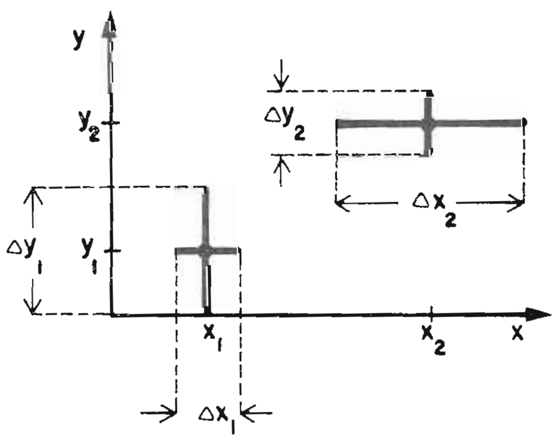
# נייר השרטוט מיישר עקומות

מאת: משה קלרטג
המחלקה להוראה בטכנולוגיה ובמדע, הטכניון, חיפה.

הצגה גרפית של תוצאות מספריות הינה לעיתים קרובות ברורה ובהירה יותר מהצגתן בטבלה: קל יותר לבדוק תחומי עלייה וירידה של התוצאות; נוח יותר להסיק מסקנות מתוך גרף (לפחות מסקנות איכותיות) מאשר מרשימה ארוכה של מספרים. עם זאת, התיאור הגרפי מדויק פחות מטבלת המספרים (נוספת לפחות שגיאה אחת: עובי העפרון), וניתן להציג בו רק פונקציה של משתנה אחד: $y = f(x)$. תיאור גרפי תלת-מימדי הוא עדיין מאוד מסובך, ותיאור גרפי הכולל יותר משלושה משתנים איננו ניתן לביצוע (מלבד היטלים).

טבלת התוצאות של המדידות כוללת קבוצת ערכים של x וקבוצת ערכים של y. לכל ערך של x מתאים ערך אחד של y[1]. בתיאור הגרפי של התוצאות, כל נקודה מתקבלת על-ידי זוג מתאים של ערכים $(x_i, y_i)$. מערכת הצירים הנפוצה ביותר לצורך התיאור הגרפי היא ישרת זוית. את שגיאות המדידה נוהגים לציין באמצעות "צלבים", שבהם הקטע האופקי הוא השגיאה של $\Delta y_i - x_i$ והקטע האנכי הוא השגיאה של $\Delta y_i - y_i$ (ראה תרשים 1).

כיצד יש לחבר נקודות אלה? הבעיה היא, בעצם, לקבוע את הצורה המדויקת של הפונקציה $y = f(x)$. בעיה זו שייכת לתחום הפילוסופיה של המדע. נדחה את הדיון בשאלה זו לנספח (פשטות של השערות וקירובים פולינומיאליים).




*תרשים 1. סימון נקודות מדידה נסיונית בצלבים.*
*אורך זרועות הצלב מסמן את תחום השגיאה.*

לעתים קרובות $\Delta x_i = \Delta x_j$ , $\Delta y_i = \Delta y_j$ לכל i ו- j.

הנייר המילימטרי (או המשובץ) הוא הפשוט ביותר לצורך תיאור גרפי. המרחק בין כל שתי יחידות סמוכות, הן בציר x והן בציר y, הוא קבוע (קנה-מידה לינארי). אם הקשר בין x ל- y מבוטא על-ידי $y = kx + b$ , הגרף המתקבל בנייר כזה הוא קו ישר. כאשר אין תלות לינארית בין המשתנים, מתקבל על הנייר המילימטרי קו עקום.

