התאבכות ועקיפה משני מקורות: היבטים מתודיים ושבח למתמטיקה

יבגניה גבאי ואלכסנדר פלטקוב - בית-ספר תיכון "שבח-מופת", ת"א

מזה שנתיים נבחנים תלמידי תיכון בפרק החובה החדש "קרינה וחומר" הנלמד במסגרת תוכנית 5 יח"ל בפיסיקה. במבחן הבגרות בקיץ 2007 הופיעה בפרק זה שאלה, שנושאה התאבכות משני מקורות של גלי מיקרו. כמעט שני שליש מהתלמידים הנבחנים בחרו בשאלה זו. אך ניתוח מבחני התלמידים גילה שרובם אינם מבינים באילו תנאים מותר להשתמש בנוסחת יאנג.

הנושא "התאבכות ועקיפה" מתואר ברוב ספרי הלימוד ובספרות המקצועית[1-6]. אף על פי כן הנושא קשה לתלמידים רבים, כי אין להם הבנה מעמיקה של היבטים מסוימים הקשורים בו. קל להשתכנע בכך בעת בדיקת המבחנים כולל מבחני בגרות.

נוסחת יאנג פותחה לגלי אור שתחום התדירויות שלהם שונה מתחום התדירויות של גלי מיקרו. יש צורך בבירור באילו מקרים נוסחה זו תקפה. מאמר זה מוקדש להבהרת נקודה זאת.

להשגת המטרה נעסוק בהעמקת ההבנה בנושאים הבאים: קוהרנטיות ובאילו תנאים אפשר להשתמש בנוסחאות מקורבות הנלמדות בהתאבכות ועקיפה, כגון נוסחת יאנג והנוסחה להפרש הדרכה בין הגלים המתאבכים.

1. קוהרנטיות

התאבכות היא תופעה הנובעת מסופרפוזיציה של גלים. כתוצאה מהתאבכות מתגברת עוצמת התנודות בנקודות מסוימות של המרחב ונחלשת בנקודות מסוימות אחרות. **תבנית ההתאבכות** מהווה תמונת מקסימום של עוצמת התנודות (התאבכות בונה) ומינימום של עוצמת התנודות (התאבכות הורסת).

ניסויים מראים שתבנית התאבכות **יציבה** (במרחב ובזמן) מתקבלת אך ורק מהתאבכות גלים הנוצרים על ידי **מקורות קוהרנטיים. המקורות הקוהרנטיים הם מקורות שהפרש המופע ביניהם נשאר קבוע בזמן.**

הפרש המופע של הגלים שנוצרו על ידי מקורות אלו נשאר קבוע בזמן בכל נקודות המפגש של הגלים.

ננתח טענה זאת. לפי תוכנית הלימודים ברוב המקרים מבצעים מקורות הגלים תנודה הרמונית פשוטה. לפיכך הגלים הם חד-ממדיים וסינוסואידליים. במקרה זה משוואת התנועה של המקור היא:

$$\psi = \psi_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

כאשר ψ_0 - האמפליטודה, $\omega = 2\pi f$ - התדירות הזוויתית (f - התדירות), φ_0 - המופע ההתחלתי.

כאשר גל מתפשט לאורכו של ציר ה-x ומהירות ההתפשטות של חזית הגל שווה ל-v, משוואת הגל היא:

$$\psi = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \qquad (1)$$

כאשר $k = 2\pi/\lambda$ - מספר הגל, λ - אורך הגל.

הפרמטר ψ יכול לייצג גדלים כגון: לחץ אוויר, גובה של פני מים, טמפרטורה, עוצמת שדה חשמלי, עוצמת שדה מגנטי וכו'. גדלים אלה משתנים ומתפשטים במרחב.

המשתנה של ה- cos בנוסחה (1) נקרא מופע או פאזה של הגל. נסמן אותו כ- φ:

$$\varphi = \omega t - kx + \varphi_0 \qquad (2)$$

אם ברגע זמן t ובנקודה x המופע של הגל הראשון הוא $\varphi_1 = \omega_1 t - k_1 x + \varphi_{01}$ ושל השני - $\varphi_2 = \omega_2 t - k_2 x + \varphi_{02}$, הפרש המופע ביניהם הוא:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 x_2 - k_1 x_1) + (\varphi_{02} - \varphi_{01})$$

תמונת ההתאבכות היא יציבה כאשר $\Delta\varphi = const$.

הדבר שקול לתנאים ההכרחיים והמספיקים הבאים:

א) הגלים מונוכרומטיים (חד-צבעיים), כלומר בעלי אותה תדירות $f_1 = f_2$.

ב) הפרש המופעים ההתחלתיים נשאר קבוע בזמן:

$$\Delta\varphi = -(k_2x_2 - k_1x_1) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) \quad (3)$$

קל לייצר גלים מונוכרומטיים בתדירויות נמוכות, כמו תדירויות קול, גלי רדיו, גלים על פני מים (גלי מתח פנים) וכדומה. למשל, כדי לייצר גלים כאלה על פני המים די במערכת הבנויה משני מוטות המתנדנדים בציר אנכי באותה תדירות. שתי אנטנות המחוברות לאותו מחולל (גנראטור) הן מקורות קוהרנטיים של גלים אלקטרומגנטיים.

במקרה של אור נראה הדבר מורכב יותר. היום קיים מחולל גלים מונוכרומטיים בתחום התדירויות של אור נראה והוא **הלייזר**. אך לדוגמה, שתי נורות להט או שתי נקודות שונות של אותה נורה פלואורסצנטית **אינן** מקורות קוהרנטיים, אפילו לו היינו יכולים להפיק מהם אור מונוכרומטי. תבנית ההתאבכות הנוצרת על ידי גלי האור היוצאים ממקורות אלו אינה יציבה.

