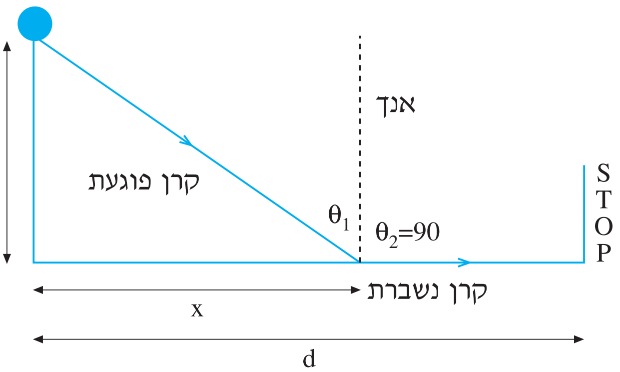
לדוגמה, עבור $d=y=1$ ו-$g=10m/s^2$ סירטטתי באמצעות Mathematica 3.0 את הפונקציה (תרשים 5) המתארת את זמן התנועה הכולל.



תרשים 5: זמן התנועה הכולל עבור y=d=1

ב. פתרון המבוסס על עקרון פרמה.

הרעיון הוא לנצל את ההברקה של ברנולי ובמקום לנתח תנועה של כדור, להסתכל על מהלך קרן אור המשנה את מהירותה בעוברה דרך תווכים בעלי מקדמי שבירה שונים. על פי עקרון פרמה קרן האור נעה במסלול בעל הזמן המינימלי ולכן מציאת המסלול של קרן אור שקולה למעשה לפתרון בעיית הברכיסטוכרון הפרימטיבי. עבור קרן אור אנו יודעים גם כן, שהמעבר בין תווכים בעלי מקדמי שבירה שונים נקבע על פי חוק סנל. אנלוגיה זו תקפה גם בבעיה זו והבעיה האנלוגית מתוארת בתרשים 6:



תרשים 6: ניתן לפתור את בעיית הברכיסטוכרון הפרימטיבי על ידי אנלוגיה אופטית. קרן אור פוגעת במשטח גבול בין שני תווכים בדיוק בזווית הקריטית.

למעשה על פי הגדרת הבעיה, קרן האור פוגעת במשטח הישר בדיוק בזווית הקריטית. על פי חוק סנל נוכל לרשום:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \qquad (10)$$

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \sin\theta_2 = 1$$

כאשר v_1 היא המהירות הממוצעת שחישבנו ב-(3), וזוהי המהירות הקבועה שבה נעה קרן אור בתוך הראשון, ואילו v_2 היא המהירות הקבועה של קרן האור בתווך השני, והיא שווה לביטוי שמצאנו ב-(2). ולכן מ-(10) נקבל:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\bar{v}}{v} = \frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \qquad (11)$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \sqrt{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

וזוהי בדיוק אותה התוצאה ללא שום נגזרות!. הפיתוח המתימטי של השיטה הראשונה "מסתתר" בשימוש בחוק סנל, שאותו ניתן לגזור מעקרון פרמה על ידי פיתוח דומה. את שיטת הפתרון של ברנולי ניתן ליישם עבור בעיה הרבה יותר מסובכת - **ברכיסטוכרון בשני קווים**. בבעיה זו המסלול המבוקש צריך להיות מורכב משני קווים ישרים בעלי שיפוע שונה מאפס. קשה מאד לפתור בעיה זו באופן אנליטי אך ניתן לבצע קירובים נומריים באמצעות התוכנה Matematica 3.0. מאמר מעניין המתייחס לבעיה זו ניתן למצוא בספרות[6]. על ידי הכפלת מספר הקטעים של המסלול ניתן למעשה לקבל פוליגון שיתקרב לציקלואידה שהיא הפתרון המדויק לבעיית הברכיסטוכרון. בכלל כדאי להתעכב עם תלמידים על העובדה שקיים הבדל בין המסלול הקצר ביותר לבין המסלול המהיר ביותר בעולם בו קיימת תאוצה. ומראה עיניים עדיף על הכל. Huntley, שכתב ספר על יחס הזהב ועל יופי במתמטיקה התרשם עמוקות מהפתרון של ברנולי לבעיית הברכיסטוכרון וכתב[7]:

"The linking together of a problem in mechanics with a phenomenon in optics and relating the identical solution of both to a lovely curve - the cycloid, derived from pure geometry – has an artistic appeal that scarcely can be missed."

אני מקווה שנוכל לחוש מעט מהרגשה זו גם מהפתרון של הבעיה הפשוטה .

מראי מקום:

1. Dunham, W., Journey through Genius, Chapter 8, (1990). John Wiley & Sons, Inc.
2. Anton H. (1988). Calculus, pp. 774-776, John Wiley & Sons, Inc.
3. Courant, R. and Robbins, H (1941). What is Mathematics? pp. 379-385, Oxford University Press.
4. http://www.saxonpub.com/tech/enrichment/stumpers/problems/problem16.htm.
5. http://galileo.imss.firenze.it/museo/4/eiv14.html
6. Haws,L. and Kiser, T. (1995)."Exploring the Brachistochrone problem", Amer.Math Monthly, **102**: pp. 328-336.
7. Huntley, H.E. (1970). The divine proportion, p 86, Dover Publications.