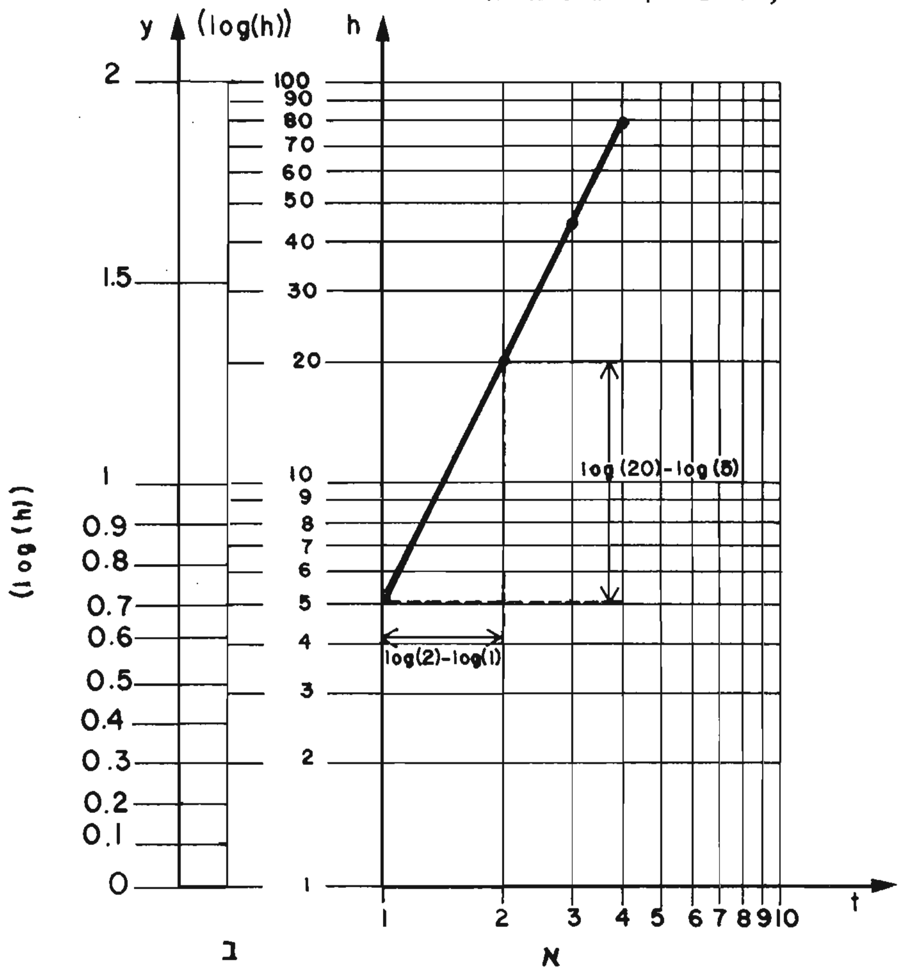
קיימים כמובן ניירות שרטוט בעלי חלוקה שאיננה מילימטרית. שני סוגים נוספים הם הנייר הלוגריתמי-לוגריתמי והנייר החצי-לוגריתמי. קנה-המידה בנייר הלוגריתמי-לוגריתמי הוא, כמובן, לוגריתמי הן בציר x והן בציר y (תרשים 2). המרחק בין שתי יחידות סמוכות איננו קבוע. לפני שנדון ביתר פרטות בנייר זה, נראה דוגמאות לשימוש בו: גוף נופל נפילה חפשית. מרחקו מהראשית - h , כפונקציה של הזמן - t, נתון על-ידי:

$$h = \frac{g}{2} t^2 \qquad (1)$$

נניח, לשם נוחות, כי $g = 10 \frac{\text{מ'}}{\text{שני}^2}$ ונבנה טבלת ערכים עבור משוואה (1).

| t [שני'] | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| h [מ'] | 5 | 20 | 45 | 80 |

התיאור הגרפי המתקבל (תרשים ב-א') הוא קו ישר. אילו היינו מעלים את הנתונים על נייר מילימטרי, היינו מקבלים פרבולה.




תרשים 2. שימוש בנייר לוגריתמי-לוגריתמי. כאשר המשתנה התלוי נתון כחזקה קבועה של המשתנה החופשי מתקבל קו ישר.

נבדוק מדוע קיבלנו קו ישר בנייר הלוגריתמי-לוגריתמי. בגלל המונוטוניות של פונקצית הלוגריתם, נוכל לרשום את משוואה (1) בצורה הבאה (עבור $h > 0$):

$$\log(h) = \log(\frac{g}{2} t^2) \qquad (2)$$

(בסיס הלוגריתם הוא 10).

על-פי תכונות הלוגריתם, נוכל לרשום את משוואה 2 בצורה:

$$\log(h) = 2\log(t) + \log(\frac{g}{2}) \qquad (3)$$

נסמן:

$$\log(h) = y$$

$$\log(t) = x$$

ונקבל:

$$y = 2x + \log(\frac{g}{2}) \qquad (4)$$

$\log(\frac{g}{2})$ הוא גודל קבוע. משוואה (4) מתארת איפוא קו ישר. כדי לקבל ישר(2), בונים מערכת צירים ישרת-זווית של $\log(h)$ כפונקציה של $\log(t)$. ואמנם, זוהי מערכת הצירים בתרשים 2. מתוך הגרף בתרשים 2א' ניתן לקבל את משוואה (3).
המשוואה המתאימה לישר בנייר לוגריתמי-לוגריתמי היא:

$$\log(h) = k\cdot\log(t) + \log(b) \qquad (5)$$

b הוא ערך h בנקודת החיתוך של הישר עם הציר h. במקרה שלנו $b = 5$ (בחרנו $g = 10 \frac{\text{מ'}}{\text{שנ'}^2}$, ולכן $\frac{g}{2} = 5$). k הוא ה"שיפוע" של הישר. במקרה שלנו:

$$k = \frac{\log(20) - \log(5)}{\log(2) - \log(1)} = \frac{\log(4)}{\log(2)} = \frac{2\cdot\log(2)}{\log(2)} = 2$$

נציב את התוצאות במשוואה (5):

$$\log(h) = 2\cdot\log(t) + \log(5) \qquad (6)$$

משוואה 6 שקולה למשוואה 3 (עבור $g = \frac{\text{מ'}}{\text{שנ'}^2}$). ה"שיפוע" k (משוואה 5) הוא מעריך החזקה של t, כאשר רושמים במפורש את h כפונקציה של t. נראה דוגמה נוספת למשמעות ה"שיפוע". מחזור של מטוטלת מתמטית נתון בנוסחה:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

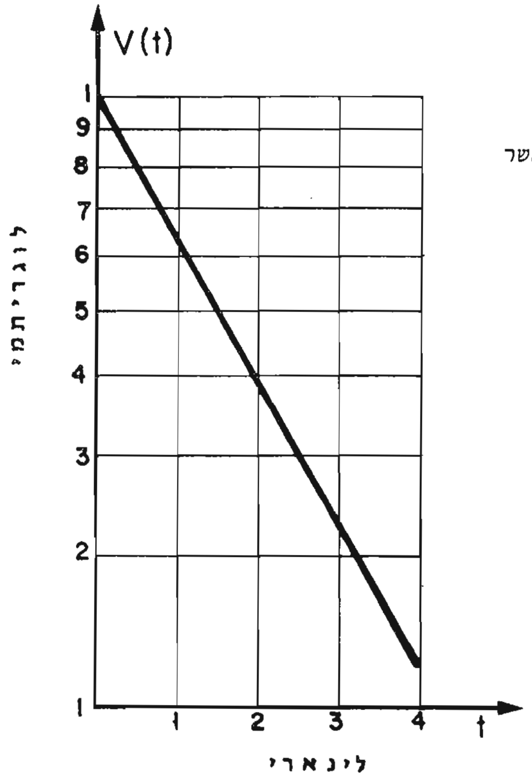
כלומר:

$$\log(T) = \log(2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}) = \frac{1}{2}\log(\ell) + \log(\frac{2\pi}{\sqrt{g}})$$

ה"שיפוע" במקרה זה הוא $\frac{1}{2}$. ואמנם מעריך החזקה של $\ell$ במשוואת מחזור המטוטלת הוא $\frac{1}{2}$.

אם מקבלים ישר בנייר לוגריתמי-לוגריתמי כמתואר במשוואה (5), יהיה הקשר הפונקציונלי בין שני המשתנים - $h = b\cdot t^k$.

בנייר חצי-לוגריתמי אחד הצירים משורטט בקנה-מידה לוגריתמי, והציר השני - בקנה מידה לינארי (תרשים 3).




*תרשים 3. שימוש בנייר חצי לוגריתמי. כאשר התלדת מעריכית מתקבל קו ישר.*

אם הקשר הפונקציונלי הוא מהסוג $y = a^x$ , יתקבל ישר בנייר חצי-לוגריתמי. למשל: המתח על-פני קבל מתפרק נתון על-ידי:

$$V(t) = V_o \ell^{-t/\tau}$$

($V_o$ ו- $\tau$ הם קבועים).

או: $$\ln(V) = \ln(V_o \ell^{-t/\tau}) = -\frac{1}{\tau} t + \ln(V_o)$$

נסמן: $$y = \ln(V)$$

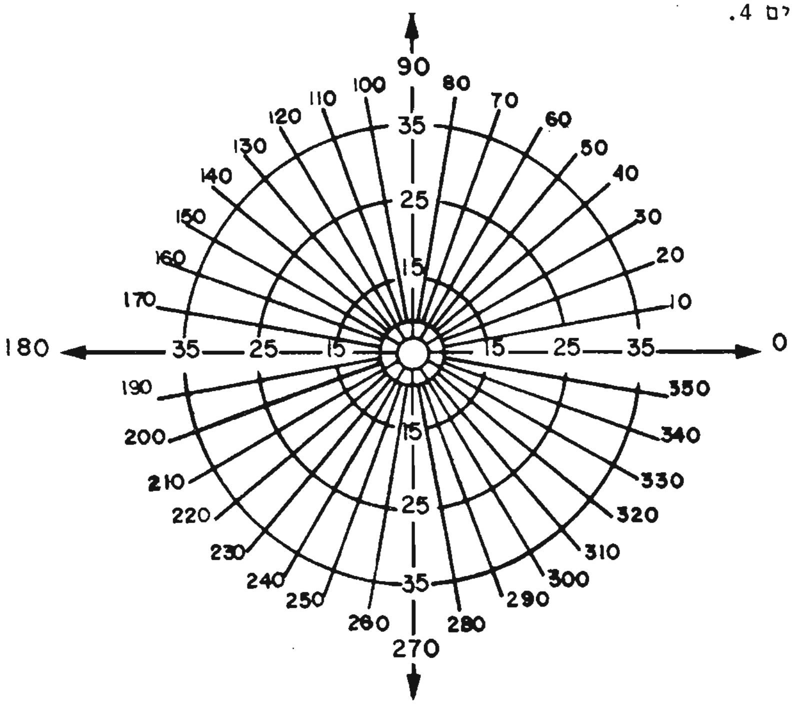
ונקבל: $$y = -\frac{1}{\tau} t + \ln(V_o) \qquad (7)$$

משוואה (7) היא, כמובן, משוואת ישר. לכן, אם מציירים את $V(t)$ על נייר חצי-לוגריתמי, כאשר הציר הלוגריתמי מתאר את המתח והציר הלינארי את הזמן, מקבלים קו ישר אשר שיפועו הוא - $(-\frac{1}{\tau})$ ונקודת החיתוך שלו עם ציר V היא $V_o$.

נוח להשתמש בנייר לוגריתמי כאשר אחד המשתנים - לפחות - משתנה בתחום רחב; למשל: תדר המשתנה מהרץ אחד ועד מיליון הרץ. בציר לוגריתמי אנו זקוקים עבור כל תחום תדרים זה לשש יחידות בלבד, כשגודל יחידה הוא המרחק בין 1 ל-10 (בציר לוגריתמי

המרחק בין 1 ל-10 שווה למרחק בין 10 ל-100). בגרף כזה נוכל למצוא בקלות את ערכו של המשתנה התלוי בתדר, כשהתדר הוא 165Hz, לדוגמה. בקנה-מידה לינארי לא נוכל לדעת זאת, אלא אם כן נשתמש בציר באורך מטרים אחדים.

נייר קוטבי (פולארי) מורכב ממעגלים משותפי-מרכז (קונצנטריים). משתמשים בו בעיקר לתיאור עוצמת שדה כפונקציה של הזווית (קרינה של אנטנה, למשל). נייר זה נוח גם לתיאורים וקטוריים, אך משום-מה לא מרבים להשתמש בו למטרה האחרונה. נייר כזה מתואר בתרשים 4.




*תרשים 4. נייר קוטבי. משמש בדרך-כלל לתאור גרפי של ההתפלגות הזויתית של גודל מסויים.*

נספח: <u>פשטות של השערות וקירובים פולינומיאליים</u>

בסדרת מדידות קיבלנו זוגות של מספרים. מהי הצורה המדויקת של הקשר הפונקציונלי בין שני המשתנים (או: כיצד נחבר את הנקודות בתיאור הגרפי של תוצאות המדידות)? כדי לענות על השאלה, מנסים להעמיד השערה. נניח כי הערכים x הם 3, 2, 1, 0 והערכים המתאימים של y הם 5, 4, 3, 2 בהתאמה[3]. על-פי נתונים אלה בלבד ניתן להציע השערות רבות. למשל:

$$H_1: \quad y = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 5x + 2$$

$$H_2: \quad y = x^5 - 4x^4 - x^3 + 16x^2 - 11x + 2$$

$$H_3: \quad y = x + 2$$

כל אחת מהשערות אלה מתאימה לנתונים: לכל אחד מארבעת ערכי x מתאים בדיוק אותו ערך של y, בהתאמה. כל אחת מהעקומות בתיאור הגרפי כוללת את הנקודות (2; 0), (3; 1), (4; 2), (5; 3). יש להניח כי הקורא יעדיף את $H_3$, משום פשטותה. ההנחה המקובלת על מדענים ופילוסופים רבים - ביניהם: מאך (Mach), פירסון (Pearson), אוונריוס (Avenarius), אוסטוולד (Ostwald) - היא שהמדע חותר לתיאור חסכוני של העולם. מדענים גדולים רבים הביעו את בטחונם בכך שחוקי הטבע הם פשוטים, אך מה הערובות שהדברים אמנם כך הם?[4]

מבחינה גרפית עלינו לבצע אינטרפולציה (ביון). הקירוב הפשוט ביותר הוא, כמובן, חיבור ישר בין כל שתי נקודות שכנות[5]. קירוב ריבועי (קטעי פרבולות) בין שתי נקודות שכנות הוא "עדין יותר". בעזרת האינטרפולציה של לגרנז' ניתן להעביר פולינום אחד ממעלה (n - 1) דרך n נקודות נתונות.

<u>הערות ומראי-מקום</u>

1. אם לערך אחד של x מתאימים ערכים אחדים של y, קיים בדרך-כלל פרמטר נוסף המסייע באיתור נקודות עוקבות בגרף. למשל: בעקומת החשל (היסטרזיס) הפרמטר הוא הזמן. סדר הזמנים יקבע את סדר הנקודות בעקומה זו.

2. מובן כי יכולנו לקבל ישר, גם אילו בנינו מערכת צירים ישרת-זווית של h כפונקציה של $t^2$. אך כאשר לא ידוע הקשר הפונקציונלי, לא תמיד ניתן לדעת מראש כיצד לקבל ישר בתיאור גרפי של נייר מילימטרי.

3. דוגמה זו לקוחה מספרו של המפל:

Hempel, C.G.: *Philosophy of Natural Science*. Prentice-Hall, N.J., 1966.

4. דיון מפורט בבעיה זו נמצא ב- op.cit. פתרונות מעניינים לשאלה זו הוצעו על-ידי

Reichenbach, H.: *Experiences and Prediction*. The University of Chicago Press, 1938.

Popper, K.R.: *The Logic of Scientific Discovery*. Hutchinson, 1959.

5. דיון מפורט בנושא זה ניתן למצוא בכל ספר בסיסי באנליזה נומרית, למשל:

Ralston, A.: *A first Course in Numerical Analysis*. McGraw-Hill, 1965.

בעברית הופיע הספר *צעדים ראשונים במתמטיקה נומרית* מאת גדעון צבס ושלמה ברויאר, בהוצאת דקל (בלי ציון שנה).