

אצבעות נעות מתחת למקל: פעילות מעבדה¹

טאהא מסאלחה*, יובל לניר*, פול גלוק*

לצאת
מהשיגרה



תקציר

המאמר מתייחס להדגמה של מקל ארוך המונח במאוזן על שתי אצבעות של תלמיד. כל אצבע מאצבעות התלמיד מחליקה ונעצרת לסירוגין מתחת למקל. המעבר בין האצבעות המחליקות מתואר במונחים של החיכוך הקינטי והחיכוך הסטטי הרלוונטיים. אנחנו מציגים כאן מודל חישובי המבוצע בגיליון אלקטרוני. המודל מבהיר את התהליך ומתאר באופן גרפי ובשלבם את המעברים בתנועת שתי האצבעות כשאלה מתקרבות אל עבר מרכז המסה של המקל. הדגמה ידועה מאוד מתייחסת למקל אחיד המונח אופקית על שתי אצבעות של אדם כלשהו, כמתואר באיור 1.



איור 1:

אצבעות מחליקות מתחת למקל אופקי

* טאהא מסאלחה, ראש החוג להוראת הפיזיקה, המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל, חיפה. יובל לניר, המחלקה להוראת הטכנולוגיה ומדעים, הטכניון, חיפה; תיכון ע"ש גלילי כ"ס, תיכון ע"ש בגין ראש העין, תיכון עמל ב' פ"ת. פול גלוק, מכללת יחשלים להנדסה.

Reprinted with permission from: Taha Massalha¹, Yuval Lanir and Paul Gluck "[Moving fingers under a stick: a laboratory activity](#)", *PHYSICS EDUCATION* 46 (2), pp. 211-214.

אצבע אחת מחליקה, והשנייה נמצאת במנוחה. תפקידי האצבעות (החלקה ועצירה) מתחלפים מספר פעמים בעת שהאצבעות מתקרבות זו לזו. האצבעות נפגשות תמיד במרכז המקל ללא תלות במיקומן ההתחלתי, ובלבד שהן נעות בתנועה קצובה. הדגמה זו נדונה באופן איכותי [1] וכמותי [2, 3] בספרות.

עיבדנו את ההדגמה לפעילות מעבדה במכניקה המתבססת על הבנת המושגים חיכוך קינטי וחיכוך סטטי ועל הבנת שני התנאים לקיום שיווי משקל: שקול כוחות ושקול המומנטים שכל אחד מהם שווה לאפס. הפעילות כוללת התבוננות של תלמידים בתופעה, שינוי משתנים ובניית מודל של התהליך.

התלמידים מקבלים מקל קל של מטאטא, כמה משקלות שמסתן גדולה ממסת המקל כדי לתלות על המקל, נייר זכוכית וחומר סיכה.

הדרכה לפעילות ניתנת על-ידי סדרה של הצעות או שאלות.

- אילו גדלים כדאי, לדעתכם, למדוד בניסוי? (ניתן לתת מספר רמזים אם התלמידים נתקעים: מדדו את היחס בין מרחקי האצבעות מן המרכז בכל אחת מן ההחלפות. מה אתם מוצאים עבור יחס זה? כמה החלפות מתקיימות מתחילת הזזת האצבעות עד שהן נפגשות?)

- אם תנועת האצבעות היא בתאוצה, מדוע אין האצבעות נפגשות במרכז?

- אם האצבעות נעות מן המרכז החוצה, היכן יעצרו?