פתרון מתמטי לבעיית הברכיסטוכרון המבוסס על ידע מתקדם בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ניתן למצוא ב-:

Boas, M. L. (1996). Mathematical methods in the physical sciences, pp-394-396, John Wiley & Sons, Inc.

אינטגרציה נומרית של זמן התנועה לאורך הציקלואידה באמצעות Mathematica ניתן למצוא ב-:

Wagon, S. (1991). Mathematica in action, Chapter 2, W. H. Freeman & Co.

להלן מובאים אתרים נוספים באינטרנט הקשורים לציקלואידה ולבעיית הברכיסטוכרון. באתרים אלה ניתן למצוא תוכנה שמציירת ציקלואידה וכן טיפול מתמטי מתקדם בבעיית הברכיסטוכרון וכן הפניות לביבליוגרפיה באתרים נוספים:

http://www.treasure-troves.com/mathBrachistochroneProblem.html

http://www.scas.bcit.bc.ca/scas/math/entrtain/coaster/t_brach.htm

http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/3550/cycloid.htm

הערת המערכת: גירסה עברית של הספר Calculus של Anton הופיעה ב-1997 בהוצאת האוניברסיטה הפתוחה, בשני כרכים תחת השם "חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי" א' וב'.

תהודה

הסתכלות על האופטיקה ממבט אחר - עקרון פרמה

עוזי שכטר, גימנסיה אוהל שם, רמת-גן

תקציר: המאמר מראה כיצד אפשר להסיק את חוקי האופטיקה: התקדמות האור בקו ישר, החזרה ושבירה (סנל) מעיקרון כללי אחד, עקרון פרמה. כמו כן מראה המאמר כיצד, בהסתמך על עקרון פרמה, אפשר להסביר את המבנה ועקרון הפעולה של מראה קעורה ועדשה דו-קמורה. מומלץ להביא חומר זה כהעשרה בכיתות יוד הלומדות אופטיקה.

מילות מפתח: עקרון פרמה, חוק ההחזרה, חוק השבירה (סנל), מראה מישורית וקעורה, עדשה דו-קמורה.

הקדמה:

יובא כאן מערך-שעור העשרה באופטיקה שקראתי לו: "הסתכלות על האופטיקה ממבט אחר - עקרון פרמה." לפי המערך הזה העברתי מספר שיעורים לתלמידַי בכיתות יוד המדעית ויוד המחוננים הלומדים אופטיקה לפי התוכנית הרגילה, ואף לתלמידי כיתה ח' מחוננים.

אני ממליץ לשלב גישה זו **לקראת סיום פרק השבירה מהספר "אור וגלים"[1] לפני שמתחילים את הנושא של מהלך קרן אור במנסרה משולשת.**

בהסתכלות שונה זו מגיעים התלמידים לחוקי האופטיקה שלמדנו השנה: התקדמות האור בקו ישר, וחוקי ההחזרה והשבירה, אבל בדרך השונה לחלוטין מהדרך המקובלת בבית הספר. דרך זו, שאיננה שיגרתית, מעוררת אתגר והייתי מעז גם לומר שהינה מרתקת ומלהיבה! זאת ועוד, היבט זה מאפשר להציץ אל הפיזיקה ה"מסתתרת" מאחורי חוקי האופטיקה שנלמדו עד עתה, לגלות שכולם בעצם נגזרים מעקרון-על אחד - עקרון פרמה, ולהבינם יותר לעומק. בנוסף, נצעד שניים-שלושה צעדים קדימה עם התלמידים כשאנו מציגים בפניהם מכשירים אופטיים שעדיין לא למדו עליהם (הכוונה למראה קעורה ועדשה דו-קמורה).

לאור הניסיון שהצטבר במשך השנתיים שלימדתי לפי גישה זו אני ממליץ להעביר שעורים אחדים ברוח זאת בכל הכיתות המדעיות וכיתות המחוננים הלומדות אופטיקה, ואולי גם לנסות להעבירם בכיתות יוד רגילות.

כללי השיעור:

- יש **"לשים בצד"** כל מה שלמדנו עד עתה באופטיקה על חוקי התקדמות האור, ההחזרה והשבירה, ולהתחיל הכל מחדש, להוציא עובדה פיזיקלית יסודית אחת שאותה למדנו ונתבסס עליה:

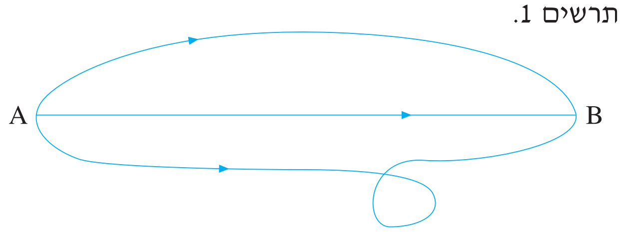
מהירות האור בריק (או באוויר בקירוב) היא קבועה, ומקובל לסמנה באות c; ערכה $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

נראה כיצד אפשר לקבל את חוקי האופטיקה שלמדנו מעיקרון כללי אחד ולא כחוקים נפרדים שלכאורה בלתי תלויים זה בזה.

מערך השעורים כתוב כדיאלוג של שאלות ותשובות:
השאלות - נשאלות על-ידי המורה.
התשובות - ניתנות על-ידי התלמידים (בעזרת הכוונת המורה).
בנוסף יש חלקים הכתובים כמסקנות שאף אותן ניתן לקבל כתשובות מהתלמידים.