אטומים הנמצאים ברמות אנרגיה גבוהות הם מעוררים. מצב זה אינו יציב, הם עוברים לרמות אנרגיה נמוכות יותר תוך פליטת אור. אטום יכול להימצא במצב מעורר למשך פרק זמן מסדר גודל τ של $\tau \approx 10^{-8}s$. קרינת האור נמשכת בערך אותו פרק זמן. לכן הגל המוקרן על ידי האטום מהווה חבילת גלים. כלומר חבילת הגלים מהווה חלק של סינוסואידה. האורך l של חבילה זו שווה למהירות האור c כפול במשך זמן הקרינה:

$l = c\tau = 3 \cdot 10^8 m/s \cdot 10^{-8}s = 3m$. אם ניקח לדוגמה אורך גל λ של אור ירוק שהוא $\lambda = 500nm$, אפשר למקם באורך זה $6 \cdot 10^6$ אורכי גל:

$$N = l/\lambda = 3m/(5 \cdot 10^{-7}m) = 6 \cdot 10^6$$

כיוון שהאור מוקרן ממספר ענק של אטומים הפולטים אור בכל רגע בצורה בלתי תלויה, מהווים גלי האור סדרת גלים בעלי מופע המשתנה בצורה אקראית. במשוואת הגל (1) המופע ההתחלתי φ_0 הוא פונקציה אקראית של הזמן. שני הגלים, במקרה זה, אינם יכולים ליצור תבנית התאבכות. נוכיח טענה זו:

הוכחה

כדי להקל על החישובים, נניח שלאותה נקודה במרחב מגיעים שני גלים אלקטרומגנטיים מישוריים בעלי אמפליטודות שוות ותדירויות שוות, (התנאי הראשון לקיום התאבכות יציבה). משוואות הגלים הן:

$$E_1 = E_0\cos(\omega t - k_1x_1 + \varphi_{01}) \quad (4)$$

$$E_2 = E_0\cos(\omega t - k_2x_2 + \varphi_{02}) \quad (5)$$

הגלים האלו הם מונוכרומטיים ואורכי הגל שלהם בריק שווים: $\lambda = c/f$.

אך אם הגלים מתפשטים בחומרים שונים, אורכי הגל שלהם יהיו שונים:

$$\lambda_1 = v_1/f = c/(n_1f) = \lambda/n_1 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda/n_2 \quad (6)$$

כאשר v_1 ו-v_2 מהירויות האור בחומרים בהם מתפשטים גלי האור, n_1 ו-n_2 הם מקדמי השבירה המתאימים.

מספרי הגל במקרה זה הם:

$$k_1 = 2\pi n_1/\lambda \ , \ k_2 = 2\pi n_2/\lambda \quad (7)$$

ניעזר בנוסחה הטריגונומטרית $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha - \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha + \beta)/2]$ ובנוסחאות (4) ו-(5) ונחשב את תוצאת הסופרפוזיציה של גלי האור:

$$E_1 + E_2 = 2E_0\cos[(k_2x_2 - k_1x_1)/2 + (\phi_{01} - \phi_{02})/2] \cdot \cos[\omega t - (k_2x_2 + k_1x_1)/2 + (\phi_{01} + \phi_{02})/2] = E'\cos(\omega t + \gamma) \quad (8)$$

כאשר

$$\gamma = (\phi_{01} + \phi_{02})/2 - (k_2x_2 + k_1x_1)/2 = (\phi_{01} + \phi_{02})/2 - \pi(n_1x_1 + n_2x_2)/\lambda$$

$$E' = 2E_0\cos[\pi(n_2x_2 - n_1x_1)/\lambda + (\phi_{01} + \phi_{02})/2] \quad (9)$$

הביטוי

$$\Delta = n_2x_2 - n_1x_1 \quad (10)$$

נקרא **הפרש הדרכים האופטי של מהלכי הגלים**.

נתבונן **בהתאבכות במקרה בו הפרש המופע משתנה באופן אקראי** (מקורות הגלים לא קוהרנטיים).
כאמור, המקרה הזה מתאים למקורות אור רגילים (לא לייזר). האור הוא גל אלקטרומגנטי בתדירויות בסדר גודל של $10^{14}Hz$ ואילו האטום מקרין את האור כל 10^{-8} שניות. לכן משתנה התמונה על המסך, בו נפגשים הגלים, בתדירות של מינימום 10^8Hz. התמדת העין היא בערך 0.1 שניות. לכן כאשר עוצמת האור משתנה בתדירות גדולה יותר מ-10Hz, רואה העין רק את עוצמת האור הממוצעת.

עוצמת האור הממוצעת משני המקורות היא:

$$\langle I\rangle = \langle I_1 + I_2 \rangle \qquad (11)$$

כאשר I_1 - עוצמת האור של המקור הראשון, I_2 - עוצמת האור של המקור השני.
נניח ש- $I_1 = I_2$, על מנת להקל על החישובים. במקרה זה עוצמת האור הממוצעת נתונה על ידי ממוצע ריבוע המשרעת:

$$\langle I\rangle \sim \langle E'^2\rangle = 4E_0^2\langle \cos^2[\pi\Delta/\lambda + (\phi_{01} - \phi_{02})/2]\rangle \qquad (12)$$

כאשר $\langle I\rangle$ - עוצמת האור הממוצעת, $\langle E'^2\rangle$ - ריבוע האמפליטודה הממוצעת.
תוצאת הסופרפוזיציה של הגלים תלויה בצורה משמעותית בהפרש המהלכים ובהפרש המופעים

$$\Delta\phi_0 = \phi_{01} - \phi_{02} \qquad (13)$$

מכיוון ש- Δ הוא פונקציה אקראית של הזמן והארגומנט של הקוסינוס אף הוא פונקציה אקראית של הזמן, הממוצע בזמן של ריבוע הקוסינוס של הפונקציה האקראית בזמן שווה ל-0.5:

$$\langle \cos^2[\pi\Delta/\lambda + (\phi_{01} - \phi_{02})/2]\rangle = 0.5$$

$$I_1 + I_2 = \langle I\rangle \sim \langle E'^2\rangle \sim 4E_0^2 \cdot 0.5 = 2E_0^2 = E_0^2 + E_0^2 \qquad (14)$$

כלומר $\langle I\rangle = I_1 + I_2 = 2I_0$ - עוצמת האור בכל הנקודות שווה לסכום עוצמות האור של שני המקורות בהתאמה מלאה לחוק שימור האנרגיה. במקרה זה **אין** תבנית ההתאבכות.