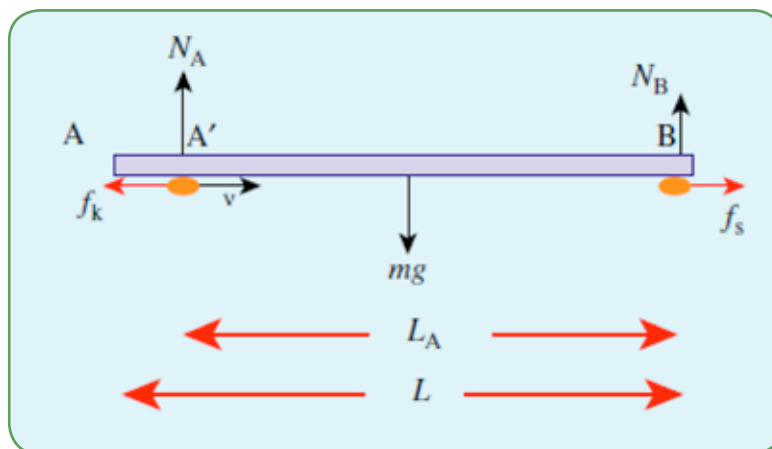
- מה יקרה אם המקל איננו הומוגני לכל אורכו? נסו על ידי תליית משקלות שונים בקצות המקל.

- מהו תפקידו של החיכוך בקביעת המיקום הסופי של האצבעות? נסו להרטיב אחת מאצבעותיכם או לשייף את המקל בנייר זכוכית.

- עכשו תארו באופן תאורטי מה קורה כאשר אצבע אחת מפסיקה לנוע, ואצבע אחרת מתחילה לנוע. חישוביכם צריכים להביא בחשבון את שני התנאים של שיווי משקל ואת התפקיד המשתנה של חיכוך סטטי וחיכוך קינטי על אצבע כלשהי העוברת ממצב מנוחה למצב תנועה. כתבו מודל מתמטי של ההתנהגות בעזרת ערכים מתקבלים על הדעת של מקדמי חיכוך.

רק תלמידים מעטים מסוגלים לפתח את התאוריה בעזרת הרמזים הנ"ל. להלן נציג תיאור אפשרי של התופעה ונשאיר לקוראים להחליט היכן ומתי להוסיף רמזים על מנת לאפשר לכל התלמידים להגיע לפתרון.

איור 2 מציג את האצבע השמאלית (נקרא לה אצבע A) בעת תנועתה במהירות קבועה v מן הקצה A, עד לנקודה A'. במצב זה סכום המומנטים סביב הנקודה B שאינה נעה (המקל אופקי ויציב) שווה לאפס, ומתקיים:



איור 2: תרשים כוחות ואורכים רלוונטיים

$$(1) \quad N_a \cdot L_a = mg \cdot \frac{L}{2} \xrightarrow{\text{yields}} N_a = \frac{L}{2L_a} \cdot mg$$

לפי החוק הראשון של ניוטון, מתקיים גם:

$$(2) \quad N_a + N_b = mg \xrightarrow{\text{yields}} N_b = mg \left(1 - \frac{L}{2L_a}\right)$$

כאשר:

- N_A הוא הכוח הנורמלי שמפעילה האצבע הנעה בנקודה A על המקל בכיוון מעלה.
- N_B הוא הכוח הנורמלי שמפעילה האצבע הנחה בנקודה B על המקל בכיוון מעלה.
- mg הוא כוח הכובד על המקל בכיוון מטה (במרכז המסה).
- L אורך המקל.
- L_A הוא מרחק הנקודה A מהנקודה B המשמשת במקרה זה ראשית.