מעבר אור בין שתי נקודות נתונות בחלל הריק או באוויר:

נניח שהאור היה חופשי לבחור את מסלול תנועתו מנקודה A לנקודה B; אזי היו לנו אינסוף מסלולים אפשריים - ראה תרשים 1.



תרשים 1: שלושה מסלולים שונים בהם האור יכול היה לנוע מ-A ל-B לו היה חופשי לבחור מסלול כלשהו.

ש: מה המיוחד במסלול הישר שהוא אכן המסלול הפיזיקלי?

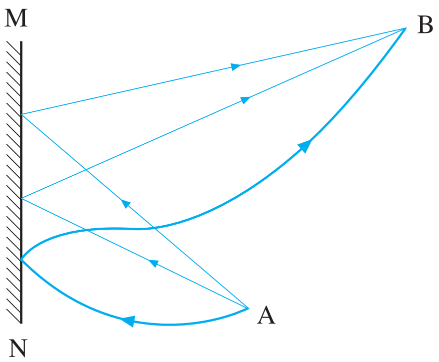
ת: - מרחק מינימלי.
- היחידי שהינו ישר.
- היחיד ששומר על סימטריה גלילית ביחס לציר B-A .
- זמן מינימלי
- לכל שתי נקודות שנבחר הנמצאות על המסלול הישר הזה - מתקיימות כל התכונות הנ"ל.
- המסלול ההפיך שלו מ-B ל-A מקיים גם הוא את כל התכונות הללו .

מעבר אור בין שתי נקודות נתונות תוך כדי החזרה ממראה מישורית:

נדון כעת במקרה שהאור חופשי לבחור את מסלולו מנקודה נתונה A לנקודה כלשהי על צידה המחזיר של המראה MN, ומשם הוא מוחזר וחופשי לבחור את מסלולו עד לנקודה נתונה B - ראה תרשים 2.

ש: איזה מהתכונות שייחדו את המסלול הישר בין A ל-B במקרה הקודם (ללא המראה) יכולות להתקיים במקרה הנוכחי?

ת: רק מרחק מינימלי וזמן מינימלי. אבל מכיוון שמהירות האור באוויר קבועה, ושווה בקירוב לערכה c בריק, (זו העובדה היחידה ש"מותר" להשתמש בה), כל מסלול שמקיים את אחת משתי התכונות הללו יקיים גם את התכונה השנייה!



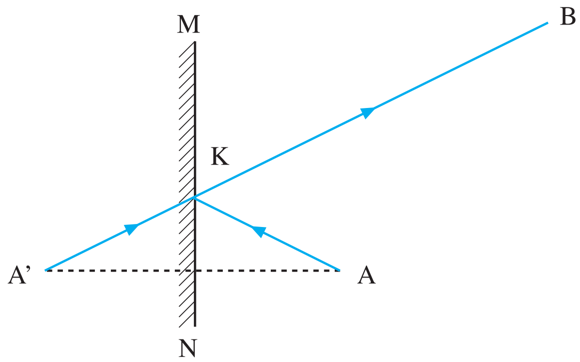
תרשים 2: מספר מסלולים שבהם האור חופשי לבחור את מסלולו מנקודה A לנקודה כלשהי שיבחר לו **על** המראה MN, ומשם הוא מוחזר וחופשי לבחור את מסלולו עד לנקודה B.

ש: מבין המסלולים שבתרשים 2 איזה מסלול מקיים את שתי התכונות הללו?

ת: ברור שהמסלולים העקומים לא באים בחשבון.
הוכחה: המסלול מ-A למראה חייב להיות ישר לפי מה שהוכחנו כבר במקרה הקודם (מעבר בין שתי נקודות באוויר); מאותה הסיבה המסלול מהמראה לנקודה B אף הוא חייב להיות ישר.

ש: אם כך, מבין המסלולים שבקו ישר מ-A למראה וממנה בקו ישר ל-B - מיהו בעל תכונת המרחק/ הזמן המינימלי?

ת: יש לבנות נקודה A' **הסימטרית** ל-A ביחס למראה - (ראה תרשים 3), ולחפש את מסלול המרחק/ הזמן המינימלי בין A' ל-B - שהוא מתקבל על-ידי חיבור A' עם B בקו ישר כאילו ש MN מהווה חלון פתוח. לכן המסלול המבוקש בין A ל- B הוא כמתואר בתרשים 3, שהוא אכן המסלול האמיתי (כפי שלמדנו בפרק הדן בהחזרה ממראה מישורית!)



תרשים 3: המסלול בעל המרחק/ הזמן המינימלי מ-A לנקודה על המראה וחזרה לנקודה B. המרחק של המסלול זהה למרחק שהאור יעבור במסלול הישר בין A' ל-B כאילו ש MN מהווה חלון פתוח.

בשלב זה מומלץ להציג בפני התלמידים ניסוי הדגמה שימחיש זאת: מצמידים ללוח המגנטי במעבדה מראה מישורית ופנס ממערכת האופטיקה[2] (או לחילופין: הדיסקה האופטית, הפנס והמראה המישורית ממערכת האופטיקה הפשוטה של מכון וייצמן). מחשיכים את המעבדה ושמים את הפנס (עם מְפַתח העדשה שמוציא אלומה מקבילה) בנקודה A, ומכוונים את אלומתו המקבילה למראה המישורית כך שרואים את האלומה המוחזרת מהמראה כשהיא עוברת דרך B. כאשר ממשיכים את האלומה המוחזרת מהמראה לאחור (אל מאחורי המראה המישורית) בעזרת טוש או גיר על הלוח, רואים שהיא עוברת דרך הנקודה A' הסימטרית ל-A.