נתבונן **בהתאבכות במקרה בו הפרש המופע ההתחלתי קבוע בזמן** (מקורות גלים קוהרנטיים).
נניח שהפרש המופע ההתחלתי הוא קבוע, כלומר $\varphi_{01} - \varphi_{02} = const$, ונניח שהפרש המופע ההתחלתי שווה ל-0 כאשר הפרש הדרכים האופטי Δ של מהלכי הגלים:

$$\Delta = n_2x_2 - n_1x_1 = m\lambda \ (m = 0, \pm1, \pm2 \ldots) \qquad (15)$$

הוא התנאי **להתאבכות בונה**, והאמפליטודה $E' = 2E_0$ ואילו כאשר

$$\Delta = n_2x_2 - n_1x_1 = (2m-1)\,\frac{\lambda}{2} \ (m = 0, \pm1, \pm2 \ldots) \qquad (16)$$

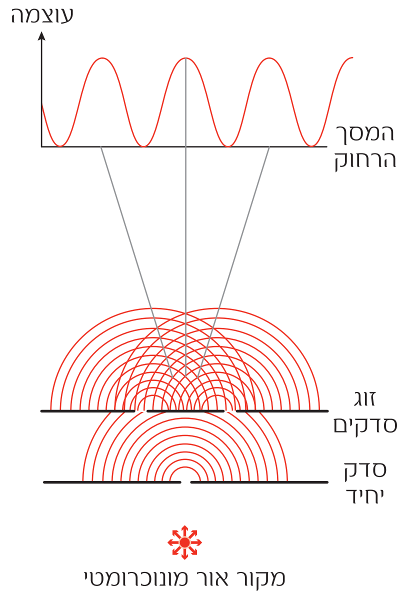
הוא **התנאי להתאבכות הורסת**, והאמפליטודה $E' = 0$.
במקרה $n_1 = n_2 = 1$ הפרש הדרכים **האופטי** של מהלכי הגלים שווה להפרש הדרכים **הגיאומטרי** של מהלכי הגלים: $\Delta = x_2 - x_1$
בהתאבכות גלים קוהרנטיים עוצמת האור בכל נקודות המרחב אינה שווה לסכום עוצמות האור של המקורות, כלומר $I \neq 2I_0$, אלא ישנן נקודות בהן עוצמת האור של הגל $I = 4I_0$ (התאבכות בונה), וישנן נקודות בהן העוצמה היא $I = 0$ (התאבכות הורסת). מיקומם של נקודות המקסימום והמינימום של עוצמת האור הוא בנקודות קבועות במרחב, כלומר קיימת תבנית התאבכות יציבה. גם במקרה זה אין הפרה של חוק שימור האנרגיה, למרות שלכאורה ישנם מקומות בהם העוצמה כפולה מעוצמת מקורות האור. אך יחד עם זאת ישנם מקומות בהם העוצמה שווה ל-0. האנרגיה הכוללת שווה לסכום האנרגיות של מקורות האור.

2. קריטריון לשימוש בנוסחה $\Delta = d\sin\theta$ לחישוב הפרש הדרכים של מהלכי הגלים

כדוגמה ננתח את ניסוי יאנג. בניסוי יאנג האור משני סדקים מהווה גל אלקטרומגנטי עם מופע המשתנה בזמן באופן אקראי. אך מכיוון שהסדקים קרובים אחד לשני, **האור המגיע לסדקים שייך לאותה חזית הגל**. למרות שהמופע משתנה בצורה אקראית, **הפרש המופעים** משני הסדקים נשאר קבוע בזמן והוא אפס.

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02} = 0$$

ניסוי יאנג



תרשים 1: אור מונוכרומטי המגיע מסדק יחיד יוצר שני מקורות אור קוהרנטיים בשני הסדקים. על המסך הרחוק מופיעה תבנית התאבכות

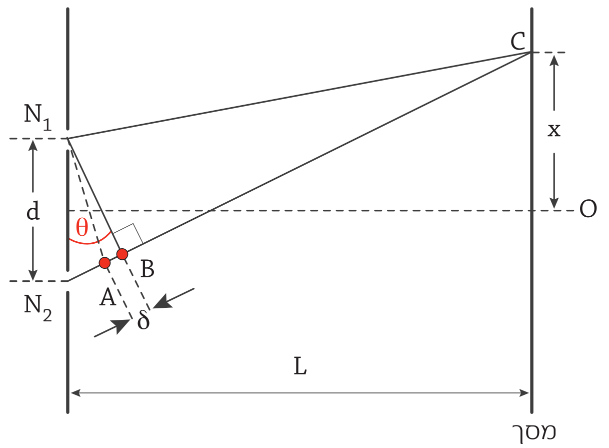
כאשר $\Delta = m\lambda$:
$$I_{max} = 2(I_1 + I_2) = 4I_0 \qquad (17)$$
תתקבל עוצמת אור מקסימלית.