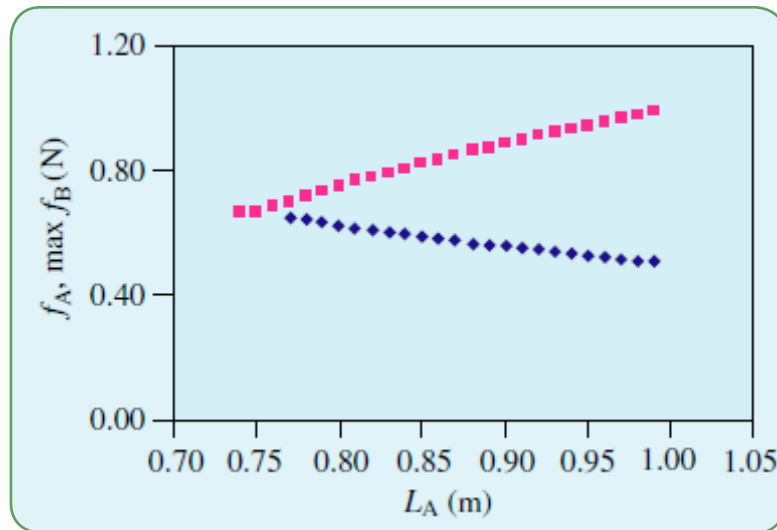
כאשר אצבע B "תקועה" ואצבע A נעה בתנועה קצובה ביחס למקל לכיוון אצבע B, שקול הכוחות על המקל שווה לאפס. מכאן, ובהסתמך על החוק השלישי של ניוטון: כוח החיכוך (הקינטי) שמפעיל המקל על אצבע A שווה לכוח החיכוך הסטטי שמפעיל המקל על אצבע B. כוח זה אינו יכול להיות גדול מכוח החיכוך (הסטטי המרבי - על סף תנועה) שמפעיל המקל על האצבע B. אצבע A תמשיך לנוע כל עוד כוח החיכוך הקינטי המופעל על ידי המקל על A אינו גדול מכוח החיכוך הסטטי המרבי שמפעיל המקל על אצבע B, ויתקיים:

$$(3) \quad f_k(A) \leq f_s(B) \xrightarrow{\text{yields}} \mu_k \cdot N_a \leq \mu_s \cdot N_b$$

ע"י הצבת הערכים של N_A ו- N_B מ- (1) ו- (2), נקבל:

$$(4) \quad \frac{L}{2L_a} \mu_k \leq \left(1 - \frac{L}{2L_a}\right) \mu_s$$

כפי שניתן לראות באיור 1, כאשר אצבע A נעה לכיוון של אצבע B, המרחק L_A קטן בקביעות. עובדה זו באה לידי ביטוי בהגדלת הכוח הנורמאלי שמפעילה אצבע A (צד שמאל של אי-שוויון (4)) ובהקטנה מקבילה של הכוח הנורמאלי המופעל על המקל על ידי אצבע B (בצד הימני של אי-שוויון (4)). פירושו של דבר שכוח החיכוך הקינטי שמפעיל המקל על אצבע A גדל, בעוד כוח החיכוך הסטטי המרבי שמפעיל המקל על אצבע B קטן. תהליך זה מוצג בגרף שבאיור 3.



איור 3: כוח החיכוך על A וכוח החיכוך המרבי על B כתלות ב- L_A

על פי הנוסחאות שפותרו לעיל, L_A מקיים:

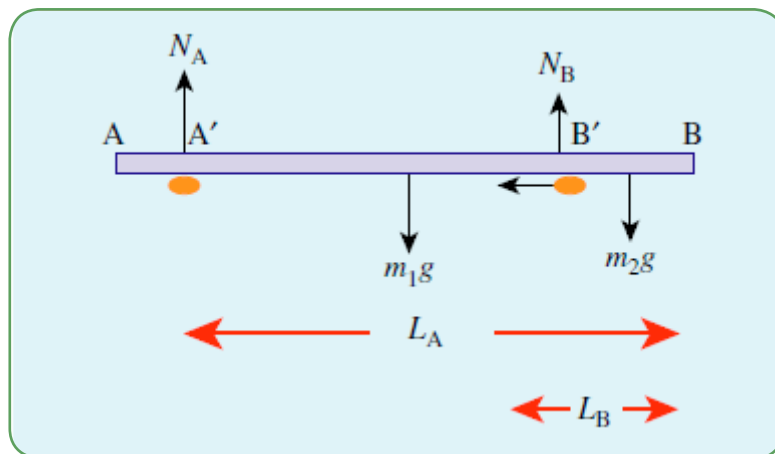
$$(5) \quad L_A \geq (\mu_k + \mu_s)L / 2\mu_s$$

האצבע A תמשיך בתנועתה כל עוד כוח החיכוך (הקינטי) שמפעיל עליה המקל אינו גדול מכוח החיכוך (הסטטי) שמפעיל המקל על האצבע B.

בנקודה שבה אי-השוויון (3) הופך לשוויון מתקיים:

$$(6) \quad \mu_k N_A = \mu_s N_B$$

תנועתה של אצבע A ביחס למקל תיעצר, ואילו אצבע B תחיל את תנועתה לכיוון מרכז המקל.