ש: האם המסלול מ-B ל-A בעל המרחק / הזמן המינימלי הוא אותו המסלול מ-A ל-B, רק בכיוון ההפוך?

ת: התשובה כמובן חיובית, כי אם מצאנו מסלול זמן-מינימלי של האור מ-A למראה וחזרה ל-B, הרי שאותו המסלול יהיה בהכרח גם בעל הזמן המינימלי בכיוון ההפוך! - ואכן למדנו בזמנו שתהליך ההחזרה ממראה מקיים את עקרון ההפיכות.

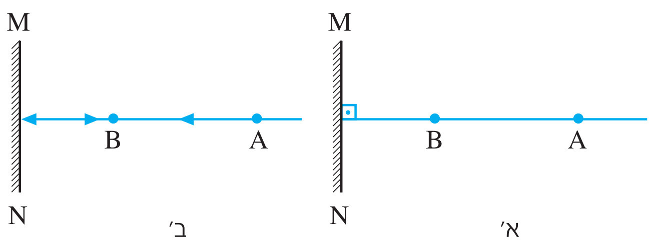
וכאן מתעוררת **שאלה חשובה**: האם תכונה זו של מרחק מינימלי וזמן מינימלי היא עיקרון פיזיקלי כללי להתנהגות האור במערכות אופטיות או שתכונה זו הינה ספציפית לשני המקרים הנ"ל בלבד?

התשובה שהציע המתמטיקאי-פיזיקאי פייר דה פרמה (Pierre de Fermat, 1601-1665) היא:

בכל המערכות האופטיות נע האור במסלול עבורו הזמן הוא מינימלי; זהו עקרון פרמה באופטיקה.

מה שנעשה מכאן ואילך: ננסה בעזרת עקרון פרמה למצוא מהם המסלולים של התקדמות האור במערכות אופטיות שונות; ולאחר שנמצא אותם, נבדוק **באופן ניסויי** האם אכן אלו הם המסלולים האמיתיים, והאם הם תואמים את חוקי האופטיקה שלמדנו עד כה.

נעבור למצב שבו A ו-B נמצאים שניהם על קו הניצב למראה המישורית MN - ראה תרשים 4א'.



תרשים 4: א'. A ו-B על ישר הניצב למראה המישורית MN.
ב'. המסלול היחיד מנקודה A למראה מישורית וחזרה לנקודה B בעל זמן מינימלי.

ש: לפי עקרון פרמה, מהו מסלול הזמן המינימלי? למה?

ת: כמובן, הישר העובר מ-A דרך B למראה וחזרה - כבתרשים 4ב'.

ש: האם יש עוד מסלול נוסף בעל אותו זמן מינימלי?

ת: מובן שכל מסלול אחר יהיה ארוך יותר ולכן בעל זמן גדול יותר, ולכן המסלול הנ"ל הוא היחיד המקיים את עקרון פרמה.

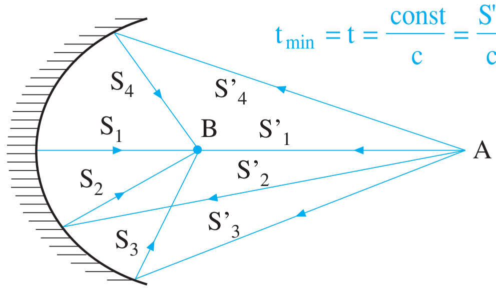
ש: האם ניתן לשנות את צורת המראה כך שכל מסלולי האור היוצאים בקו ישר מ-A למראה ומוחזרים ממנה בקו ישר ל-B יהיו בעלי אותו זמן מינימלי?

ת: כן, **מראה קעורה** שהחתך שלה אליפסה (אשר שני מוקדיה **המתמטיים** הן הנקודות A ו-B) היא בעלת התכונה הנדרשת - ראה תרשים 5. מראה זו מקיימת לכל מסלולי האור הללו:

$$S'_i + S_i = \text{const}$$

ולכן הזמן t בו האור נע בכל אחד מאותם המסלולים הוא:

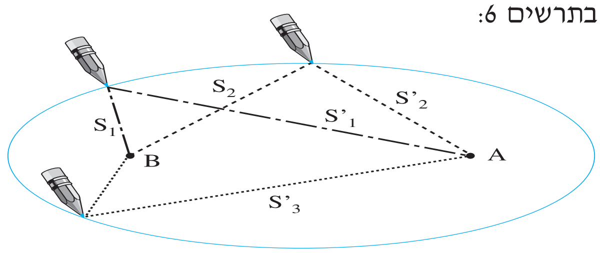
$$t_{min} = t = \frac{\text{const}}{c} = \frac{S'_i}{c} + \frac{S_i}{c}$$



תרשים 5: במראה קעורה שחתכה אליפסה לכל מסלולי האור הישרים מ-A למראה וחזרה ל-B אותו זמן מינימלי; לפיכך, לפי עקרון פרמה, אם נשים ב-A מקור אור נקודתי המראה הקעורה תרכז את הקרניים הפוגעות בה לנקודה B.

האליפסה היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות קבוע.