וכאשר $\Delta = (2m - 1)\ \lambda/2$:
$$I_{min} = 0,\ (m = \pm1, \pm2 \ldots) \qquad (18)$$
עוצמת האור תתאפס.

יש לציין ש-Δ צריך להיות הרבה יותר קטן מאורך חבילת הגלים $c\tau$.

במקרה ש $\Delta \geq c\tau$ הגלים שייכים לחבילות שונות ולא תתקבל תבנית התאבכות על המסך.

נתבונן בתרשים הבא:



תרשים 2: התאבכות בשני סדקים

במקרה בו אנו דנים המסך נמצא רחוק מאוד משני הסדקים. במקרה זה משתמשים בדרך כלל בביטוי Δ עבור הפרש הדרכים:
$$\Delta = d\sin\theta \qquad (19)$$
כאשר d - המרחק בין הסדקים, θ - הזווית המתוארת בתרשים 2.

מקובל שהקריטריון לתקפות הביטוי (19) הוא: $L \gg d$

נראה שהקריטריון בביטוי (19) אינו מספיק תמיד, ונפתח קריטריון נוסף בו מותר להשתמש.

כאשר $L \gg d$ הזווית בין מהלכי הגלים קטנה באופן ש-N_1C ו-N_2C כמעט מקבילים.

בתרשים 2 N_1B מאונך ל-N_2C, לכן $d\sin\theta = N_2B$.

הפרש הדרכים **האמיתי** הוא $N_2A = \Delta'$ היות ש- $N_1C = AC$ והוא שונה מהגודל של N_2B.

נסמן את ההפרש $N_2B - N_2A$ באות δ:
$$\delta = N_2B - N_2A \qquad (20)$$
אסור להשתמש בביטוי (19) לחישוב Δ אם לא מתקיים התנאי
$$\delta \ll \frac{\lambda}{2} \qquad (21)$$
כי הפרמטר $\lambda/2$ הופך את תבנית ההתאבכות הבונה להתאבכות הורסת ולהיפך.

מקריטריון (21) נובע הקריטריון הנכון לשימוש בנוסחה (19)
$$L \gg d^2/\lambda \qquad (22)$$
פיתוח קריטריון (22) מובא בנספח המתמטי.

נציג כדוגמה את שאלה 3 מבחינת הבגרות של קיץ 2007 משאלון "קרינה וחומר"[1], בה מותר להשתמש בקריטריון (19). בשאלה זו נתונים: המרחק בין שני המקורות $d = 3cm$, אורך הגל $\lambda = 1.2cm$, והמרחק למסך $L = 10m$.

נתונים אלו מתאימים לקריטריון (22), כי $d^2/\ \lambda = 3^2/1.2 = 7.5cm \ll 10m$.

מובן שבמקרה זה מותר להשתמש בנוסחה (19) $\Delta = d\sin\ \theta$.

דוגמה אחרת לבעיה בה לא נכון להשתמש בקריטריון (19) וחייבים להפעיל את קריטריון (22):

נתון שגלי מיקרו בעלי אורך גל $\lambda = 1cm$ פוגעים בשני סדקים שהמרחק ביניהם הוא $d = 6cm$. המרחק בין

מערכת הסדקים למסך בו נמצאים גַּלָּאֵי גלי המיקרו הוא L = 1m. האם מותר להשתמש בביטוי (19) לחישוב של תבנית ההתאבכות?

פתרון: אם L = 1m ו- d = 6cm, $L/d \approx 16.7$. מקובל שהמונח "גדול (קטן) הרבה יותר" הוא שינוי בסדר גודל (פי 10). כלומר במקרה הזה $L \gg d$! לכן בדרך כלל משתמשים בביטוי (19).

חישוב פשוט מראה: $d^2/\lambda = 0.36m$. זאת אומרת שהיחס בין L ל- d^2/λ הוא בערך 2.8, הרחוק מאוד מהגורם 10 הנדרש.

מסקנה: במקרה זה אף על פי ש- $L \gg d$ אין להשתמש בביטוי (19).

צריך לציין שבמקרה של **גלי אור** קריטריון (22) מתקיים כאשר המרחק עד המסך בו צופים בתבנית ההתאבכות הוא מסדר גודל של סנטימטרים ואפילו מילימטרים. כיוון שבפועל מרחק זה מגיע למטרים הרי שקריטריון (22) בוודאי תקף, ואילו ב**מקרה של גלי מיקרו אין הדבר בהכרך כך.**

3. הקריטריון לשימוש בנוסחת יאנג לעקיפה

ידוע ששימוש בנוסחת יאנג לא תמיד מוצדק. בסעיף זה נתבונן בשימוש בנוסחה זו בשני המקרים הבאים:

א) עקיפה בסדק יחיד שרוחבו w

ב) התאבכות בשני סדקים שרוחב כל אחד מהם גם כן w והמרחק בין הסדקים הוא d.

3.1 נוסחת יאנג לעקיפה בסדק יחיד

הקריטריון לשימוש בנוסחת יאנג הוא שוויון מקורב בין סינוס וטנגנס של זווית קטנה. נבחר את הדיוק לשוויון זה כ-5% בכל אחד משני המקרים א) ו- ב).

לפי נוסחת יאנג לעקיפה בסדק יחיד רוחב הפס המרכזי Δx הוא:

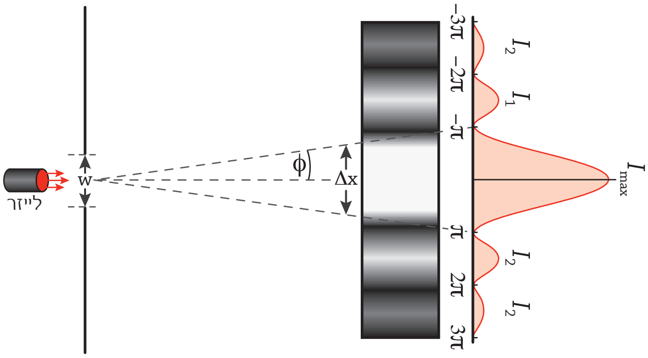
$$\Delta x = 2L\,\lambda/w \qquad (23)$$

כאשר w - רוחב הסדק, λ - אורך הגל, L - המרחק בין הסדק למסך.

נניח שהזווית φ היא הזווית לכיוון המינימום הראשון של תבנית העקיפה (ראה תרשים 3).

כידוע התנאי לשימוש בנוסחה (23) הוא:

$$\sin\varphi \approx \mathrm{tg}\,\varphi \qquad (24)$$



תרשים 3: עקיפה בסדק יחיד

גודל ההפרש בין sin φ ל- tg φ קובע את שיעור הדיוק של נוסחת יאנג.

בשיעור דיוק של 5% חלה נוסחה (24) על כל זווית φ הקטנה מ- 0.1π.

כאשר:

$$(\mathrm{tg}\,\varphi - \sin\varphi)/\sin\varphi = 1/\cos\varphi - 1 = 0.05$$

מתקבל:

$$\varphi < 0.1\pi \approx 0.314 \approx 1/3 \qquad (25)$$

אם מתקיים (23), אז

$$\sin\varphi = \lambda/w \qquad (26)$$

מ-(25) ו-(26) נובע שכדי להשתמש בנוסחה (23) מספיק לדרוש:

$$\sin\varphi < 1/3 \qquad (27)$$

או

$$\lambda/w < 1/3$$

כלומר

$$w > 3\lambda \qquad (28)$$

מסקנה: אם רוחב הסדק גדול פי 3 מאורך הגל מותר להשתמש בנוסחת יאנג (23) עבור רוחב הפס המרכזי. הביטוי (28) הוא הקריטריון הנכון אם הדיוק הנדרש הוא 5% ומטה.

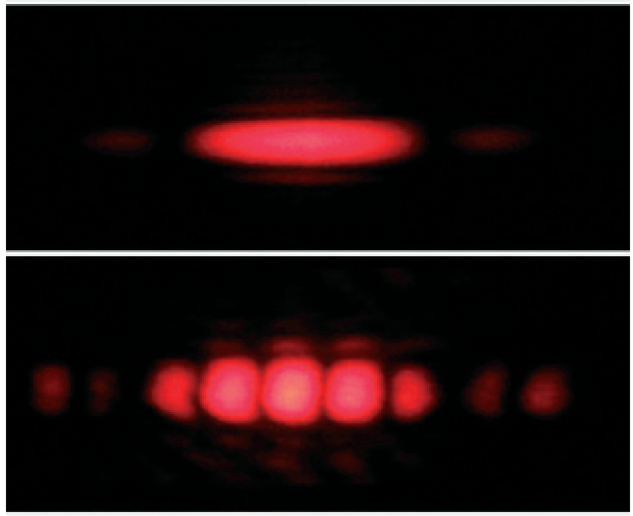
3.2 נוסחת יאנג להתאבכות ועקיפה בשני סדקים, בהתחשב ברוחב הסדק.

המקורות הם שני סדקים, **כל אחד בעל רוחב w** והמרחק ביניהם d. מובן ש- d>w. נוסחת יאנג למרחק Δx בין קווי מקסימום (מינימום) צמודים היא:

$$\Delta x = L\,\lambda/d \qquad (29)$$

כאשר: L - המרחק בין מישור הסדקים למסך,

λ - אורך הגל.



תצלום 1: התצלום העליון מראה עקיפה בסדק יחיד, התצלום התחתון מראה עקיפה והתאבכות בזוג סדקים

נוסחה (29) מתאימה לשני מקסימום מסוימים בתנאי הבא: הזווית θ, לכיוון הפס המרוחק יותר ממרכז תבנית ההתאבכות, קטנה באופן שמתקיים:

$$\sin\theta \approx tg\,\theta \qquad (30)$$

תנאי זה דומה לתנאי (24). נתרכז בשלושה מקרים.

3.2.1: $w > 3\lambda$.

ברור שתנאי (30) מתקיים יחד עם תנאי (24) לכל m פסי ההתאבכות הנמצאים בתוך המקסימום המרכזי של העקיפה. אם המקסימום מספר m מתלכד או קרוב מאוד מבפנים למינימום הראשון של העקיפה אז:

$$\theta_m \approx \varphi$$

(ראה תרשים 4).

ומהנוסחאות $\sin\theta_m = m\,\lambda/d$ ו- $\sin\varphi = \lambda/w$

נובע: $d/w = m$

מהתנאי $w > 3\lambda$ נובע כי $\quad m \le d/w \qquad (31)$

כי m הוא מספר שלם.

מסקנה: כאשר $w > 3\lambda$ ו- $m \le d/w$ מותר להשתמש בנוסחת יאנג (29) ל-m המקסימה (המינימה) הראשונים.

3.2.2 $\lambda < w < 3\lambda$.

במקרה זה הזווית φ **אינה** קטנה ולכן תנאי (24) **אינו** מתקיים.

ברור ש-d חייב להיות גדול מאורך הגל λ, כי $w > \lambda$ ו- $d > w$.

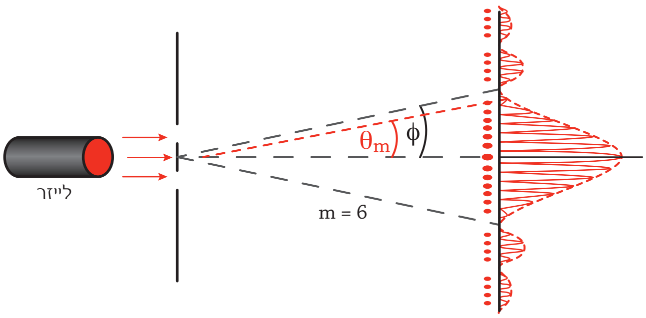
נניח ש- $d = k\lambda$, ו- $k > 1$. אז נובע מ-(31):

$$\sin\theta_m = m/k$$

לפי הגדרת הזווית הקטנה המתאימה לתנאי (25) ובהנחה שהשגיאה היחסית קטנה מ-5%, נקבל $m/k < 0.3$, כלומר $m < 0.3k$, כי במקרה זה $\sin\theta_m = 0.3,\ tg\,\theta_m = 0.314$, לכן $\sin\theta_m \approx tg\,\theta_m$ והשגיאה היא פחות מ-5%.

מסקנה: כאשר $d = k\lambda$ מותר להשתמש בנוסחת יאנג (29) ל-m המקסימה (המינימה) הראשונים:

$$m < 0.3d/\lambda \qquad (32)$$

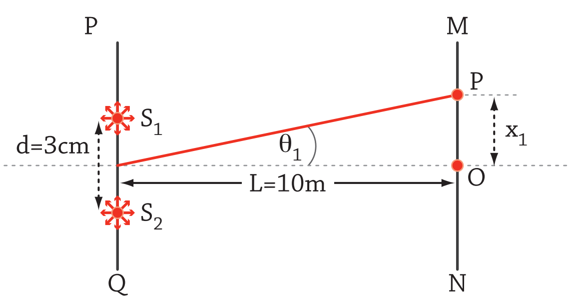


תרשים 4: התאבכות ועקיפה בשני סדקים

3.2.3 $w < \lambda$.

במקרה זה $\sin\varphi = \lambda/w > 1$! אך $\sin\varphi$ חייב להיות קטן או שווה ל-1. זאת אומרת שתבניות העקיפה וההתאבכות אינן קיימות. לדוגמה, לא יכולים לשמוע רדיו מתחת לגשר העשוי ממוטות מתכת, אם המרחק בין מוטות הגשר קטן מאורך גלי הרדיו.

נחזור לשאלה 3 בבחינת הבגרות קיץ 2007 בנושא "קרינה וחומר". בסעיף ד' של השאלה התבקשו הנבחנים למצוא את המרחק x_1 בין המקסימום המרכזי והמקסימום הראשון.



תרשים 5: סרטוט לשאלה 3 (בגרות 2007)

בררנו שקריטריון (22) מתקיים במקרה זה. הדרך הפשוטה ביותר לחשב את x_1 היא:

$$\sin\theta_1 = \lambda/d = 1.2/3 = 0.4$$

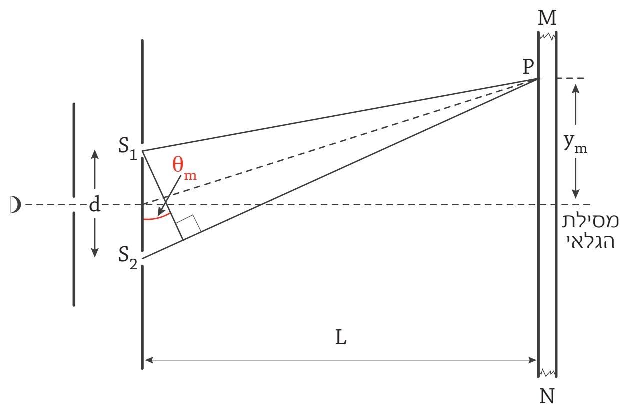
לפי θ_1 למצוא במחשבון את $\mathrm{tg}\,\theta_1$ ולמצוא את x_1:

$x_1 = L\,\mathrm{tg}\,\theta_1 = 4.36\mathrm{m}$.

כ-80% מהתלמידים שפתרו את הסעיף נכון, בחרו להשתמש בנוסחת יאנג. האם נתוני השאלה מאשרים את השימוש בנוסחת יאנג? - לפי הנתונים והכללים המתמטיים צריכה להופיע בתשובה הסופית רק סיפרה משמעותית אחת. כלומר לפי הכללים **לחישובים מקורבים** $x_1 \approx 4\mathrm{m}$.

שימוש בנוסחת יאנג נותן אותה תוצאה: $x_1 = L\lambda/d = 10\mathrm{m} \cdot 1.2\mathrm{cm}/3\mathrm{cm} = 4\mathrm{m}$ ואין זה פלא! כי אפשר לראות שההבדל בין שתי השיטות הוא 9%, כמו ההבדל בין $\sin\theta_1 = 0.4$ ו- $\mathrm{tg}\,\theta_1 = 0.436$, שגם הוא כ-9%. לו היה נתון בשאלה $d = 3.0\mathrm{cm}$ היה צריך להשאיר בתשובה הסופית **שתי** ספרות משמעותיות, כלומר $x_1 \approx 4.4\mathrm{m}$, זאת אומרת שנתוני השאלה מכתיבים את דיוק התשובה.

דוגמה אחרת: בניסוי בגלי מיקרו משתמשים בשני מקורות נקודתיים קוהרנטיים S_1 ו-S_2 שווי-מופע ושווי-משרעת. תדירות המקורות $f = 2.0 \cdot 10^{10}\mathrm{Hz}$. שני המקורות נמצאים במרחק $d = 10\mathrm{cm}$ זה מזה. הגלאי יכול לנוע לאורך מסילה MN, המקבילה לישר המחבר בין S_1 ו-S_2. המרחק בין המסילה לישר המחבר בין S_1 ו-S_2 הוא $L = 10\mathrm{m}$ (תרשים 6).



תרשים 6: הזווית θ_m בה נראה המקסימום ה-m

א. בהנחה ש-MN ארוכה מאוד חשב בכמה נקודות לאורך המסילה עוצמת הגל מקסימלית.

ב. איזה מרחק על הגלאי לעבור מהמקסימום הראשון עד המקסימום השני?

ג. ענה על סעיפים א' ו-ב' במקרה שהמרחק בין הסדקים $d = 5\mathrm{cm}$.

פתרון

א. כדי לקבוע את מספר נקודות המקסימום נברר האם אפשר להיעזר בביטוי (19) $\Delta = d\sin\theta$ ונבדוק האם תנאי (22) $L \gg d^2/\lambda$ נכון עבור מקרה זה.

$$\lambda = \frac{c}{f} = 1.5\ \mathrm{cm}$$

$d^2/\lambda = 10^2/1.5 \approx 67\mathrm{cm} = 0.67\mathrm{m}$. מכיוון שהדרישה $L \gg 0.67\mathrm{m}$ מתקיימת, אפשר להשתמש בנוסחה (19) שממנה נובעת נוסחה (30) $\sin\theta \approx \mathrm{tg}\theta$ עבור התאבכות בונה.

$$\left|\sin\theta_m\right| = \frac{m\lambda}{d} \le 1 \rightarrow m < \frac{d}{\lambda} \rightarrow m \le 6.67;$$

כלומר ישנם 6 קווי מקסימום משני הצדדים פלוס המקסימום המרכזי, בסך הכול 13 קווי מקסימום.

ב. כדי לחשב את המרחק בין המקסימה 1 ו-2 נבדוק האם אפשר להשתמש בנוסחת יאנג (29) בדיוק של 5% שנקבע לפי הקריטריון $k = d/\lambda$, $m < 0.3k$:

$m < 0.3k = 0.3 \cdot 6.67 = 2$, $k = 10/1.5 = 6.67$

כלומר אפשר ליישם את נוסחת יאנג:

$\Delta y = L\,\lambda/d = 10\mathrm{m} \cdot 1.5\mathrm{cm}/10\mathrm{cm} = 1.5\mathrm{m}$.

ג. כאשר $d = 5\mathrm{cm}$ אפשר להשתמש בנוסחה (28), כי היחס d^2/λ יהיה קטן יותר ואילו L לא השתנה. כיוון ש-d קטן פי שניים מבמקרה הקודם, גם m יקטן פי שניים, כלומר $m = 3$ ובסך הכל יהיו $7 = 3 \cdot 2 + 1$ קווי מקסימום.

לגבי המרחק בין המקסימה 1 ו-2, $k = 5/1.5 = 3.33$, ואילו $m = 0.3 \cdot 3.33 = 1$. לכן נוסחת יאנג **אינה** מתאימה והחישובים חייבים להיעשות ישירות משיקולים גיאומטריים.

$y_1 = L \cdot \mathrm{tg}\,\theta_1,\ y_2 = L \cdot \mathrm{tg}\,\theta_2,\ \Delta y = y_2 - y_1$.

$\sin\theta_1 = \lambda/d = 1.5/5 = 0.3,\ \theta_1 = 18^\circ$

$\mathrm{tg}\,\theta_1 = 0.325,\ y_1 = 3.25\mathrm{m},$

$\sin\theta_2 = 2\lambda/d = 2 \cdot 1.5/5 = 0.6,\ \theta_2 = 37^\circ$

$\mathrm{tg}\,\theta_2 = 0.75,\ y_2 = 7.5\mathrm{m}$

$\Delta y = y_2 - y_1 = 7.5\mathrm{m} - 3.25\mathrm{m} \approx 4.3\mathrm{m}$.

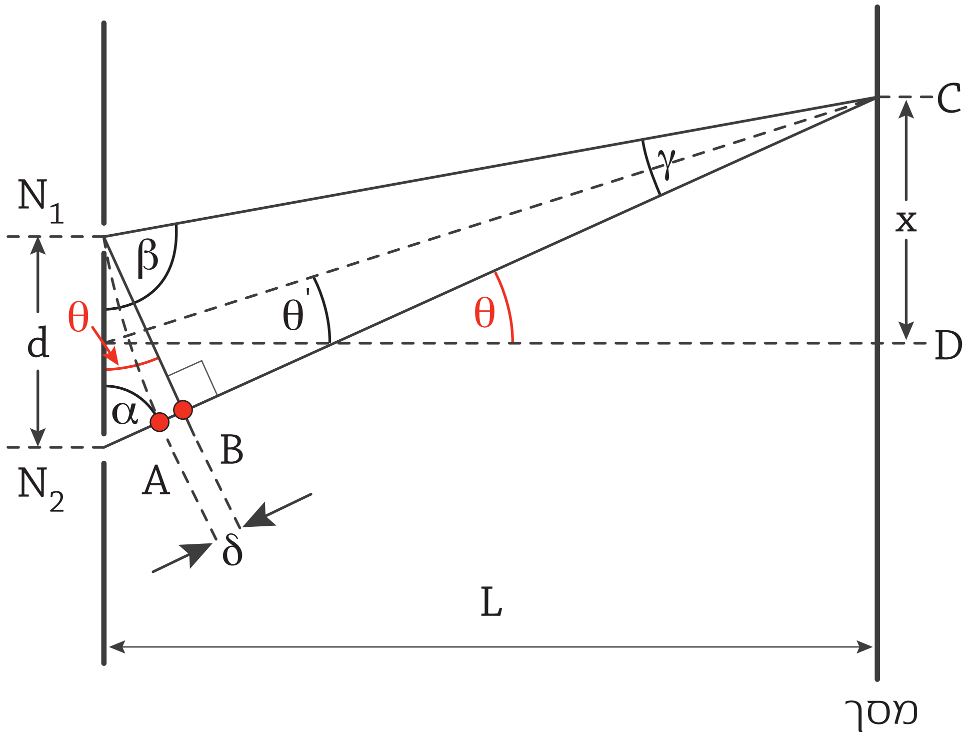
לו היינו מחשבים את המרחק לפי נוסחת יאנג היינו מקבלים $\Delta y = 3m$. כלומר השגיאה בסדר גודל של 40%!

הקריטריון (28) לעקיפה $w > 3\lambda$, והקריטריון (31) להתאבכות: $(d > 3\lambda)$ $m \leq d/w$ והקריטריון (32): $m < 0.3d/\lambda$ $(\lambda < w < 3\lambda)$ נובעים מבחירת החישובים בדיוק של 5%.

אם דיוק החישובים שונה מהחישוב המודגם, מצביע מאמר זה על דרך המאפשרת לבצע את ההערכות. בניתוח הזה כדאי להשתמש לתיכנון הניסויים בתחום גלי המיקרו.

אנחנו אסירי תודה לאירינה ויסמן על הרעיון של המאמר.
אנחנו מודים גם לחנה גולדרינג ולרחל ברדה על הערות ענייניות שעזרו לנו לשפר את המאמר.

נספח מתמטי



תרשים 7: סרטוט להסבר לשימוש פיתוח הקריטריון בנוסחת הפרש הדרכים $\Delta = d\sin\theta$

$$\delta = N_2B - N_2A = d\sin\theta - (N_2C - N_1C)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \;\; ; \;\; \beta = \pi - \alpha - \gamma$$

$$\therefore \;\; \beta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \gamma = \frac{\pi}{2} + \theta - \gamma$$

נשתמש במשפט הסינוסים עבור משולש N_1N_2C. במשולש זה הזווית γ בקודקוד C.

לפי משפט הסינוסים: $(*)\ d/\sin\gamma = N_1C/\sin(\pi/2 - \theta) = N_2C/\sin(\pi/2 + \theta - \gamma)$

קיים: $(**)\ [\sin(\pi/2 + \theta - \gamma) = \cos(\gamma - \theta)\ ,\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha + \beta)/2]\sin[(\alpha - \beta)/2$

מכאן: $N_2C = d\cos(\gamma - \theta)/\sin\gamma\ ,\ N_1C = d\cos\theta/\sin\gamma$

$$\delta = d\sin\theta - d[\cos(\gamma - \theta) - \cos\theta]/\sin\gamma = d[\sin\theta + 2\sin(\gamma/2)\sin(\gamma/2 - \theta)/\sin\gamma]$$

נפשט את הביטוי עבור δ.

$$\delta = d[\sin\theta + 2\sin(\gamma/2)\sin(\gamma/2 - \theta)/2\sin(\gamma/2)\cos(\gamma/2)]$$

אחרי הצמצום נקבל $\delta = d[\sin\theta - \sin(\theta - \gamma/2)/\cos(\gamma/2)]$

$$\delta = D\{\sin\theta - [(\sin\theta\cos(\gamma/2) - \cos\theta\sin(\gamma/2)] / \cos(\gamma/2)\}$$

במשולש N_1N_2C זווית γ קטנה מאוד, כלומר $\cos(\gamma/2) \sim 1$,

$$\delta = d[\sin\theta - \sin\theta + \cos\theta\, tg(\gamma/2)] = d\cos\theta\, tg(\gamma/2)$$

מהשיוויון: $N_1C = d\cos\theta/\sin\gamma$ נובע כי $\sin\gamma = d\cos\theta/N_1C$.

$$(***)\quad tg(\gamma/2) \approx \sin(\gamma/2) \approx 0.5\sin\gamma = 0.5d\cos\theta/N_1C$$

מן העובדה שזווית γ קטנה ו- $N_1C = L/\cos\theta$, נובע מ-(***) כי:

$$\delta = d\cos\theta \cdot 0.5d\cos\theta/(L/\cos\theta) = 0.5d^2\cos^3\theta/L$$

הקריטריון לשימוש בנוסחה (22) נתון בביטוי (23), כלומר $\delta = 0.5d^2\cos^3\theta/L \ll 0.5\lambda$.

מכיוון ש-$\cos^3\theta \le 1$, הקריטריון הוא $d^2/L \ll \lambda$.

לכן התנאי לשימוש בנוסחה (19) הוא הביטוי (23): $L \gg d^2/\lambda$.

צריך לציין שבפיתוח הקריטריון השתמשנו בזווית θ אשר גדולה מהזווית θ' מהאמצע בין הסדקים למינימום או מקסימום של עוצמת הגל. לכן הקריטריון (22) קל וחומר מתאים לזווית θ'.

מראי מקום ולקריאה נוספת

1. "תהודה": בחינת הבגרות בפיסיקה תשס"ז, **26**(3), עמ' 60-61, 2007
2. Douglas C. Giancoli, General Physics, Prentice-Hall, Inc. 1984
3. עדי רוזן, מודלים של האור מניוטון עד איינשטיין, מכון ויצמן למדע, 2003
4. דוד זינגר, קרינה וחומר, גלים ואופטיקה פיסיקאלית, דוד רכגולד ושות' חברה בע"מ, 2006
5. משה גלבמן, קרינה וחומר, חלק ראשון, הפיסיקה של הגלים, הפיסיקה של האור, הוצאת יבנה בע"מ, 2006
6. R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands: The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1963.
7. Frank S. Crawford, Waves, Berkeley Physics Course, McGraw-Hall Book Company, 1974.
8. Poon, C. D. H., How Good is the Approximation "Path Difference ≈ d sin θ ?" The Physics Teacher, Vol **40** (8) pp. 460-462, November 2002.

איחולי הצלחה לחנה ברג'ר ולירון להבי,
בעריכת "תהודה" במתכונתה החדשה