איור 4: ההחלפה: A עוצרת, B נעה

חישוב המומנטים והכוחות בשלב זה מורכב קצת יותר. נזכור שאת ערכו של L_A מצאנו בשלב הקודם, וכל זמן שאצבע B נעה, ערכו קבוע.

בהתייחס לאיור 4, סכום המומנטים סביב הנקודה B:

$$(7) \quad N_a(L_a - L_b) + mg \frac{L_b^2}{2L} = mg \frac{(L - L_b)^2}{2L}$$

$$(8) \quad N_a(L_a - L_b) = \frac{mg}{2L} (L^2 - 2L \cdot L_b + L_b^2 - L_b^2)$$

$$(9) \quad N_a(L_a - L_b) = \frac{mg}{2} (L - 2L_b)$$

$$(10) \quad N_a = \frac{mg(L - 2L_b)}{2(L_a - L_b)}$$

$$(11) \quad N_B = \frac{mg(2L_a - L)}{2(L_a - L_b)}$$

כאשר אצבע A "עומדת" (L_A ידוע וקבוע), מקבלים ביטוי ל- N_A ו- N_B לכל מיקום של אצבע B (L_B).

מסקנות:

1. כאשר L_B גדל, קטן ערכו של N_A (בכל שלב, המכנה קטן ביחידה אחת, המונה בשתיים), ולכן קטן גם כוח החיכוך הסטטי המרבי שמפעיל המקל על אצבע A.

2. כאשר L_B גדל, גדל ערכו של N_B , ולכן גם כוח החיכוך הקינטי שמפעיל המקל על אצבע B.

הנוסחאות 10 ו-11 מספקות את התיאור של תנועת האצבעות לכל אורך הדרך עד למפגש ביניהן באמצע המקל: הכוח הפועל על האצבע הקבועה במקומה מחושב בעזרת מקדם החיכוך הסטטי μ_S , ואילו הכוח הפועל על האצבע הנעה (כאשר L_A קטן או L_B גדל), מחושב בעזרת מקדם החיכוך הקינטי μ_K .

נקודות המעבר שבהן אצבע אחת נעצרת וחברתה מתחילה לנוע, נמצאות במקום שהכוחות משתווים בו ($f_A = f_B$). בנקודה זו "מתחלפים" מקדמי החיכוך (האצבע שהייתה "סטטית" הופכת ל"קינטי") ומוצאים את נקודת השינוי הבאה. במודל חישובי זה הזנחנו את העובדה שלאצבעות יש תאוצה קטנה ביותר בזמני החלפת התנועה מאצבע אחת לרעותה.

פתרון כמותי

מכיוון שאנו מניחים שמקדמי החיכוך בין האצבעות למקל זהים, האצבע שנעה ראשונה נקבעת לצורך פתרון חישובי באופן שרירותי (שאלות לדיון עם התלמידים: מה קורה במציאות? ולמה?).