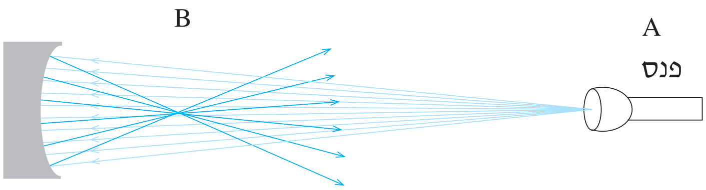
כדי להמחיש לתלמידים את משמעותה של ההגדרה, נסרטט אליפסה. נסמן שתי נקודות A ו-B על הלוח (מוקדי האליפסה), ניקח חוט הארוך יותר מהמרחק בין A ל-B ונדביק (עם סרט דביק) את שני קצותיו ל-A ו-B, ובעזרת טוש או גיר נמתח את החוט לשני קווים ישרים S_i ו-S_i', ועל-ידי הזזת הטוש או הגיר כשהחוט מתוח ניצור את האליפסה כמתואר בתרשים 6:



תרשים 6: סירטוט אליפסה (שמוקדיה A ו-B)

ש: מהי לדעתכם המשמעות הפיזיקלית-פרקטית של מראה קעורה שכזו?
ת: מכיוון שכל מסלולי האור הישרים מ A למראה הקעורה וחזרה בקווים ישרים ל-B הם בעלי אותו הזמן המינימלי, נובע לפי עקרון פרמה שכל מסלולי האור הללו הם מסלולים אפשריים. לפיכך, אם נשים ב-A מקור אור נקודתי, כל קרני האור היוצאות ממנו ופוגעות במראה הקעורה תוחזרנה על-ידי המראה לנקודה B.

במקום זה רצוי לערוך ניסוי הדגמה בפני התלמידים ולראות האם אכן המראה הקעורה מרכזת את הקרניים שיוצאות מנקודה A שעל צירה לנקודה B שעל צירה (כמובן כשמרחק A מהמראה הקעורה גדול מהמרחק הפוקאלי של המראה).
ניסוי ההדגמה: נצמיד ללוח המגנטי שבמעבדה את המראה הקעורה והפנס ממערכת האופטיקה[2]. בפנס נבחר את המִפְתח **ללא העדשה** כך שישמש **מקור אור נקודתי** (או לחילופין: הדיסקה, הפנס והמראה הקעורה מהמערכת האופטית הפשוטה של מכון וייצמן), ראה תרשים 7. לאחר שמחשיכים את המעבדה ושמים את מקור האור על ציר המראה הקעורה כשמִפְתח הקרניים מכוון רק לעברה - רואים את הקרניים המוחזרות מהמראה הקעורה מתרכזות (בקירוב) לנקודה מסוימת על צירה.
באותה הדגמה, אפשר ורצוי להראות לתלמידים שאם המקור המאיר נמצא לא הרחק מהציר של המראה הקעורה, גם אז כל הקרניים המוחזרות מתכנסות **בקירוב** לנקודה מסויימת שליד הציר.

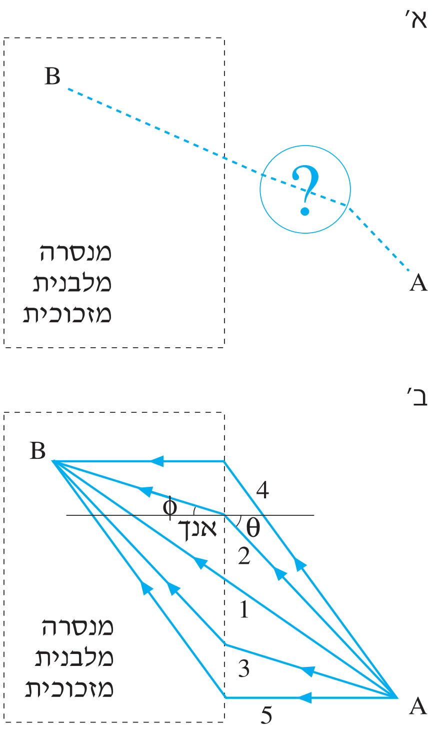


תרשים 7: ניסוי המדגים שהאלומה היוצאת ממקור אור נקודתי A שעל ציר מראה קעורה, מוחזרת ממנה ומתרכזת בנקודה B, הנמצאת אף היא על ציר המראה.

ש: (רצוי שתבוא מהתלמידים) למה התכנסות הקרניים לנקודה B כפי שרואים בניסוי היא רק בקירוב?
ת: חתך המראה הקעורה הנמצאת **במערכת הניסוי שלנו** הוא לא מעגל ולא אליפסה. במראה הקעורה בעלת החתך המעגלי הקרניים מתרכזות **רק בקירוב** לנקודה B, וככל שנקטין את זווית הפתיחה של הקרניים המגיעות אליה ממקור האור הנקודתי שב-A כך תקטן הסטיה מנקודת הריכוז!
נציין שתי סיבות נוספות.
1. חוט הלהט איננו נקודתי.
2. יש החזרות פנימיות מתוך הפנס.

סיכום ביניים:
אנו רואים איפוא שעקרון פרמה אכן מתקיים גם במראה הקעורה. לאמיתו של דבר, עקרון פרמה מתקיים בכל המערכות האופטיות, ולכן מעתה והלאה נראה בו עיקרון יסודי באופטיקה.

מעבר אור מאוויר (או ריק) לתוך חומר שקוף
נעבור כעת למערכת שמכילה בתוכה גוף שקוף - ראה תרשים 8א'.
ש: לפי עקרון פרמה מהו מסלול האור מנקודה A שבאוויר לנקודה B הנמצאת בתוך מנסרה מלבנית שקופה (לדוגמה: מזכוכית/פרספקס)? (תרשים 8)



תרשים 8:
8א' - מהו מסלול האור מנקודה A שבאוויר לנקודה B שבתוך המנסרה המלבנית השקופה?
8ב' - תאור של 5 מסלולים המוצעים על-ידי התלמידים. מסלול 2 הוא בעל הזמן המינימלי, ולפי עקרון פרמה הוא המסלול בו ינוע האור.

ת: תיאורטית יש להתייחס כאן ל- 3 אפשרויות לגבי מהירות האור $v_{\text{שקוף}}$ בתווך השקוף של המנסרה:

א) $v_{\text{שקוף}} = c$ - הפתרון הברור הוא מסלול 1 בתרשים 8ב׳.

ב) $v_{\text{שקוף}} < c$ - הפתרון שמציעים התלמידים הוא מסלול 2 או 4 (בתרשים 8ב׳).

ג) $v_{\text{שקוף}} > c$ - הפתרון שמציעים התלמידים הוא מסלול 3 או 5 (בתרשים 8ב׳).

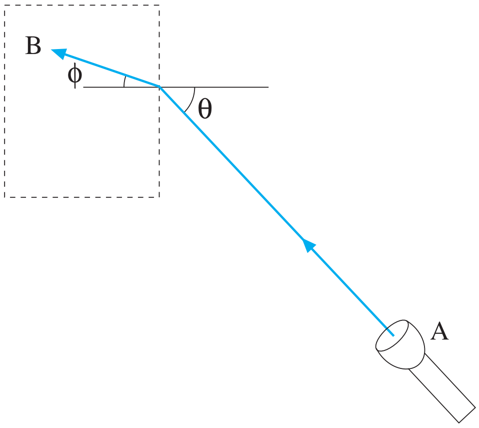
לאחר דיון כיתתי תיאורטי שבו התלמידים הם שמציעים כפתרון את חמשת המסלולים הנ״ל (לשלוש האפשרויות של מהירות האור בזכוכית) ואף מנמקים מדוע, מגיעים בכיתה טובה למסקנה שמסלולים **4** ו-**5** אינם יכולים להיות בעלי הזמן המינימלי ולכן באים בחשבון רק מסלולים **1**, **2**, ו- **3** התואמים לאפשרויות א, ב, ו-ג.

הנימוק מדוע מסלול **2** הוא התואם לאפשרות ב׳ (ובאופן דומה מדוע מסלול **3** תואם לאפשרות ג׳), הוא כדלקמן: תדמיינו שבמקום קרן אור שיוצאת מ-A ומגיעה ל-B שבתוך המנסרה יוצא נער מנקודה A ונע במטרה להציל את אחיו הקטן הנמצא בתוך מימי בריכה (המנסרה ← בריכת מים) בנקודה B. מכיוון שמהירות תנועתו מחוץ לבריכה גדולה ממהירות תנועתו במימי הבריכה כדאי לו לבחור במסלול כזה **שיגדיל** את זמן שהייתו מחוץ לבריכה **ויקטין** את זמן שהייתו בתוך הבריכה. לכן, המסלול המועדף איננו **1** אלא מסלול **2** או **4**.

מסלול **4** הוא המסלול התואם למצב שבו המהירות של הנער במימי הבריכה שואפת לאפס. במקרה זה הכרחי שהמסלול במים יהיה הקצר ביותר האפשרי (שהרי כל תוספת מזערית לאורך המסלול במים יגדיל את זמן השהייה במים בהרבה; אבל מכיוון שמהירות הילד במים איננה אפסית סביר שהמסלול הוא מסוג **2** ולא מסוג **4**.

כדי לדעת איזה משלושת המסלולים שהציעו התלמידים לפי עקרון פרמה תואמים לשלוש האפשרויות התיאורטיות של מהירות האור במנסרה, מציג המורה את ניסוי ההדגמה הבא: על הלוח המגנטי במעבדה מצמידים את המנסרה המלבנית מפרספקס ואת הפנס (ממערכת האופטיקה[2]) עם המִפְתח של העדשה שמוציא אלומה מקבילה המכוונת למנסרה המלבנית - ראה תרשים 9. לאחר שמחשיכים את המעבדה רואים בברור שהמסלול האמיתי הוא מסלול **2**.

(הניסוי תואם כמובן למה שהתלמידים ראו ולמדו כבר על שבירת האור לפי חוק סנל).



תרשים 9: ניסוי המראה את המסלול של אלומת אור מקבילה היוצאת מהפנס (A), במעברה מאוויר למנסרה מלבנית מפרספקס - מסלול שלפי עקרון פרמה תואם למצב שבו: $v_{\text{שקוף}} < c$.