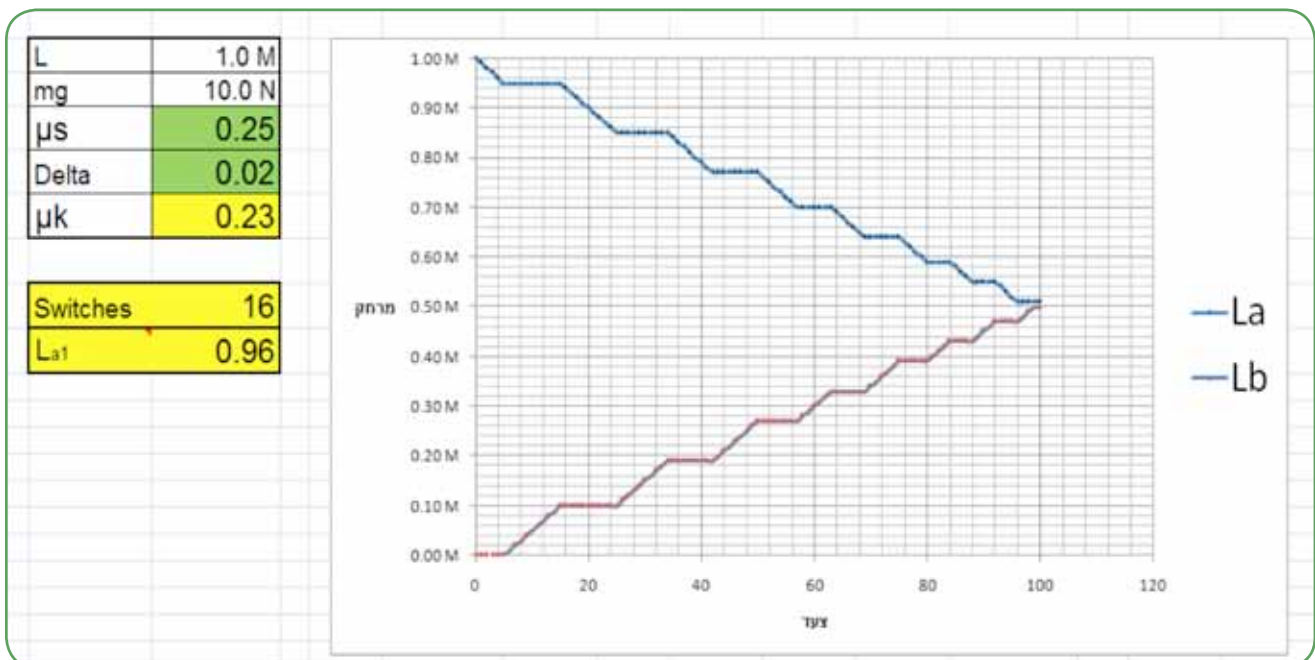
ניתן להטיל על תלמידים הלומדים **מדעי מחשב** משימה לפתח פתרון תכנותי **מבוסס רקורסיה**. ניסיון לפתח פתרון כמותי לבעיה בצורה זו יתרום רבות להבנת שני התחומים החמקמקים (הפיזיקלי והתכנותי).

אפשרות נוספת, פשוטה יותר (יחסית), היא לעשות שימוש ב**גיליון אלקטרוני**. הפתרון (מבוסס אקסל) שיוצג להלן מחשב בעזרת (10) ו-(11) את הכוחות f_A ו- f_B כאשר בכל שלב חישובי המרחק בין האצבעות קטן והולך. בשלב הראשון נעה אצבע A (כאמור, החלטה שרירותית). שלבים עוקבים מתקבלים על ידי שינוי המרחק בין האצבעות בגודל קבוע ("צעדים"). בכל שלב משווים את כוחות החיכוך: אם הכוח הפועל על האצבע שבתנועה קטן מהכוח המרבי שיכול לפעול על האצבע הקבועה במקומה, תמשיך האצבע שבתנועה "לנוע" בשלב הבא.

כאשר הכוח המחושב על האצבע שבתנועה גדול או שווה לכוח המרבי שיכול לפעול על האצבע הקבועה במקומה, מתחלפים הפרמטרים לחישוב. האצבע שהייתה בתנועה הופכת לקבועה במקומה, והכוח יחושב עליה באמצעות מקדם החיכוך הסטטי. המרחק בין האצבעות מתקצר על ידי "הזזת" האצבע שעד עכשיו הייתה קבועה, והכוח הפועל עליה מחושב באמצעות מקדם החיכוך הקינטי.

לדוגמה, לקחנו $L=1m$, $\mu_s=0.25$, $\mu_k=0.23$, $mg=10N$, וגודל צעד השווה ל- $1cm$. בנספח מוצגת טבלה המדגימה את חישובי הכוחות ואת מיקום האצבעות "צעד, צעד".

איור 5 מציג גרף של L_A ו- L_B כתלות במספר הצעדים בסימולציה.



איור 5: תצוגה של L_A ו- L_B כתלות במספר הצעדים. התצוגה מתייחסת למספר החלפות ומראה אצבע אחת במנוחה (קווים אופקיים) בזמן שהשנייה בתנועה (קווים משופעים).

הערות לגרף

1. בכל "שלב" המודל מניח שהמרחק בין האצבעות קטן בסנטימטר אחד.
2. הטבלה שמשמאל לגרף מציגה את הפרמטרים שבהם המודל החישובי עושה שימוש.
3. לשם הנוחות, מקדם החיכוך הקינטי μ_K נקבע באמצעות מקדם החיכוך הסטטי μ_S , והפרש ביניהם Δ .

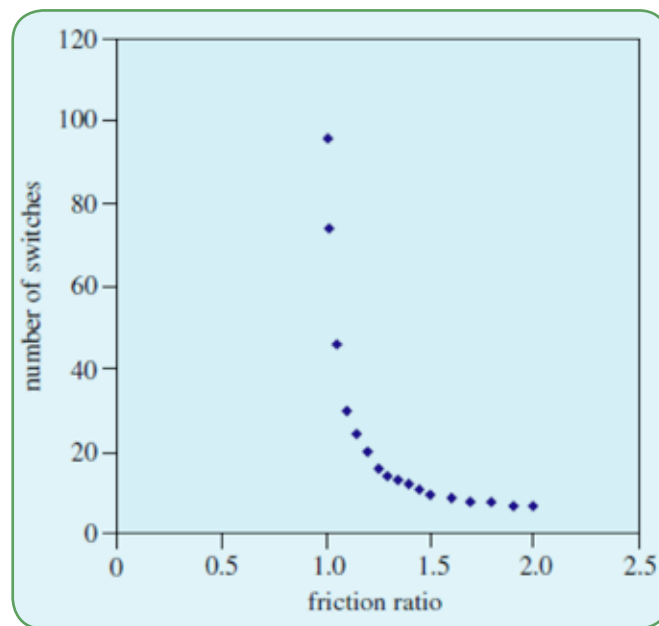
המשך חקירת התופעה

כאשר תוצאת המודלים החישוביים מונחת לפני התלמידים, ניתן להמשיך ולפתח את החשיבה בדיון המתמקד בשאלות כגון אלה:

1. מה הגורם המשפיע על מספר ההחלפות?

(תשובה: היחס μ_K / μ_S בין מקדמי החיכוך).

איור 6 מראה כיצד מספר ההחלפות קטן עם הגדלה של היחס μ_S / μ_K .



איור 6: מספר ההחלפות קטן עם הגדלה של היחס μ_S / μ_K .

2. כיצד משפיע אורך המקל על מספר ההחלפות?

(תשובה: ככל שהמקל ארוך יותר - מספר ההחלפות גדל.)

3. כיצד משפיע משקל המקל על מספר ההחלפות ומיקומו?

(תשובה: משקל המקל אינו משפיע.)

4. איזו השפעה יש לגודל המהירות בתופעה זו?

(תשובה: כל זמן שהמהירות קבועה, גודל המהירות אינו משפיע.)

אנחנו מסיימים מאמר זה בהמלצה: אנחנו ממליצים מאוד לזמן לתלמידינו אפשרויות להכיר תופעה, להחליט אילו פרמטרים כדאי למדוד ולהסביר את התוצאות בעזרת מודל חישובי תאורטי. מניסיונו, פעילות מסוג כזה מעוררת את המודעות והמוטיבציה של התלמידים, מאתגרת ומספקת הרבה יותר מניסוי רגיל שמטרתו לאמת חוק כלשהו.

מקורות

1. Ehrlich, R., (1990). *Turning the world inside out and 174 other simple demonstrations* pp.49-50 (Princeton, New Jersey: Princeton University Press)
2. Iona, M., (1993). *Phys. Teach.* **31** 327
3. Mancuso, R. V., (1993). *Phys. Teach.* **31** 222

נספח

טבלת אקסל המדגימה חישוב "צעד צעד" של שינוי הכוחות ומיקום האצבעות

#	L_a	μ_a	L_b	μ_b	f_a	f_b	moving	Switch
0	1.00 M		0.00 M		0.00	1.000	A	0
1	0.99 M	0.23	0.00 M	0.25	1.162	1.237	A	0
2	0.98 M	0.23	0.00 M	0.25	1.173	1.224	A	0
3	0.97 M	0.23	0.00 M	0.25	1.186	1.211	A	0
4	0.96 M	0.23	0.00 M	0.25	1.198	1.198	A	0
5	0.95 M	0.25	0.00 M	0.23	1.316	1.089	B	1
6	0.95 M	0.25	0.01 M	0.23	1.303	1.101	B	1
7	0.95 M	0.25	0.02 M	0.23	1.290	1.113	B	1
8	0.95 M	0.25	0.03 M	0.23	1.277	1.125	B	1
9	0.95 M	0.25	0.04 M	0.23	1.264	1.137	B	1
10	0.95 M	0.25	0.05 M	0.23	1.250	1.150	B	1
11	0.95 M	0.25	0.06 M	0.23	1.236	1.163	B	1
12	0.95 M	0.25	0.07 M	0.23	1.222	1.176	B	1
13	0.95 M	0.25	0.08 M	0.23	1.207	1.190	B	1
14	0.95 M	0.25	0.09 M	0.23	1.192	1.203	B	1
15	0.95 M	0.23	0.10 M	0.25	1.082	1.324	A	2
16	0.94 M	0.23	0.10 M	0.25	1.095	1.310	A	2

מקרא עמודות

#	מונה שלבים חישוביים, בכל שלב קטן המרחק בין האצבעות A ו-B בסנטימטר אחד.
L_A	המרחק בין אצבע A לקצה הימני של המקל. המרחק הולך וקטן כאשר אצבע A נעה.
μ_A	מקדם החיכוך בין אצבע A למקל. כאשר אצבע A נעה ביחס למקל, משתנה זה מקבל ערך של מקדם חיכוך קינטי (0.23). כאשר האצבע עומדת ביחס למקל, משתנה זה מקבל ערך של מקדם חיכוך סטטי (0.25).
L_B	המרחק בין אצבע B לקצה הימני של המקל. המרחק הולך וגדל כאשר אצבע B נעה.
μ_B	מקדם החיכוך בין אצבע B למקל. כאשר אצבע B נעה ביחס למקל, משתנה זה מקבל ערך של מקדם חיכוך קינטי (0.23). כאשר האצבע עומדת ביחס למקל מקבל משתנה זה ערך של מקדם חיכוך סטטי (0.25).
F_a	כוח החיכוך הפועל בין אצבע A למקל מחושב על ידי מכפלת הכוח הנורמאלי הפועל בנקודה L_A במקדם החיכוך μ_A באותה נקודה (מחושב בעזרת נוסחה 10).
F_b	כוח החיכוך הפועל בין אצבע B למקל מחושב על ידי מכפלת הכוח הנורמאלי הפועל בנקודה L_B במקדם החיכוך μ_B באותה נקודה (מחושב בעזרת נוסחה 11).
Moving	האצבע שעליה פועל הכוח הקטן יותר - נעה. במקרה של שוויון, מתבצע חילוף.
Switch	מונה מספר החלפות.

הערות

1. הערכים בשלב 0 נקבעו שרירותית כדי לגרום לאצבע A "לנוע" ראשונה.
2. חילוף :
בשלים #0 - #3 אצבע A נמצאת בתנועה, ואילו האצבע B קבועה במקומה. הכוח f_A מחושב בעזרת מקדם חיכוך קינטי (0.23), ואילו הכוח f_B מחושב בעזרת מקדם חיכוך סטטי (0.25).
בשלב #4 הכוח f_A משתווה לכוח f_B (1.198 N), ולכן המודל "מחליט" כי אצבע A תישאר קבועה במקומה ואצבע B תנוע.
בשלב #5 הכוח f_A מחושב בעזרת מקדם חיכוך סטטי (0.25), והכוח f_B מחושב בעזרת מקדם החיכוך הקינטי.
3. המודל "סופר" את מספר החלפות (Switch).



ברכות לד"ר אליה מזין
על הגיעו לשלב הגמר
בתחרות המורה של המדינה