מסקנות הניסוי:

1) מכיוון שהניסוי מראה שמסלול **2** הוא המסלול האמיתי מסיקים $v_{\text{שקוף}} < c$, ומוסיפים שלא רק בחומר הזה מסלול **2** הוא האמיתי אלא עבור כל החומרים השקופים בטבע המסלול הוא מהסוג של מסלול **2**; לא נמצא חומר שמסלול שבירת האור בו יהיה כמו מסלול **3**, כלומר, לא נמצא חומר שבו האור נע במהירות גבוהה יותר מאשר בריק (באוויר). פה ניתן להוסיף שלפי הידוע כיום לפיזיקאים **לא** נמצא שום חלקיק שנע מהר יותר ממהירות האור בריק c; לפי תורת היחסות הפרטית של איינשטיין זוהי המהירות המירבית בטבע.

הערה - במעבר האור מריק לאוויר מבחינים בשבירה זעירה מאוד, דבר שמצדיק את הנחתנו כי:

$$v_{\text{אוויר}} \approx c$$

2) מתוך עקרון פרמה ברור שהמהירויות c ו- $v_{\text{שקוף}}$ יקבעו את אורכי המסלולים באוויר ובחומר שקוף, ואלה קובעים למעשה את הקשר בין זוויות הפגיעה והשבירה. מכאן יוצא איפוא, שהמהירויות c ו- $v_{\text{שקוף}}$ קובעות את הקשר בין זווית הפגיעה וזווית השבירה.

ניתן להוכיח שהמסלול בעל הזמן המינימלי מקיים את הקשר הבא:

$$\frac{\sin(\theta)}{\sin(\phi)} = \frac{c}{v}$$

שזהו בעצם **חוק סנל** כאשר מקדם השבירה n של החומר השקוף מקיים:

$$\frac{\sin(\theta)}{\sin(\phi)} = \frac{c}{v} = n$$

ראה פיינמן[3].

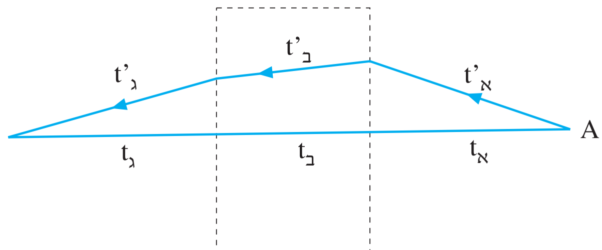
סיכום

כעת אנו מבינים:

- כיצד נגזר חוק סנל ישירות מעקרון פרמה.
- את המשמעות הפיזיקלית של מקדם השבירה n
n מבטא את היחס בין מהירות האור בריק (באוויר) c לבין מהירותו בחומר השקוף $v_{שקוף}$.
- מדוע זוויות הפגיעה והשבירה מקיימות $\theta_{אויר} < \phi_{חומר}$, ומדוע הן משני צדיו של האנך למישור הפגיעה בנקודת הפגיעה, כמתחייב ממסלול **2**.
- מדוע מסלול השבירה **הוא הפיך**: מסלול השבירה מנקודה A באוויר לנקודה B בחומר השקוף הוא אותו המסלול בדיוק מנקודה B בחומר השקוף לנקודה A באוויר. הסיבה לכך נובעת כמובן מעקרון הזמן המינימלי: מסלול הזמן המינימלי מ-B ל-A חייב להיות שווה למסלול הזמן המינימלי מ-A ל-B רק בכיוון ההפוך; לפי עקרון פרמה **עקרון ההפיכות** ברור מאליו! (וזה כמובן תואם למה שלמדנו וראינו כבר בניסוי עם חצי-העיגול מפרספקס[1] בתחילת פרק השבירה.)

מעבר אור דרך מנסרות שקופות המשתנות בהדרגה לעדשה

נעבור למצב שבו הנקודות A ו-B שהן משני צידי המנסרה המלבנית מפרספקס, נמצאות על ישר הניצב לדפנותיה (הארוכים) - ראה תרשים 10.



תרשים 10: A ו-B נמצאות על ישר הניצב לדפנות המנסרה המלבנית מפרספקס. הקו המחבר ביניהן הוא גם המסלול היחיד בעל זמן מינימלי עבור אור ולכן הוא המסלול האמיתי.

ש: מהו מסלול הזמן המינימלי בין A ל-B?

ת: ברור שהקו הישר המחבר ביניהם.

ש: האם קיים עוד מסלול בעל זמן-מינימלי בין A ל-B ?

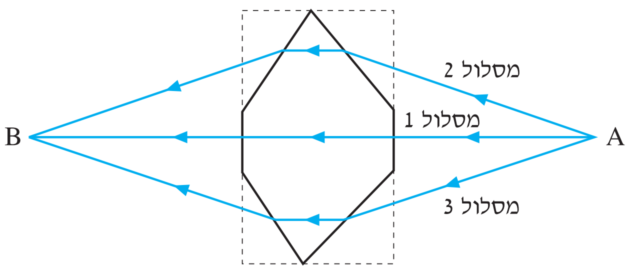
ת: מייד רואים שלא; השוואה בין שני המסלולים נותנת: $t_א < t'_א$, $t_ב < t'_ב$ ו- $t_ג < t'_ג$.

ש: האם ניתן לחתוך את המנסרה כך שיהיה קיים עוד מסלול מ-A ל-B בעל אותו זמן-מינימלי?

ת: כן, חיתוך בדומה למתואר בתרשים 11. במסלול **2** האור מאריך את מסלולו באוויר ביחס למסלול **1**, אך בתוך הפרספקס ששם האור נע במהירות קטנה יותר, דווקא מסלול **2** קצר יותר ממסלול **1** - כך שזמן המעבר של האור בכל אחד משני המסלולים הללו מ-A ל-B שווה לזמן המינימלי.

ש: איזה חיתוך נוסף במנסרה ניתן לעשות לקבלת עוד מסלול בין A ל-B בעל אותו זמן מינימלי שזהה לשני המסלולים הקודמים ?

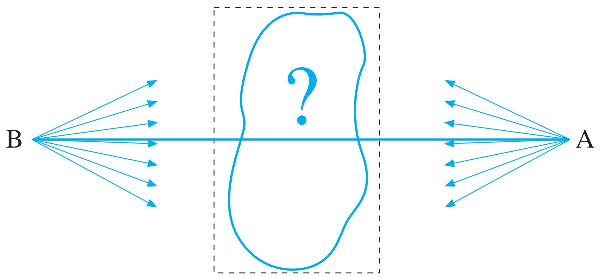
ת: לפי **שיקולי סימטריה** אפשר לחתוך גם את החלק התחתון של המנסרה המלבנית באופן סימטרי לחיתוך בחלק העליון ולקבל את מסלול 3 הסימטרי למסלול 2.



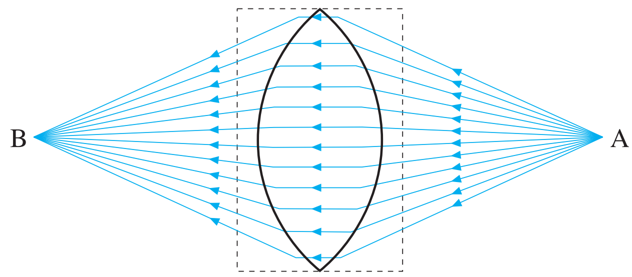
תרשים 11: במסלולים 2 ו- 3 באוויר האור מאריך את מסלולו ביחס למסלול 1, אך בתוך הפרספקס ששם האור נע במהירות קטנה יותר המסלולים 2 ו- 3 קצרים יותר ממסלול 1 - כך שסך הכל זמן התנועה של האור בשלושת המסלולים מ-A ל-B שווה לזמן המינימלי.

ש: האם ניתן לחתוך את המנסרה באופן מתוחכם כך, **שכל אינסוף מסלולי-האור** שיוצאים מ-A ופוגעים באלמנט החִתוך, יעברו דרכו עד לנקודה B - באופן שזמן המעבר של האור מ-A ל-B בכל אחד ואחד מהמסלולים **יהיה שווה בדיוק לאותו הזמן המינימלי** (ראה תרשים 12)?

ת: הרעיון הוא לחתוך את דפנות המנסרה בקשתות מעגליות (ראה תרשים 13). לאמיתו של דבר מספיק לחתוך רק את אחת הדפנות בצורת קשת מעגלית אך לא קל לתלמיד לחשוב על זה.



תרשים 12: האם ניתן לחתוך את המנסרה באופן מתוחכם כך, שכל אינסוף מסלולי-האור שיוצאים מ-A ופוגעים באלמנט החָתוּך, יעברו דרכו עד לנקודה B - באופן שזמן המעבר של האור מ-A ל-B בכל אחד ואחד מהמסלולים יהיה שווה בדיוק לאותו הזמן המינימלי?



תרשים 13: עדשה דו-קמורה בעלת חתך של שתי קשתות מעגליות המאלצת כל קרן שיוצאת מ-A ופוגעת בה להמשיך את מסלולה לנקודה B באופן שזמן המעבר מ-A ל-B יהיה שווה בדיוק לזמן המעבר המינימלי.

ש: האם לאלמנט כזה יש משמעות פיזיקלית פרקטית? או בלשון אחרת - מהו השימוש הפיזיקלי שניתן לעשות באלמנט כזה?

ת: מכיוון שזמן המעבר מ-A ל-B בכל אחד מהמסלולים הללו זהה לזמן המינימלי, נובע מעקרון פרמה שהאלמנט הזה מרכז את כל הקרניים שמגיעות אליו מנקודה A לעבר הנקודה B.

עדשות

פה ניתן לומר לתלמידים שהאלמנט שיצרו (מחשבתית) נקרא - **עדשה דו-קמורה**, והיא אכן מקיימת את התכונה המופלאה הזו - מיקוד האור שמגיע אליה מנקודה שמצידה האחד בנקודה שבצידה השני.

כאן רצוי להדגים לתלמידים את פעולת המיקוד של העדשה הדו-קמורה: בעזרת נורה או נר ומסך - למשל מהציוד לאופטיקה של מכון ויצמן.

מראי מקום:

1. גלר צבי, זינגר דוד וכהן רפי, "אור וגלים", מכון וייצמן, מהדורה מתוקנת, תשמ"ח (1988).
2. Blackboard Optics & Accessories, Klinger Educational Products, KO 4100 M.
3. Feynman, R. P., Leighton, B. and Sands, M. L., The Feynman Lectures on Physics, Vol I, Ch. 26, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading Mass. (1963).
4. סנדריכין, א. האם הטבע תמיד בוחר בזמן הקצר ביותר? (עקרון פרמה), תהודה **17**(3), עמ' 41-47, (1996).

תהודה

אנו משתתפים באבלו של חברנו

דוד סלע

מפמ"ר על הוראת הפיזיקה

במות עליו אימו ז"ל

מערכת "תהודה"
וקבוצת הפיזיקה
במחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע