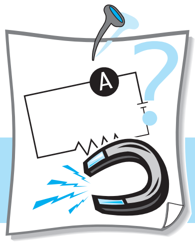


תנועה של גופים על מסילות המסתובבות במעגל

הבנת תופעות פיזיקליות פשוטות בעזרת כוחות מערכתיים ועקרון השקילות

צבי גלר, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

תקציר: לתלמידים רבים קשיים מסויימים בהבנה של תנועות מעגליות ושל מערכות מסתובבות. כדי להתגבר על קשיים אלה, מוצע לבצע סדרת פעילויות שתתבסס על הצגת שאלות לתלמידים, שאת התשובות להן יגלו בתוצאות ניסויים שיודגמו בעזרת פטיפון, ועל דיון תיאורטי שבו יודגש נקודת הראות של צופה הסובב עם המערכת ואפשרות השימוש בעקרון השקילות.

מילות מפתח: כח צנטריפוגלי, כוח צנטריפטלי, עקרון השקילות, כח מערכתי; כוחות "מדומים", מערכות אינרציאליות ובלתי אינרציאליות, שיווי משקל דינמי רופף ויציב.

מבוא

לדעת מורי פיזיקה רבים, הפרק על תנועה מעגלית הנלמד על פי תוכנית הלימודים של משרד החינוך הוא אחד הפרקים הקשים והפחות מובנים לרוב התלמידים. דעה זו הובעה כבר במאמרים ובמכתב למערכת שהתפרסמו בחוברות הראשונות של עיתוננו, חוברות שהופיעו לפני עשרים ושמונה שנים בקירוב (תשל"ב), כאשר שם החוברת היה עדיין "גיליונות".
זאב גולן ז"ל, מי שהיה המפקח על הוראת הפיזיקה במדינת ישראל במשך שנים רבות, ואשר יחד עם פרופסור עמוס דה-שליט ז"ל יזם את הרפורמה הגדולה בהוראת הפיזיקה שנקראה באותם ימים "תוכנית רחובות", כתב בין היתר במאמרו: "התנועה המעגלית והכוחות הפועלים בה"[1]

"... ידוע כי הפרק על התנועה המעגלית הוא מהבעייתיים ביותר בהוראת הפיזיקה. הוא נראה לתלמידים "מוזר" ביותר, מופיעים בו כוחות צנטריפטליים, שאינם מופיעים בתנועות האחרות, ואי אתה יודע (לפחות לא טוב מבין) מאין הם באים. וגם להיפך: אתה רואה ברורות כי הגוף הנע במעגל 'בורח' מן המרכז, או לפחות נוטה לברוח, ואילו המורה טוען שאין כוחות 'צנטריפוגליים' פועלים עליו..."

חברי הטוב רפי כהן, מהוותיקים והבכירים בין מורי הפיזיקה בארץ, טען במכתב למערכת "גיליונות" שפורסם בערך באותה תקופה[2]:

"... אחד המקורות העיקריים לאי-הבנה ולבלבול של התלמיד הבא לנתח תנועה מעגלית הוא הביטוי 'כוח צנטריפטלי'. השם כוח צנטריפטלי בנוי על אותו משקל כמו 'כוח גרביטציה', או 'כוח חיכוך', ומרמז על כך שלתנועה מעגלית קיים, פרט לכל הכוחות הפועלים, גם כוח חדש בשם 'צנטריפטלי'.

יש לי חשד כי את הביטוי המציאו מורים כדי להלחם ב'כוח הצנטריפוגלי', הידוע לשמצה. **אולם בעוד הכוח הצנטריפוגלי הוא באמת כוח חדש שיש להוסיף ליתר הכוחות הפועלים על הגוף כדי להסביר את מנוחתו במערכת מסתובבת** (ההדגשה שלי, צ. ג.), הכוח הצנטריפטלי איננו אלא **שקול** הכוחות הפועלים על הגוף, ומעניק לו את התאוצה הצנטריפטלית $\vec{a}$ לפי: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ ..."

ועוד נאמר במאמר של זאב גולן:

"... תנועה של גוף במעגל, למשל תנועת גוף המונח על תקליט אופקי מסתובב, היא תנועה במערכת לא אינרציאלית...

... לאמיתו של דבר אנו מתעלמים בהוראתנו כליל (או כמעט כליל) מן המערכות הבלתי אינרציאליות, גם הנעות בקו ישר (שבהן הטיפול קל יותר). רק התנועה המעגלית נלמדת, ולכן היא באמת יוצאת דופן, מוזרה, מבודדת, 'משוגעת' ומשגעת...

אני טוען כי את העניין של מערכות אינרציאליות ובלתי אינרציאליות יש ללמד **בזכות עצמן**, מפני שבלעדי זאת הבנת התנועה והאינרציה נשארת פגומה... אם גוף נמצא במערכת מואצת, בלי להיות קשור אליה, אז תאוצה $\vec{a}$ של המערכת גורמת לגוף תאוצה $\vec{a}$ – **ביחס למערכת**, כאילו הופעל על הגוף כוח $-m\vec{a}$. אם פועלים על הגוף בתוך המערכת כוחות אחרים, אפשר לשם חישוב תנועתו של הגוף בתוך המערכת, להוסיף את הכוח הזה $-m\vec{a}$, ולערוך חישובים*... במערכת מואצת קיימים איפוא כוחות לא ניוטוניים, יש קוראים להם 'מדומים' או 'פיקטיביים' (לא אמיתיים), אבל לנו נראה שם כזה מוגזם, שהרי הם עושים פעולות והוספתם לכוחות הרגילים נותנת תוצאות מעשיות נכונות. אולי מוטב לקרוא

* זוהי גישה אשר במכניקה האנליטית נקראת "עקרון ד'אלמבר" (צ.ג.)

להם 'מערכתיים', כדי לאמור שמוצאם בתאוצת **המערכת**, והם פועלים על כל הגופים שבמערכת, על כל גוף לפי מסתו... אני מציע איפוא להרשות לתלמידים, ואף ללמדם, להשתמש בכוחות 'מערכתיים' בתוך מערכות לא אינרציאליות, אולם תוך הבנת העניין ותוך הבחנה בין מערכות אינרציאליות ובלתי אינרציאליות..."

בהמשך מאמרו מתייחס גולן לכמה בעיות הקשורות עם הבנה עמוקה יותר של התנועה המעגלית:

"...ההסבר מתחיל מהתנועה המעגלית לאחר שהיא נוצרה והתייצבה (בעצם על ידי בריחת הגוף הסובב ממרכז המעגל). מורים מתחמקים מהתהוות התנועה המעגלית, למשל... מטוטלת קונית: מתחילה מן המטוטלת המורמת בזווית עם האנך, אך מה הרים אותה? ..."

גולן אומנם טוען כי:

"...יש להסביר את הבריחה מן המרכז כתוצאה מן האינרציה, כנטייה להמשיך בתנועה בקו ישר בכיוון המשיק, ולא בקו מעגלי. אינרציה איננה כוח, ועל כן מתנגדים ל**כוח** צנטריפוגלי, המבריח מן המרכז..."

עם זאת הוא קובע:

"...ההסברים בעזרת כוחות צנטריפוגליים מלאים יותר, דנים גם **בהתהוות** התנועה המעגלית, גם **בהפרתה** (כשאין שיווי משקל בין הכוחות, והגוף הנע עוזב את המעגל), מדברים בדרך **סיבתית**, זאת אומרת **מנבאים מראש** מה יקרה לפי הנתונים (ואין מתחילים מהסוף, כשהתנועה המעגלית כבר ישנה)... מה שחשוב בעיני ביותר הוא שיש ללמד על דבר מערכות אינרציאליות ובלתי אינרציאליות.... ולא להיות קשור אך ורק למערכת החדר...." (שגם היא, כידוע, איננה אינרציאלית לחלוטין – צ. ג.)

עד כאן כמה ציטוטים מהדברים החשובים שכתב זאב גולן במאמרו המקיף משנת תשל"ב. אני מניח שהוותיקים בין מורי הפיזיקה בארץ עדיין זוכרים שהגישה שבה תמכו זאב גולן, רפי כהן ואחרים, אומצה על ידי חברי "קבוצת רחובות", ובספר "מכניקה"[3] שנכתב על ידי חברי קבוצה זו בתחילת שנות השבעים, דנים בתנועה המעגלית הן מנקודת ראותו של "צופה אינרציאלי" הנמצא מחוץ למערכת המסתובבת, והן מנקודת ראותו של צופה מואץ, המשתתף בתנועה הסיבובית. אולם מאז עברו שנים רבות, ומסיבות שונות תוכנית המכניקה המחייבת ברמה של 5 יחידות לימוד כמעט אינה כוללת עוד התייחסות לתנועה המעגלית מנקודת ראותו של צופה המשתתף בה. תמיד חשבתי שזהו פגם שמן הראוי לתקנו, לכן שמחתי מאוד לקרוא את מאמרם של יגאל גלילי, עדי רוזן ויוסף זיק[4] הממליץ לשלב בתוכנית הלימודים בבית הספר התיכון גם את עקרון השקילות במכניקה הקלאסית. מכיוון שאני תמים דעים עם הדברים שנכתבו בזמנו על ידי זאב גולן, רפי כהן ואחרים, ומזדהה לחלוטין עם מה שנאמר במאמרם של גלילי, רוזן וזיק, **אני מציע לקיים עם תלמידינו סדרת פעילויות שתעשיר את ידיעותיהם ותעמיק את הבנתם בנושא "תנועה מעגלית", אחרי שילמדו נושא זה בכיתה בדרך המקובלת.**

סדרת הפעילויות אותה אתאר בקצרה במאמר זה מתבססת על הצגת שאלות לתלמידים שאת התשובות להן יקבלו על ידי הדגמה או ביצוע של ניסויים פשוטים, ועל ידי קיום דיון תיאורטי מתאים לאחר מכן.

הציוד הדרוש לביצוע הניסויים

- פטיפון רגיל שהזרוע הנושאת את המחט הורדה ממנו. הפטיפון משמש כדיסקה אופקית שטוחה שרדיוסה 15 ס"מ בקירוב, היכולה להסתובב בכל אחת משלוש התדירויות המקובלות:
  $f_1 = 33$ r.p.m. $\approx$ 0.55 Hz
  $f_2 = 45$ r.p.m. = 0.75 Hz
  $f_3 = 78$ r.p.m. = 1.3 Hz

  מחברים את הפטיפון לשקע חשמלי על ידי כֶּבֶל מאריך עם מפסק, כך שאפשר להפעיל את הפטיפון בלי לנגוע בו במישרין. פרט זה חשוב כי מגע ישיר עם מפסק הפטיפון עלול לזעזע אותו בשעת ההפעלה, וכתוצאה מכך לשבש את תוצאות הניסוי.
- שלושה "מישורי שיגור" קטנים עשויים עץ, הלקוחים ממערכות "שבירת חלקיקים" (0880 ברשימת הציוד של תוכנית רחובות). זווית השיפוע של מישור כזה היא 20° בקירוב, ועל ידי חיבור גב אל גב, בעזרת סרטי נייר דביק, של שניים משלושת מישורי השיגור, יוצרים גם מישור משופע שזווית שיפועו קטנה יותר (בערך 5°).
- שלוש עד ארבע מבחנות רגילות עם פקקי גומי מתאימים, שלוש עד ארבע גולות זכוכית צבעונית, או גולות מתכת (כדורי מסבים), בעלות קוטר המאפשר להן להימצא בתוך המבחנות ולנוע בהן באופן חופשי, ומספר ריבועי קרטון קטנים היכולים לשמש "טריזי הרמה", המשנים את זוויות השיפוע של מישורי השיגור (המשמשים בניסוי כמישורים משופעים (ראה **תרשים 1**).

נוסף על כל אלה דרושים גם פרטי הציוד הבאים: (ראה **תרשים 2**):

- קטע של מסילה מעגלית שרדיוסה גדול מ-15 ס"מ,

תרשים 1

תרשים 2

תרשימים 1 ו-2: הציוד הדרוש לביצוע הניסויים

ושאורכה 20 ס"מ לפחות (או - לביצוע הניסוי החלופי של "מטוטלת קונית" - מוט דק שאורכו גדול במקצת מ-15 ס"מ, ואשר לקצהו אפשר לחבר חוט דק וחזק הנושא גולת מתכת קטנה).

- מכל מים שקוף ושטוח - כמו זה המצוי במערכת "מד תאוצה" (0710 ברשימת הציוד של תוכנית רחובות).
- "אוחזים" למסילה המעגלית, למטוטלת הקונית ולמכל המים השקוף, המאפשרים להציבם במרכז הדיסקה המסתובבת.
- כלי זכוכית עגול שקוטרו כ-20 ס"מ ושלוש רגליות המאפשרות להציבו על הדיסקה המסתובבת כשכמות מתאימה של מים צבועים מצויה בתוכו.
- "קליבר" למדידת העובי של ריבועי הקרטון, סרגל שאורכו 30 ס"מ, מספריים ושלושה עד ארבעה אטבי פלסטיק.
- חבילה של נייר דביק, חבילה של סלוטייפ שקוף, גיליונות אחדים של נייר מילימטרי רגיל ושל נייר מילימטרי שקוף.

השאלות, הניסויים, הדיונים התיאורטיים והמסקנות.

1. שלב ראשון: גולה על מסילה רדיאלית אופקית הסובבת במעגל.

א) כפתיחה לשלב הפעילויות הראשון מציגים לתלמידים שאלה פשוטה:

- על דיסקת פטיפון מצויה "מבחנה רדיאלית", כלומר מבחנה המונחת על הדיסקה לאורך אחד מרדיוסיה. המבחנה קבועה במקומה על הדיסקה באמצעות פיסות של נייר דביק שקוף (סלוטייפ), צידה הסגור קרוב לציר הסיבוב של הדיסקה, ובתוכה נמצאת גולה היכולה לנוע לאורכה באופן חופשי (**תרשים 3**). מפעילים את הפטיפון (כלומר גורמים לדיסקה להסתובב בתדירות מסוימת).

א. לפני תחילת הסיבוב

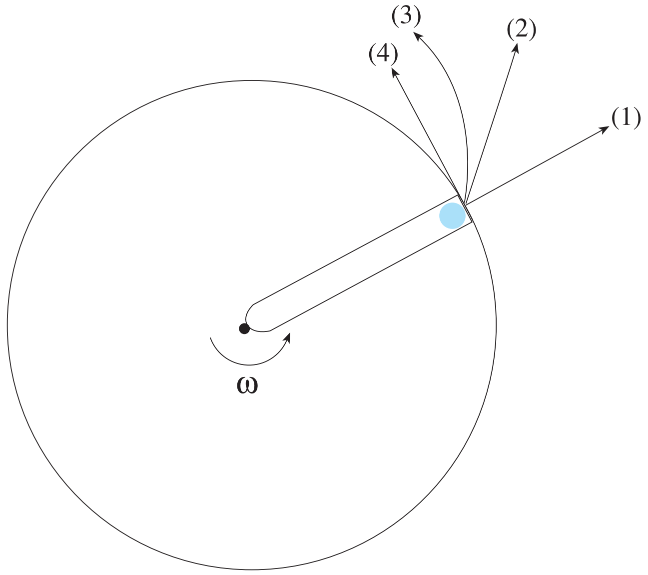
ב. בעת הסיבוב

תרשים 3: גולה בתוך מבחנה רדיאלית אופקית הסובבת במעגל

- מה יקרה לגולה כתוצאה מכך? נמק את תשובתך.** בתשובותיהם אמורים התלמידים לתאר את מסלול הגולה אחרי צאתה מפתח המבחנה – כפי שמסלול זה ייראה לצופה חיצוני המסתכל במערכת במבט מלמעלה.

** בכל פעם שנדון בתנועת גולה לאורך מסילה, נניח שמדובר בתנועת "החלקה ללא חיכוך", כלומר נתעלם מן התיקונים שיש להכניס לחישובים עקב העובדה שלמעשה הגולה מתגלגלת לאורך המסילה.

הערה: שאלה זו אפשר לנסח גם כשאלה רב בחירתית, כלומר אפשר לבקש את התלמידים לבחור מבין המסלולים המתוארים ב**תרשים 4** את המסלול אשר לדעתם קרוב ביותר למסלול האמיתי של הגולה, ולנמק את בחירתם.



תרשים 4: מהו המסלול של הגולה אחרי צאתה מפתח המבחנה?

ב) בודקים את נכונות תשובות התלמידים על ידי ביצוע הניסוי המתאים, ומסכמים את תוצאותיו.

ג) מסיימים שלב זה של הפעילויות בהצגת שלוש שאלות נוספות:

(i) מהו "המנגנון" הגורם לתנועת הגולה לאורך המבחנה?

(ii) מהי הזווית בין מסלול הגולה אחרי צאתה מפתח המבחנה ובין רדיוס הדיסקה שעליו מונחת המבחנה?

(iii) האם זווית זו תלויה בתדירות סיבובי דיסקת הפטיפון?

מומלץ לדון בתשובות לשאלות אלה רק אחרי השלמת יתר שלבי הפעילויות, ובמאמר זה גם אנחנו ננהג כך.

2. שלב שני: גולה על "מסילה רדיאלית משופעת" הסובבת במעגל.

המשימה בשלב זה היא חקירת תנועתה של גולה על מסילה רדיאלית **משופעת** הסובבת במעגל. כדי לבצע זאת מצמידים מבחנה סגורה בפקק, אשר גולה מצויה בתוכה, למישור משופע המחובר לדיסקה לאורך אחד מרדיוסיה (**תרשים 5**) ושואלים את התלמידים:

תרשים 5: גולה בתוך מבחנה סגורה בפקק; המבחנה מחוברת למישור משופע "רדיאלי"

- מה יקרה לגולה הנמצאת בתחתית המבחנה "המשופעת" כאשר דיסקת הפטיפון תתחיל להסתובב?

אחרי שהתלמידים מביעים את דעתם, מבצעים סדרה של ניסויים בהם מגדילים בהדרגה את מרחק תחתית המבחנה (ועל ידי כך גם את מרחק הגולה הנחה על תחתית המבחנה) ממרכז הדיסקה; תחילה עושים זאת כאשר דיסקת הפטיפון מסתובבת בתדירותה הנמוכה ($f_1 \approx 0.55\text{Hz}$), אחר כך כשהיא מסתובבת בתדירותה הבינונית ($f_2 = 0.75\text{ Hz}$), ולבסוף כשהיא מסתובבת בתדירותה הגבוהה ($f_3 = 1.3\text{Hz}$).

מסדרת הניסויים אנו למדים כי כאשר "מישור שיגור" (ראה פריט 2 ברשימת הציוד הדרוש לביצוע הניסויים) משמש כמסילה משופעת, והדיסקה מסתובבת בתדירותה הנמוכה או הבינונית – הגולה איננה "בורחת" מתחתית המבחנה גם כשמרחקה ממרכז הדיסקה הוא הגדול ביותר האפשרי (כלומר כאשר מרחק זה שווה בקירוב לאורך המסילה המשופעת,שבניסויים שלנו היה 13 ס"מ בערך). אולם כאשר הדיסקה מסתובבת בתדירותה הגבוהה ($f_3 = 1.3\text{Hz}$), ומרחק הגולה ממרכז הדיסקה גדול ממרחק מינימלי מסוים l_0, "בורחת" הגולה מתחתית המבחנה, נעה לעבר הפקק הסוגר אותה ונעצרת על ידו (**תרשים 6**).

תוצאות אלה של ניסויינו אמורות לעורר בתלמידים מספר שאלות:

א. מדוע, כשהגולה נמצאת על המישור המשופע שבו השתמשנו, היא אינה בורחת מתחתית המבחנה כשתדירות סיבובי הדיסקה היא התדירות הנמוכה או הבינונית?

ב. מדוע, כשהגולה נמצאת על המישור המשופע שבו השתמשנו, היא **כן** בורחת מתחתית המבחנה כשתדירות סיבובי הדיסקה היא התדירות הגבוהה, וכשמרחק הגולה מתחתית המסילה המשופעת גדול מהמרחק המינימלי l_0?

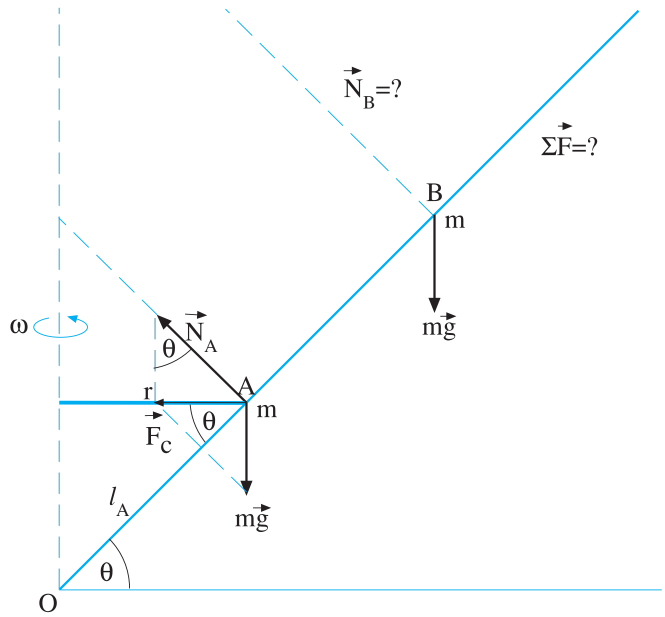
תרשים 6: גולה "שברחה" מתחתית המבחנה (בעת סיבובה) ונעצרה על ידי הפקק הסוגר את המבחנה

ג. במה תלוי מרחק מינימלי זה (כלומר מהם "מאפייני" המרחק המינימלי l_0)?

כדי לענות על שאלות אלה עלינו לעבור לדיון התיאורטי.

3. שלב שלישי: דיון תיאורטי במצבה של גולה הנמצאת על מסילה רדיאלית משופעת הסובבת במעגל

נניח כי גולה שמסתה m נמצאת בנקודה A על מסילה רדיאלית משופעת שזווית שיפועה θ, וכי היא סובבת עם המסילה בתדירות f סביב ציר אנכי העובר דרך קצה המסילה O (ראה **תרשים 7**).



תרשים 7: גולה על מסילה רדיאלית משופעת הסובבת במעגל - נקודת הראות של צופה אינרציאלי: A נקודת שיווי משקל דינמי רופף, B נקודה אחרת.

כדי שהגולה בנקודה A תהיה במצב של שיווי משקל דינמי (כלומר כדי שהיא לא תשנה את מקומה על פני המסילה בעת סיבוביה), צריכים להתקיים לגביה הקשרים הבאים:

$$\frac{m\omega^2 r_A}{mg} = \tan\theta$$

כאשר $r_A = l_A\cos\theta,\ \omega = 2\pi f$

לכן: $$l_A = \frac{g}{4\pi^2 f^2}\cdot\frac{\tan\theta}{\cos\theta}$$

l_A הוא מרחק הנקודה A מהמרכז O של המסילה.

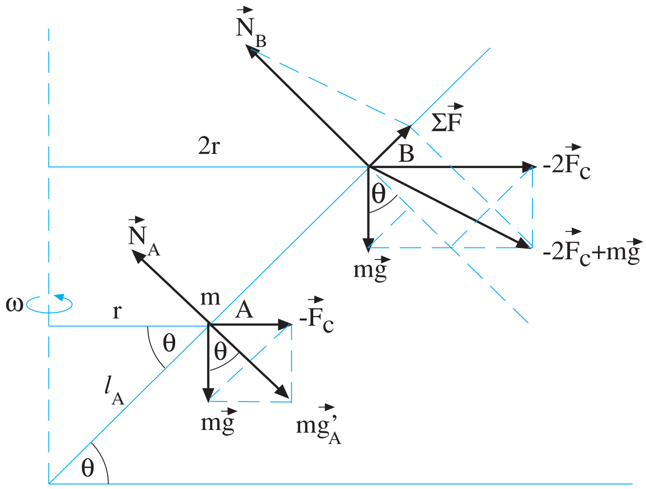
תלמידינו, הרגילים להתייחס לבעיות הקשורות בתנועה המעגלית מנקודת ראותו של צופה אינרציאלי, לא יתקשו להגיע לנוסחה זאת. הם יודעים כי על הגולה הנמצאת בשיווי משקל דינמי בנקודה A פועלים שני כוחות: משקלה $m\vec{g}$ והכוח הנורמלי $\vec{N}_A$ שהמסילה המשופעת מפעילה עליה בכיוון ניצב לעצמה. הכוח הצנטריפטלי $\vec{F}_c$ (שלגביו מתקיים $\vec{F}_c = -m\omega^2\vec{r}_A$) הוא השקול של שני כוחות אלה.

אבל מה יקרה לגולה כשהיא תימצא על המסילה המשופעת בנקודה אחרת, B, שאיננה נקודת שיווי המשקל הדינמי? (ראה **תרשים 7**).

צופה אינרציאלי בוודאי יידע שגם בנקודה זאת פועלים על הגולה שני כוחות בלבד: משקלה $m\vec{g}$ והכוח הנורמלי $\vec{N}_B$ שהמסילה מפעילה עליה, אבל הוא יתקשה לקבוע מהו השקול של שני הכוחות, ומהי העוצמה של הכוח הנורמלי $\vec{N}_B$.

בעיות אלה לא תתעוררנה בצופה לא אינרציאלי הנמצא על ציר הדיסקה והמסתובב יחד איתה. מנקודת ראותו של צופה זה, הגולה בנקודת שיווי המשקל הדינמי A נמצאת במצב מנוחה ביחס אליו, לכן שקול **שלושת** הכוחות הפועלים עליה (משקלה $m\vec{g}$, הכוח הנורמלי $\vec{N}_A$ והכוח הצנטריפוגלי $m\omega^2\vec{r}_A$) מתאפס (ראה **תרשים 8**). אם הגולה תימצא בנקודה B שאיננה נקודת שיווי המשקל, צופה לא אינרציאלי הסובב עם המסילה ירשום דיאגרמה וקטורית של הכוחות הפועלים עליה, ובעזרת דיאגרמה זאת, הוא ימצא בקלות יחסית את העוצמה של הכוח הנורמלי N_B, את עוצמתו וכיוונו של הכוח השקול (ראה **תרשים 8**), וגם ייווכח שהכוח השקול פועל על הגולה לאורך המסילה בכיוון שיבריח אותה מנקודת שיווי המשקל.

חשוב שהתלמידים יבינו שהכוח הנורמלי שהמסילה מפעילה על הגולה הוא "כוח תגובה" לכוח שהגולה מפעילה על

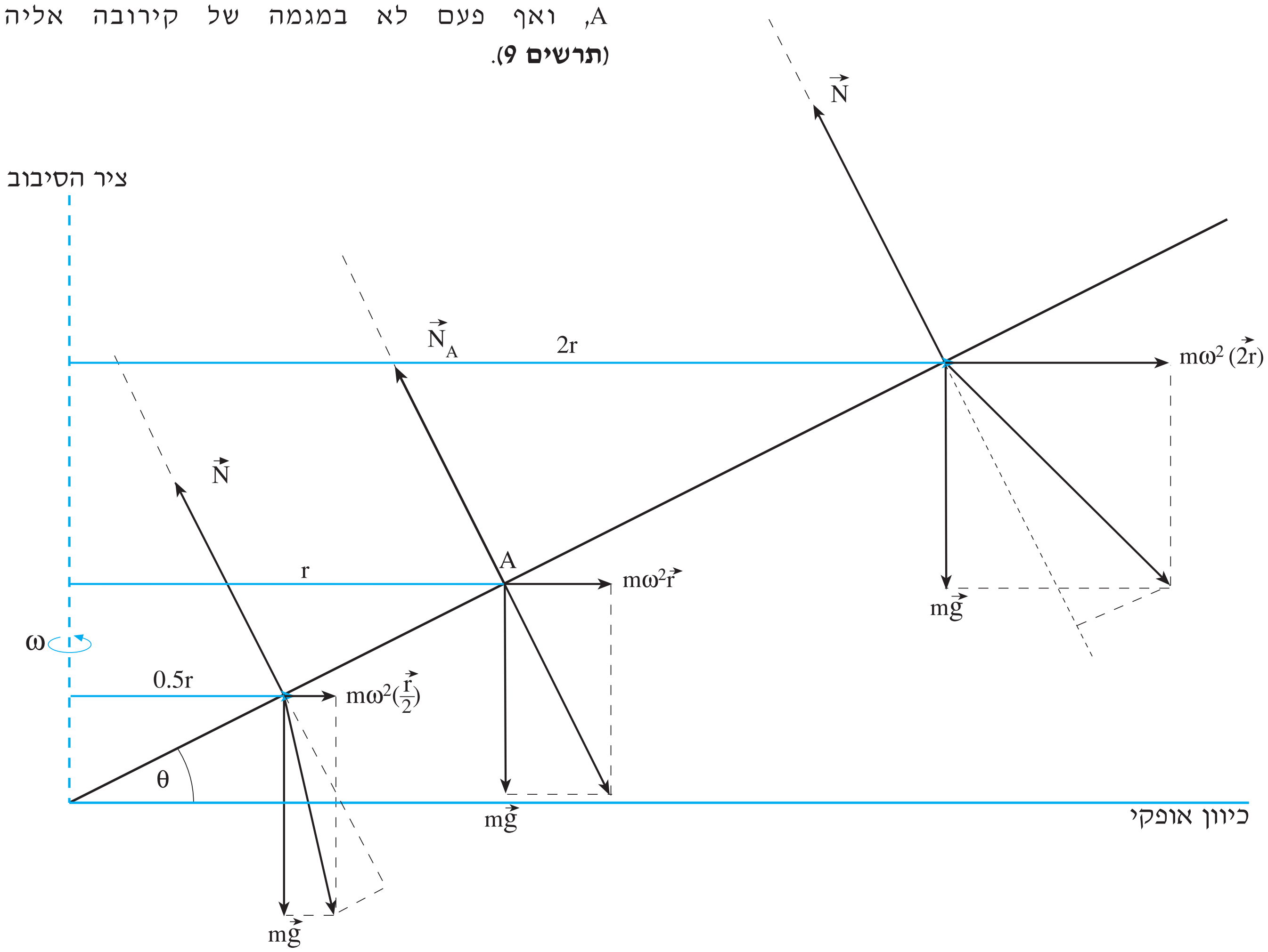


תרשים 8: גולה על מסילה רדיאלית משופעת הסובבת במעגל - דיאגרמה וקטורית של הכוחות הפועלים על הגולה מנקודת הראות של צופה לא אינרציאלי המסתובב עם המסילה

המסילה, כלומר זהו כוח השווה בעוצמתו והפוך בכיוונו לסכום הרכיבים הניצבים למסילה של משקל הגולה ושל הכוח הצנטריפוגלי הפועל עליה. מסתבר איפוא שנקודת שיווי המשקל הדינמי של הגולה על המסילה היא נקודה של **שיווי משקל רופף**, כי כל תזוזה – אפילו הקטנה ביותר - של הגולה משני עברי נקודה זאת מלווה בהגדלה, או בהקטנה, של הכוח הצנטריפוגלי הפועל עליה, בלי שייווצר לכך "פיצוי כוחני" מתאים. אפשרי ורצוי להסביר את מצב שיווי המשקל הדינמי הרופף של הגולה הנמצאת על המסילה המשופעת המסתובבת, גם בעזרת עקרון השקילות.[4] בנקודת שיווי המשקל A, ווקטור שדה "הכבידה השקולה" $\vec{g}$ הוא:

$$\vec{g}' = \vec{g} - (-\omega^2\vec{r}) = \vec{g} + \omega^2\vec{r}$$

g' ניצב למישור המשופע הסובב במעגל, אולם בכל נקודה אחרת, ווקטור זה איננו ניצב למישור המשופע, ורכיבו המקביל למישור זה מכוון תמיד במגמה של הרחקת הגולה מהנקודה A, ואף פעם לא במגמה של קירובו אליה (**תרשים 9**).



תרשים 9: וקטורי "שדה הכבידה השקולה" בנקודות שונות על פני מסילה משופעת הסובבת במעגל

עתה אפשר לחזור לשאלות שנשאלו בסוף השלב השני של הפעילויות ולענות עליהן: התשובה לשאלה ג' ניתנה למעשה כאשר פיתחנו את הנוסחה עבור l_A, מרחק נקודת שיווי המשקל הדינמי הרופף מהקצה התחתון של המסילה. כזכור:

$l_A = \frac{g}{4\pi^2 f^2} \frac{\tan\theta}{\cos\theta} \approx l_0$. מכיוון שזווית השיפוע של המסילה שבה השתמשנו היתה 20° בקירוב, ניתן לחשב בקלות מהו המרחק המינימלי l_0 לגבי כל אחת מתדירויות הסיבוב של הדיסקה.

בסדרה שניה של ניסויים השתמשנו במסילה משופעת שזווית שיפועה קטנה בהרבה. מסילה זאת, שנוצרה על ידי חיבור של שני "מישורי שיגור" - כמתואר בסעיף 2 של רשימת הציוד

תרשים 10: "מסילה רדיאלית משופעת" בעלת זווית שיפוע קטנה

ו**בתרשים 10** - היתה בעלת זווית שיפוע של 5° בלבד.

הטבלאות 1 ו-2 מסכמות את התוצאות הצפויות כאשר מבצעים את סדרות הניסויים באמצעות המסילות המשופעות שהיו ברשותנו. אם נזכור שהאורך של כל אחת מהמסילות המשופעות שלנו היה רק 13 ס"מ בקירוב, נקבל מייד גם את התשובות לשאלות 2א ו-2ב, ששאלנו בסוף השלב השני של פעילויותינו.

ביצוע הניסויים באמצעות המישור המשופע שזווית שיפועו קטנה מאפשר לבדוק ולאשר גם את נכונות החישובים והמסקנות לגבי תדירויות הסיבוב הנמוכה והבינונית של דיסקת הפטיפון. אם משתמשים בריבועי הקרטון הקטנים כ"טריז הרמה" למישור המשופע בעל זווית השיפוע הקטנה, אפשר לאשר את תלות המרחק המינימלי l_0 בזווית השיפוע θ של המישור המשופע, ובכך להשלים את התשובה לשאלה 2ג' ששאלנו.

	r.p.m	Hz	$\frac{g}{4\pi^2 f^2}$
f_1	33	0.55	0.82
f_2	45	0.75	0.44
f_3	78	1.3	0.15

טבלה 1

θ	20°	5°
$\frac{\tan\theta}{\cos\theta}$	0.39	0.088
l_1(cm)	32	7
l_2(cm)	17	4
l_3(cm)	6	1.5

טבלה 2

4. שלב רביעי: מצבה של בועת אוויר בתוך מים המצויים במבחנה רדיאלית משופעת הסובבת במעגל

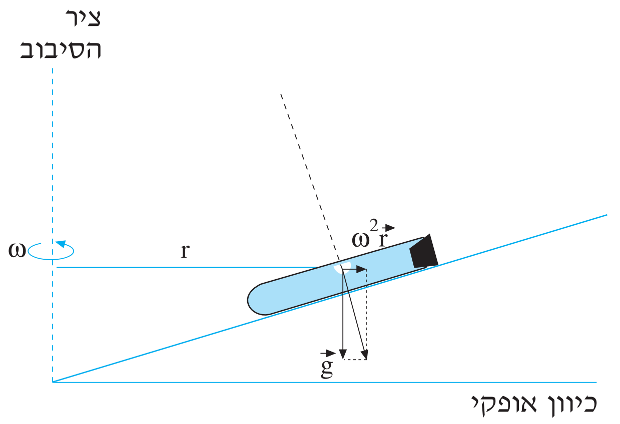
בשלבים השני והשלישי של פעילויותינו הראינו לתלמידים כי גולה על מסילה רדיאלית משופעת הסובבת במעגל יכולה להיות במצב של שיווי משקל דינמי **רופף** בנקודה אחת מסויימת על המסילה (סימנו נקודה זאת ב-A). עתה נראה כי אם נמיר את הגולה בבועת אוויר בתוך מים הממלאים מבחנה רדיאלית משופעת הסובבת במעגל, וכל שאר הנתונים ישתוו לאלה של מקרה תנועת הגולה, תהיה הבועה במצב של שיווי משקל דינמי **יציב** באותה נקודה.

אחרי שנצמיד, באמצעות סלוטייפ שקוף, מבחנה סגורה המכילה מים ובועת אוויר לאחד המישורים המשופעים שבהם השתמשנו בניסויי השלבים השני והשלישי של פעילויותינו (**תרשים 11**), נשאל את התלמידים:

א. באיזה מקום בתוך המבחנה תימצא בועת האוויר **לפני** שנפעיל את מנוע הפטיפון? מהו ההסבר לכך?

ב. היכן בתוך המים שבמבחנה תימצא בועת האוויר אם נפעיל את מנוע הפטיפון בתדירותו הנמוכה? בתדירותו הבינונית? בתדירותו הגבוהה? נמק את תשובותיך.

כדי לבדוק ולאשר את התשובות לשאלותינו, ביצענו כמה ניסויים פשוטים בהם השתמשנו במישור המשופע בעל הזווית הקטנה (5°), אליו הצמדנו את המבחנה עם המים ובועת האוויר.



א. לפני תחילת הסיבוב *ב. בזמן הסיבוב*

תרשים 11: "מבחנה רדיאלית משופעת" עם מים ובועת אוויר בתוך המבחנה

להלן תיאור קצר של תוצאות הניסויים:

א. בהעדר סיבוב, בועת האוויר נמצאת בפינה העליונה הרחוקה מציר הסיבוב של המבחנה - כמתואר ב**תרשים 11א**.

ב. כאשר מפעילים את הפטיפון בתדירותו הנמוכה ($f_1 \approx 0.55$ Hz), בועת האוויר מתחילה לנוע לאורך המבחנה המשופעת בכיוון אל ציר הסיבוב, ונעצרת כשהיא במרחק של 6 - 7 ס"מ ממנו.

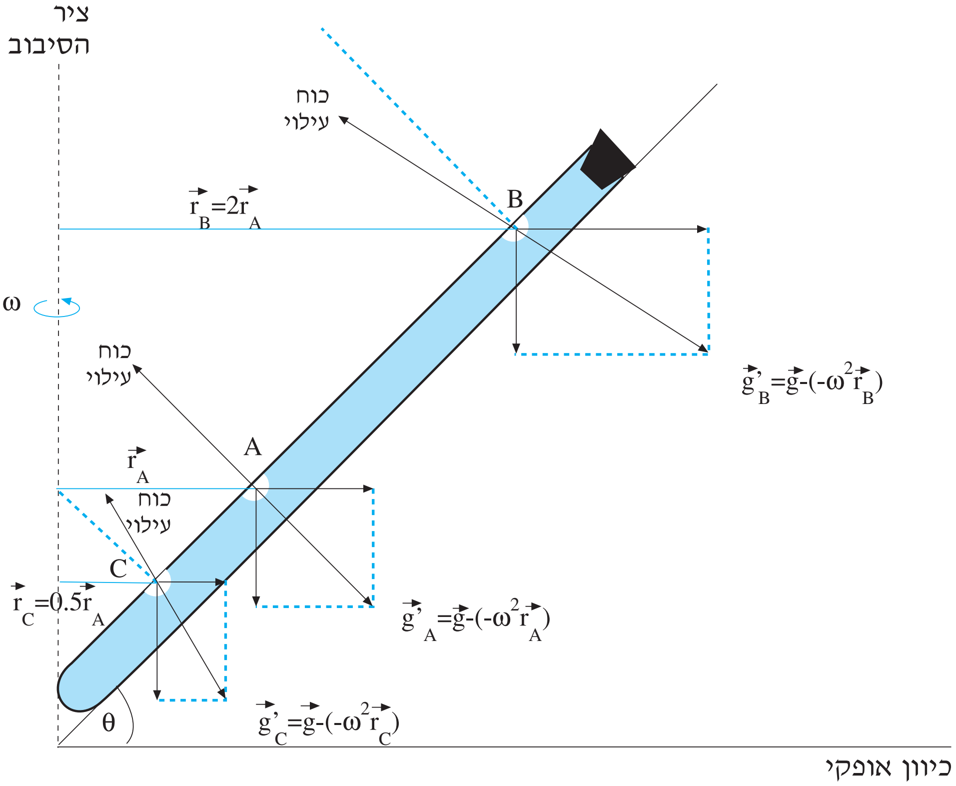
ג. כשמעלים את תדירות סיבובי הדיסקה והמבחנה המשופעת ל-$f_2 = 0.75$Hz, ממשיכה הבועה לנוע **לעבר** ציר הסיבוב ונעצרת כשהיא במרחק של 3-4 ס"מ ממנו.

ד. כשתדירות סיבובי הדיסקה והמבחנה מירבית (כלומר $f_3 = 1.3$Hz), בועת האוויר נעה במבחנה **לעבר** ציר הסיבוב ועוצרת כשהיא במרחק של קצת יותר מ-1 ס"מ ממנו.

תוצאות אלה מאשרות את טענתנו כי לבועת האוויר אשר במים שבמבחנה המשופעת הסובבת במעגל ישנה נקודה של שיווי משקל **יציב** המתלכדת עם נקודת שיווי המשקל **הרופף** של גולה על מסילה משופעת רדיאלית הסובבת במעגל באותה תדירות (בתנאי, כאמור, שזוויות השיפוע של המסילה המשופעת ושל המבחנה המשופעת תהיינה שוות). מגיעים למסקנה זאת אם משווים את הערכים המחושבים של l_1, l_2, l_3 הרשומים בטבלה 2, עם מרחקי בועת האוויר מציר הסיבוב של המבחנה שמצאנו בניסויינו. כדי להסביר בצורה פשוטה ומובנת עובדות אלה, נסתמך על עקרון השקילות. על כל בועת אוויר בתוך המים שבמבחנה פועל תמיד כוח עילוי שכיוונו מנוגד לשדה הכבידה, כלומר שכיוונו כלפי "מעלה". בניסויים שביצענו, המים ובועת האוויר נמצאים ב"שדה כבידה שקולה", כלומר בשדה כבידה שהוא הסכום הוקטורי של שדה הכבידה הארצי $\vec{g}$ ושל "שדה הכבידה האקוויולנטי" $-(-\omega^2\vec{r})=\omega^2\vec{r}$,[4] הנובע מן העובדה שבועת האוויר והמים שבתוך המבחנה מואצים עקב השתתפותם בתנועה המעגלית.

תרשים 12 מתאר שלוש בועות אוויר בתוך המים המצויים במבחנה "המשופעת" הסובבת בתדירות f סביב ציר אנכי העובר דרך הקצה התחתון של המבחנה. הנקודה A בתרשים היא נקודת שיווי המשקל של הבועות, והנקודות B ו-C נמצאות משני צידי נקודה זאת. בכל אחת משלוש הנקודות מסורטטים וקטורי "הכבידה השקולה" $\vec{g}' = \vec{g} - (-\omega^2\vec{r}) = \vec{g} + \omega^2\vec{r}$,[4] וכן הכיוונים של "כוחות העילוי" הפועלים על הבועות בכיוון נגדי לכיוון וקטורי הכבידה השקולה בנקודות אלה.

אף על פי שהתלמידים, כפי הנראה, לא יידעו לחשב את עוצמות הכוחות הפועלים על כל בועה בנקודת הימצאותה, הם בכל זאת יבינו מדוע על כל בועה הנמצאת בצד האחד של הנקודה A (כמו למשל הבועה בנקודה B), רכיב כוח העילוי המקביל לדופן המבחנה ידחוף את הבועה בכיוון אל הנקודה A, ובאופן דומה, גם על כל בועה הנמצאת בצד השני של הנקודה A (כמו על הבועה בנקודה C), רכיב כוח העילוי הפועל עליה בכיוון מקביל לדופן המבחנה ידחוף אותה גם כן לעבר הנקודה A. מכך ניתן כמובן להסיק כי הנקודה A היא **נקודת שיווי משקל יציב של הבועה**.

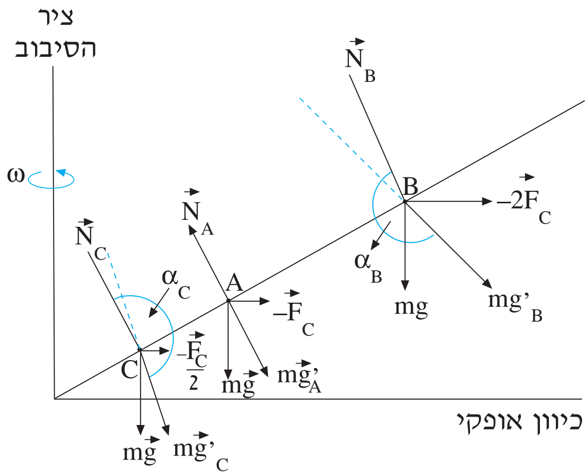


תרשים 12: וקטורי הכבידה השקולה וכיווני "כוחות העילוי" לגבי בועות אויר בתוך מים המצויים במבחנה רדיאלית משופעת הסובבת במעגל. A - נקודת שיווי משקל דינמי, B ו-C נקודות אחרות

5. שלב חמישי: גולה על מסילה מעגלית הסובבת סביב ציר אנכי בתדירות f.

א. נחזור עתה לגולה הנמצאת על מישור משופע "רדיאלי" הסובב בתדירות f סביב ציר אנכי העובר דרך קצהו התחתון, ונשאל את התלמידים האם קיימת לדעתם אפשרות להפוך את נקודת שיווי המשקל הדינמי **הרופף**, אותה סימנו באות A, לנקודה של שיווי משקל דינמי **יציב**? בשלבים השני והשלישי של פעילויותינו נוכחנו לדעת כי כאשר גולה נמצאת בנקודה כלשהי על המישור המשופע מימין או משמאל לנקודת שיווי המשקל ה**רופף** A, פועל על הגולה כוח **המרחיק** אותה מנקודת שיווי המשקל. כוח זה קיים כי קווי הפעולה של כוח הכבידה השקולה ושל הכוח הנורמלי $\vec{N}$ **אינם** נמצאים על ישר אחד, כלומר הזווית בין $m\vec{g}'$ לבין הכוח הנורמלי $\vec{N}$ **איננה** בת 180° (ראה **תרשים 13**).

ב**תרשים 13** רואים שצופה הנמצא בנקודת שיווי המשקל הרופף A רואה כי הזווית בין $m\vec{g}'$ ו- $\vec{N}$ עבור כל נקודה שמימינו או משמאלו גדולה מ-180°.



תרשים 13: גולה הנמצאת על מישור משופע רדיאלי הסובב במעגל: הזווית בין כיוון שדה הכבידה השקולה לכיוון הנורמלה למידרון כפי שנצפית על-ידי צופה הנמצא בנקודת שיווי המשקל הרופף A

אילו ניתן היה לשנות את שיפוע המדרון בכל נקודה מימין או משמאל לנקודה A כך שעבור צופה בנקודה A תיראינה הזוויות קטנות מ-180°, אזי הכוחות **המרחיקים** את הגולה

מנקודת שיווי המשקל A היו הופכים להיות כוחות **המקרבים** אל נקודה זאת כלומר הנקודה A היתה הופכת להיות נקודה של שיווי משקל **יציב**.

המשמעות של הכנסת שינויים מתאימים בשיפוע בכל אחת מנקודות המדרון היא הפיכת המסילה הרדיאלית המשופעת **הישרה** למסילה רדיאלית **עקומה** הנראית קעורה לכל מי שמסתכל עליה מנקודה שמעליה.

אחרי שמעלים טיעונים בלתי שגרתיים אלה בפני התלמידים, מן הראוי לשאול אותם איזו מסילה עקומה המסתובבת במעגל כדאי לדעתם לבדוק כדי לוודא שאומנם קיימת עליה נקודה של שיווי משקל דינמי יציב. סביר להניח שמרבית התלמידים יציעו **מסילה מעגלית.**

ב. **תרשים 14** הוא תצלום של מערכת שבה השתמשתי כדי לחקור את התנהגותה של גולה על קשת של מסילה מעגלית שהוצבה על דיסקת הפטיפון ואשר הסתובבה יחד איתה.

תרשים 14: גולה של קשת של מסילה מעגלית המוצבת לאורך קוטר של דיסקת פטיפון - לפני הפעלת הפטיפון

רדיוס הקשת המעגלית היה $R = 37\ cm$, אורכה היה $S = 68.5\ cm$, ומסיבות שתובהרנה בהמשך, קצותיה נחסמו בפיסות של נייר דביק.

להלן תוצאות הניסויים שביצעתי במערכת זו:

(i) כשתדירות סיבובי דיסקת הפטיפון היתה הנמוכה, או הבינונית, הגולה שהונחה על הנקודה הנמוכה ביותר של הקשת המעגלית לא זזה (כמעט) ממקומה (לכל היותר היא ביצעה תנודות קלות ואקראיות סביב נקודה זאת - ראה **תרשים 15**).

(ii) כשתדירות סיבובי דיסקת הפטיפון היתה $f_3 = 1.3Hz$, הגולה ״ברחה״ מהנקודה הנמוכה ביותר של הקשת המעגלית ועלתה עד שהגיעה לאחת מקצותיה, שם

תרשים 15: גולה על קשת של מסילה מעגלית רדיאלית הסובבת במעגל בתדירות הנמוכה; הגולה לא נעתקה ממקומה

נעצרה על ידי ״מחסום״ הנייר הדביק (**תרשים 16**). מתעוררת כמובן השאלה מהו ההסבר לעובדות אלה, וכדי לענות על כך נעבור לדיון התיאורטי.

ג. תלמידים אשר השתתפו בדיון התיאורטי שעסק בגולה הנמצאת על מסילה רדיאלית **משופעת ישרה** הסובבת במעגל לא יתקשו להשתתף ולהפיק תועלת **גם מדיון המתייחס לגולה הנמצאת על מסילה רדיאלית-מעגלית הסובבת במעגל.**

תרשים 16: גולה על קשת של מסילה מעגלית רדיאלית הסובבת במעגל בתדירות הגבוהה. הגולה ״ברחה״ ונעצרה על-ידי ״מחסום״ הנייר הדביק

מנקודת הראות של צופה מואץ הנמצא על ציר הסיבוב של המסילה והמסתובב יחד איתה, אפשר לרשום לגבי גולה זאת את הקשרים הבאים:

$$\frac{m\omega^2 R\sin\theta}{mg} = \tan\theta$$

כלומר: $$4\pi^2 f^2 R = \frac{g}{\cos\theta}$$

אבל: $$\cos\theta = \frac{g}{4\pi^2 f^2 R} < 1 \qquad (3)$$

לכן, לגבי רדיוס נתון R של המסילה המעגלית, הגולה תועתק ממקומה ותוכל לנוע במסלול מעגלי **אופקי** שרדיוסו הוא $r = R\sin\theta$, אם, ורק אם, התדירות f של המסילה המעגלית

תקיים את הקשר: $$f > \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 R}} \qquad (4)$$

במסילה שבה השתמשתי מתקבל התנאי $f > 0.082$ Hz, והוא מתקיים במערכת הניסויית שלנו רק עבוד תדירות הסיבוב f_3 הגבוהה. צופה אינרציאלי, המסתכל במערכת מבחוץ, יראה את הגולה עולה לאורך המסילה עד שהיא מגיעה לנקודת שיווי המשקל הדינמי שעליה, וממשיכה לאחר מכן לנוע במסלל מעגלי אופקי.

נחשב עתה את המיקום של נקודת שיווי המשקל הדינמי על מסילה מעגלית הסובבת במעגל בתדירות קבועה. המרחק S' המפריד בין נקודת שיווי המשקל (A) על המסילה ובין הנקודה הנמוכה ביותר עליה (O) כאשר רדיוס המסילה R והיא סובבת בתדירות f סביב ציר הניצב עליה, נתון על ידי הביטוי:

$$S' = \frac{2\pi R\theta}{360}$$ כאשר: $$\cos\theta = \frac{g}{4\pi^2 f^2 R}$$

רדיוס קשת המסילה המעגלית שבה השתמשתי היה 37 ס"מ. לגבי מסילה זאת: $\theta = 67^\circ$, 43 ס"מ = S'. זהו מרחק הגדול ממחצית האורך S של קשת המסילה המעגלית שהיתה ברשותי (כזכור 68.5 ס"מ =S), לכן נקודת שיווי המשקל של הגולה נמצאה מחוץ לקשת. זאת הסיבה שנאלצתי לחסום את קצות הקשת המעגלית כדי למנוע את "בריחת" הגולה ממנה. כדי להבטיח שבמערכת שלנו נקודת שיווי המשקל הדינמי תימצא על המסילה (ולא מחוצה לה) השתמשתי בתור מסילה בקשת המוצבת בצורה לא סימטרית לאורך קוטר דיסקת הפטיפון. ב**תרשים 17** רואים את התוצאה המוצלחת של הניסוי כאשר תדירות הסיבוב של המסילה היתה הגבוהה.

ד) עד כה עסקנו במערכת המורכבת ממסילה מעגלית המוצבת על דיסקה של פטיפון ומסתובבת יחד איתה, ומגולה החופשית לנוע על פני המסילה המעגלית. סביר להניח כי תלמידים רבים יגלו עד מהרה כי קיימת אנלוגיה כמעט מוחלטת בין מערכת זו ובין מערכת אחרת המוכרת להם היטב - המערכת הנקראת **מטוטלת קונית**.

כידוע, במסגרת לימודיהם הרגילים תלמידים עונים על שאלות רבות ופותרים בעיות שונות הקשורות במטוטלת הקונית, וחלק מהם מכיר, ואולי גם מבצע, את הניסוי הנקרא :"כוח צנטריפטלי" - ניסוי במטוטלת קונית שהיה פעם ניסוי מרכזי בתוכנית PSSC האמריקאית[5] וגם ב"תוכנית רחובות" הישראלית[6] (ראה **תרשים 18**).

תרשים 18: הניסוי "המפורסם" של PSSC

אפשר, ולדעתי רצוי, לנצל גם את הדיסקה המסתובבת של פטיפון כדי להדגים מטוטלת קונית וכמה מתכונותיה. להלן אתאר בקצרה כיצד עשיתי זאת:

1) כדי לבנות את המטוטלת הקונית השתמשתי במוט של אנטנה "טלסקופית" שהורדתי מרדיו טרנסיסטור ישן. לקצה העליון החלול של מוט האנטנה הכנסתי והצמדתי - באמצעות גפרור ומעט דבק - חוט דק וחזק שנשא גולת

תרשים 17: תצלום של גולה הנמצאת בשיווי משקל דינמי יציב על מסילה מעגלית רדיאלית הסובבת במעגל

תרשים 19: "מטוטלת קונית" על דיסקת פטיפון, לפני הפעלת הפטיפון

מתכת קטנה. הקצה התחתון של מוט האנטנה חוזק והוצב בצורה אנכית במרכז דיסקת הפטיפון (**תרשים 19**). בביצוע הניסויים יכולתי לשנות שני פרמטרים:

(i) את תדירות הסיבובים f, שיכולה להיות כל אחת משלוש תדירויות הפטיפון.

(ii) את אורך המוט הטלסקופי ואת האורך l של החוט היוצא מקצהו העליון (אורך המתאים - בניסוי האנלוגי של מסילה מעגלית - לרדיוס המסילה R).

2) תוצאות הניסויים שביצעתי תאמו את מה שגילינו בניסויינו הקודמים עם המסילה המעגלית והגולה שעליה:

(i) בתדירויות הנמוכה והבינונית של סיבובי הדיסקה והמוט, אורך המוט, ולכן גם האורך של חוט המטוטלת, לא הספיק כדי ל"עורר" את המטוטלת הקונית, ופרט לתנודות קטנות ולא משמעותיות, נשארה הגולה בקצה החוט צמודה למוט ולא התרוממה.

(ii). כשתדירות הסיבובים היתה הגבוהה וכאשר גובה המוט הטלסקופי ואורך החוט היו גדולים מ-15 ס"מ בקירוב - הגולה התרוממה ונוצרה בבירור "מטוטלת קונית" - במלוא משמעות המילים (ראה **תרשים 20**).

3) אחרי שתוצאות אלה מתקבלות בניסויים - אפשר לבקש את התלמידים להסבירן באופן תיאורטי. כמו כן אפשר לבקש לציין את הדמיון ואת ההבדלים (אם קיימים כאלה) בין ניסויי המסילה המעגלית המסתובבת ובין ניסויי המטוטלת הקונית.

ה. אם מבצעים את הפעילויות המתוארות במאמר זה בכיתה טובה במיוחד, ואם הזמן העומד לרשות המורה מאפשר זאת, הייתי מציע לסיים את העיסוק במסילה המעגלית המסתובבת ובמטוטלת הקונית בהתיחסות לשתי בעיות תיאורטיות מעניינות:

(i) ראינו שאת ההתרוממות של גולה בתוך מסילה מעגלית מסתובבת או של גולה התלויה בקצה חוט של מטוטלת קונית, אפשר לתרץ בנימוק מתימטי המוצא את ביטויו באי-השוויון:

$$\cos\theta = \frac{g}{4\pi^2 f^2 R} < 1$$

אולם מהו **ההסבר הפיזיקלי** לעובדה זאת? במילים אחרות - מהו המנגנון הפיזיקלי המונע מהגולות "להתרומם"?

(ii) מהניסויים למדנו שמצב שיווי המשקל הדינמי של גולה החופשית לנוע על מסילה מעגלית מסתובבת, או של גולה, שהיא חלק ממטוטלת קונית, הוא מצב של **שיווי משקל דינמי יציב**. מהי **ההוכחה התיארטית** לכך?

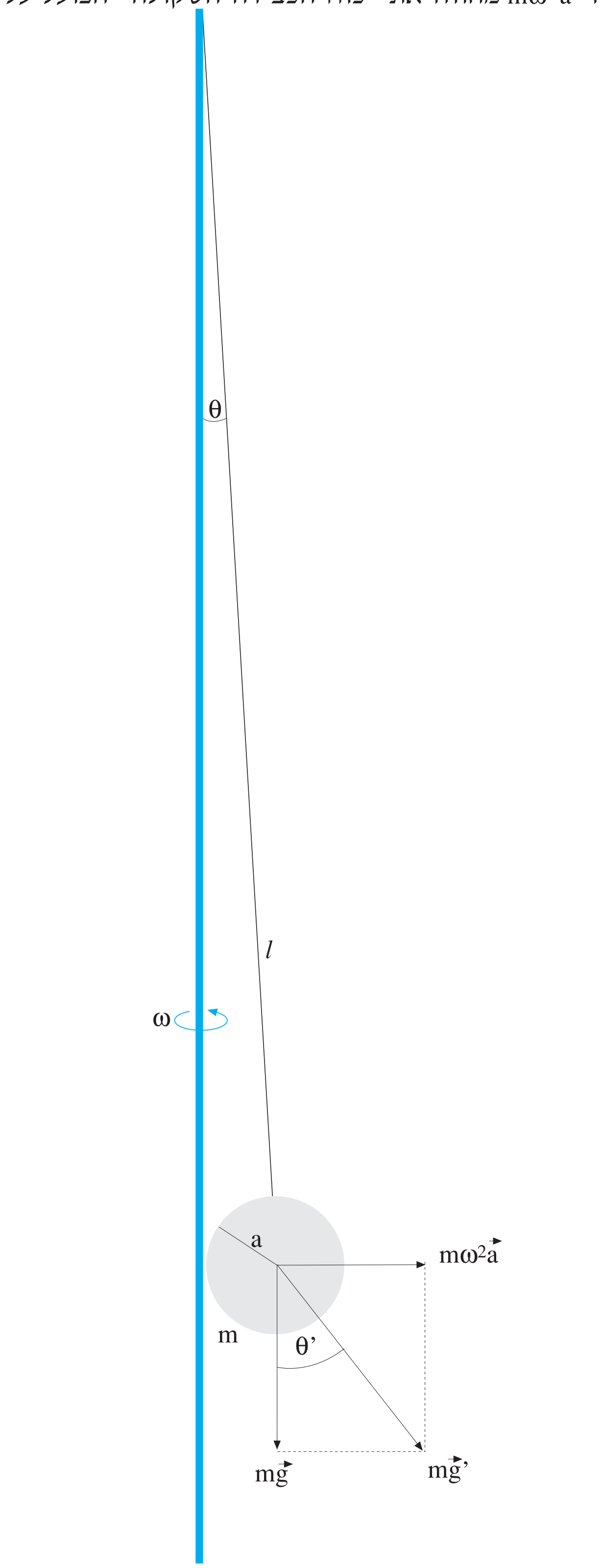
התלמידים יגיעו לפתרון שתי הבעיות אם הם יתבססו על דיאגרמות וקטוריות של הכוחות הפועלים על הגולות (כולל הכוחות המערכתיים) ועל עקרון השקילות.

להלן ניסוח אפשרי של התשובות:

(i') נתייחס למטוטלת קונית המורכבת מגולה קטנה שמסתה m ורדיוסה a, התלויה בקצהו של חוט דק שאורכו l ומסתו זניחה. אם המטוטלת הקונית מתחילה להסתובב בתדירות f, מנקודת ראותו של צופה המסתובב עם המטוטלת - על הגולה מתחיל לפעול כוח צנטריפוגלי $m\omega^2\vec{a}$, בנוסף לשני הכוחות האחרים הפועלים עליה: משקלה $m\vec{g}$ ומתיחות החוט $\vec{T}$.

תרשים 20: "מטוטלת קונית פעולה" על דיסקת פטיפון הסובבת בתדירותה הגבוהה

כזכור, על פי עקרון השקילות, שקול שני הכוחות $m\vec{g}$ ו- $m\omega^2\vec{a}$ מהווה את "כוח הכבידה השקולה" הפועל על



תרשים 21: כאשר θ' > θ, הגולה יכולה להתרומם

הגולה, וכל עוד הזווית θ' שבין השקול ובין האנך קטנה מהזווית θ שבין החוט הנושא את הגולה ובין מוט המטוטלת הקונית, שקול **כל** הכוחות הפועלים על הגולה יהיה מכוון **אל** מוט המטוטלת ולכן הגולה לא תוכל להתרומם.

התנאי לכך שהגולה תתחיל להתרומם הוא איפוא:

$\tan\theta' > \tan\theta$ (תרשים 21)

כאשר $\tan\theta' = \frac{\omega^2 a}{g}$ וכן $\tan\theta \approx \sin\theta = \frac{a}{l}$, זאת אומרת

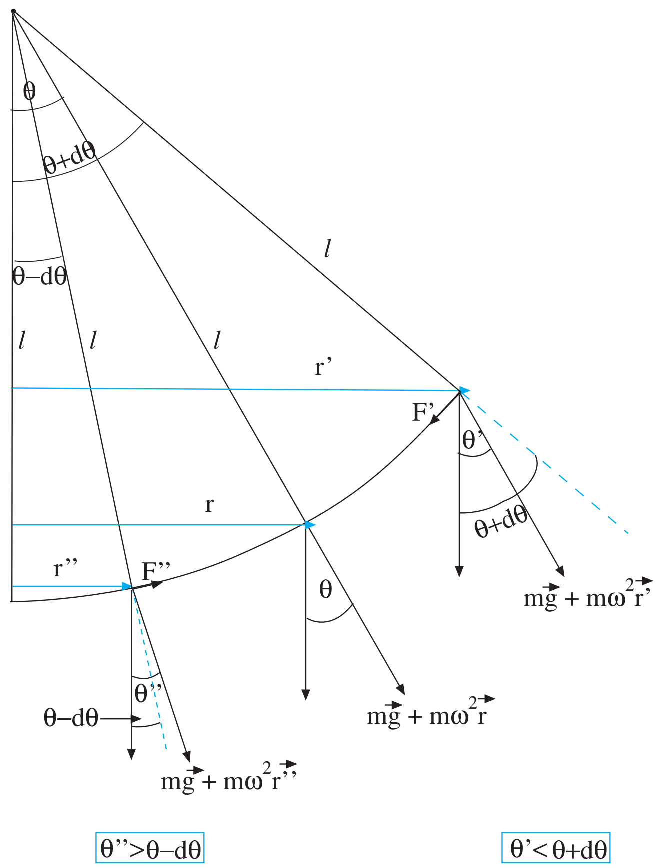
$$\frac{\omega^2 a}{g} > \frac{a}{l}$$

או:

$$\frac{g}{\omega^2 l} < 1$$

וזהו כמובן גם התנאי שהגענו אליו מהנימוק המתמטי של $\cos\theta < 1$.

(ii') בתשובתנו נתייחס למטוטלת קונית ונתבסס על **תרשימים 21 ו-22.**



תרשים 22: ביסוס הטענה כי במטוטלת קונית שיווי המשקל הדינמי יציב

אם מצב שיווי המשקל נוצר בזווית θ, אזי $\frac{m\omega^2 r}{mg} = \tan\theta$

כאשר $r = l\sin\theta$, מכך נובע כי: $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l}$.

כדי ששיווי המשקל הדינמי יהיה יציב צריכים להראות כי: $\theta' < \theta + d\theta$, וכן כי: $\theta'' > \theta - d\theta$ (ראה **תרשים 22**).

ההוכחה:

$$\frac{m\omega^2 r'}{mg} = \tan\theta' = \frac{\omega^2 l \sin(\theta + d\theta)}{g}$$

יוצא מזה:
$$\frac{g}{\omega^2 l} = \frac{\sin(\theta + d\theta)}{\tan\theta'} = \cos\theta$$

לכן:
$$\tan\theta' = \frac{\sin(\theta + d\theta)}{\cos\theta} < \frac{\sin(\theta + d\theta)}{\cos(\theta + d\theta)} = \tan(\theta + d\theta)$$

כי הפונקציה $\cos\theta$ בתחום $0^\circ < \theta < 90^\circ$ היא פונקציה **מונוטונית יורדת.**

המסקנה מכך היא כי: $\theta' < \theta + d\theta$, מכיוון שהפונקציה $\tan\theta$ היא פונקציה **מונוטונית עולה.**

באופן דומה קל להראות כי: $\theta'' > \theta - d\theta$.

6. שלב שישי: מסילה הסובבת במעגל אופקי בתדירות קבועה שכל נקודה עליה היא נקודת שיווי משקל דינמי

נוכחנו לדעת שעל מסילה מעגלית הסובבת במעגל בתדירות קבועה ישנה נקודת שיווי משקל דינמי יציב שמקומה על המסילה תלוי בתדירות (זאת בתנאי שתדירות הסיבובים גדולה מתדירות סף מסויימת).

נפתח את השלב השישי של פעילויותינו בשתי שאלות המופנות לתלמידים:

א. האם ניתן למצוא מסילה הסובבת במעגל בתדירות קבועה שגולה החופשית לנוע עליה תימצא בשיווי משקל דינמי **בכל נקודה** על המסילה? מה מאפיין אותה?

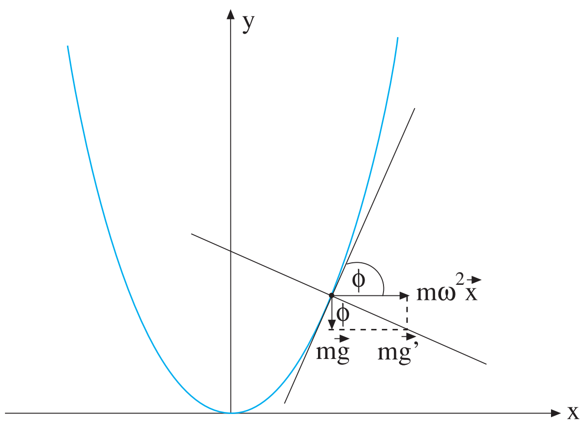
ב. מהי משוואת הקו העקום המייצג את המסילה, אם נתונה תדירות סיבובי f ?

הפעם לא נתחיל בביצוע ניסויים שיעזרו לנו לענות על שאלותינו, אלא נסתמך על שיקולים תיאורטיים שיסייעו לנו להגיע לתשובות המבוקשות.

להלן מובאות התשובות לשאלות אלה:

א'. משלבי פעילות קודמים אנחנו יודעים שכדי שגולה תימצא בשיווי משקל דינמי בנקודה מסויימת על מסילה, קו הפעולה של כוח "הכבידה השקולה" הפועל על הגולה צריך להתלכד עם קו הפעולה של הכוח הנורמלי שהמסילה מפעילה עליה. **המסילה שבה אנו דנים מאופיינת איפוא בכך שוקטור שדה הכבידה השקולה ניצב למשיק למסילה בכל אחת מנקודותיה.**

ב'. נניח שהקו העקום המתאר את המסילה מיוצג על ידי הפונקציה $y = kx^n$. תלמידים הלומדים פיזיקה ברמה של 5 יחידות לימוד לומדים מתימטיקה ברמה של 5 יחידות לימוד או לפחות 4 יחידות לימוד, לכן הם אמורים לדעת שנגזרת הפונקציה המייצגת את הקו העקום מתארת את שיפועי המשיק לקו העקום בכל אחת מנקודותיו. כלומר: $y' = nkx^{n-1} = \tan\phi$ כאשר ϕ היא הזווית בין המשיק לקו העקום ובין ציר x.



תרשים 23

אולם קיים גם הקשר: $\tan\phi = \frac{\omega^2 x}{g}$ (ראה **תרשים 23**).

לכן: $nkx^{n-1} = \frac{\omega^2}{g}x$ או: $nkx^{n-2} = \frac{\omega^2}{g}$

מכיוון שקיים מצב של שיווי משקל דינמי **בכל נקודות המסילה** משמעותו אי תלות ב-x חייב להתקיים הקשר n =2. לפיכך הפונקציה המייצגת את המסילה המבוקשת היא הפרבולה: $y = kx^2$ כאשר:

$$k = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g} \qquad (5)$$

מכיוון שלא קל להשיג או להכין מסילה פרבולית המיוצגת על ידי הנוסחה $y = kx^2$ כאשר k הוא מקדם נתון, השתמשתי במכל מים שקוף ושטוח כדי לבדוק **בניסוי** את מסקנותינו התיאורטיות.

תחילה חישבתי את ערכו של המקדם k עבור התדירות הגבוהה של הפטיפון ($f = 1.3Hz$) וקיבלתי $k = 3.4m^{-1}$. אחר כך סירטטתי על נייר מילימטרי גרף המתאר את הפונקציה $y = 3.4x^2$. הפכתי את הגרף לשקף והדבקתי אותו על אחת הדפנות של אותו מכל. אחרי שהכנסתי לתוכו כמות מתאימה של מים צבועים הצבתי אותו לאורך קוטר של דיסקת הפטיפון (**תרשים 24**). כאשר הפעלתי את הפטיפון כך שהדיסקה ומכל המים המוצב עליה הסתובבו בתדירות הגבוהה, קיבלו פני המים במכל את צורת הפרבולה המסורטטת על השקף (**תרשים 25**). ניתן לראות בכך אישור ניסויי לשיקולים שהעלינו ולחישובים שביצענו, ומן הראוי לסכם את הנושא בשיחה מתאימה בכיתה. בין היתר כדאי, לדעתי, להעלות גם את האפשרות של היווצרות משטח פרבולואידי על פני נוזל המצוי בקערה עגולה מסתובבת, למשל כשהיא ניצבת על דיסקת פטיפון, ולדון בתכונות ובשימושים אפשריים של משטח כזה.

תרשים 24: המים הצבועים במכל "השטוח" - לפני הפעלת הפטיפון

תרשים 25: המים הצבועים במכל "השטוח", המסתובב יחד עם דיסקת הפטיפון, בתדירות הגבוהה

7. שלב שביעי: שוב - גולה על מסילה רדיאלית אופקית הסובבת במעגל

לסגירת "מעגל הפעילויות" נחזור לשאלות ששאלנו בסוף השלב הראשון. אני מקווה ומצפה שאחרי שהתלמידים ייחשפו לחלק, אם לא לכל, הפעילויות שתיארתי, הם יהיו מסוגלים להשיב תשובות מלאות, או לפחות תשובות חלקיות, על שאלות אלה.

א. קל להסביר את המנגנון הגורם לתנועת הגולה לאורך המבחנה מנקודת ראותו של צופה לא אינרציאלי המסתובב יחד עם הדיסקה והמבחנה. צופה זה מייחס את התנועה המואצת של הגולה לכוח צנטריפוגלי F_c הפועל עליה, כוח המכוון לאורך המבחנה (כלומר לאורך רדיוס הדיסקה) אשר עוצמתו פרופורציונית למרחק הגולה מציר הסיבוב:

$$F_c(x) = m\omega^2 x$$

כמובן, את "בריחת" הגולה לאורך המבחנה הסובבת במעגל אפשר להבין גם אם מסתמכים על עקרון השקילות.

ב. להלכה, הזווית בין מסלול הגולה ברגע צאתה מפתח המבחנה ובין רדיוס הדיסקה שלאורכו הונחה המבחנה תהיה $45°$. ההסבר לכך פשוט: הכוח הצנטריפוגלי $F_c(x) = m\omega^2 x$ הפועל עליה כל עוד היא נמצאת בתוך המבחנה, "עובד עליה" עבודה המתבטאת בשינוי האנרגיה הקינטית הרדיאלית שלה:

$$\int_0^r m\omega^2 x dx = \frac{1}{2} m v_r^2$$

(v_r - היא המהירות הרדיאלית של הגולה). לפיכך, ברגע צאתה מהמבחנה, מהירותה הרדיאלית אמורה להיות: $v_r = \omega r$ וזוהי כמובן גם מהירותה המשיקית v_t ברגע צאתה מהמבחנה: $v_t = v_r = \omega r$ ועל כן הזווית המבוקשת היא $45°$. למעשה המצב מסובך יותר, כי הגולה מתחילה את תנועתה בתוך המבחנה ברגע הפעלת הפטיפון, והמהירות הזוויתית של הדיסקה מגיעה לערכה הקבוע ω רק כעבור זמן מה. כמו כן, נקודת ההתחלה של תנועת הגולה איננה במרחק $x = 0$ מציר הסיבוב, אלא במרחק $x = a$ ממנו, כאשר a הוא רדיוס הגולה. כתוצאה משתי עובדות אלה, המהירות הרדיאלית v_r של הגולה תהיה קטנה ממהירותה המשיקית v_t, והזווית θ בין מהירות הגולה ברגע צאתה מהמבחנה ובין הכיוון הרדיאלי שלאורכו מונחת המבחנה תהיה גדולה מ-$45°$. אנחנו כמובן נתעלם מ"דקויות" אלה.

ג. ברור שאם מתעלמים מה"דקויות" הנ"ל - הזווית אינה תלויה בתדירות סיבובי דיסקת הפטיפון.

סיכום

- אני מאמין שהפעילויות המתוארות במאמר זה תעזורנה לתלמידים להתגבר על קשיים מסויימים שיש להם בהבנת נושאים הקשורים בתנועה המעגלית.
- ההסבר שניתן למתרחש במערכת מסתובבת מנקודת ראותו של **צופה לא אינרציאלי** המסתובב עם המערכת, והשימוש מדי פעם - לצורך ההסבר - בעקרון השקילות, יכול להקל באופן משמעותי את תהליך פתרון הבעיות.
- שילוב של הצגת שאלות עם חיפוש תשובות המבוססות על ניסויים פשוטים עם דיון תיאורטי ברמה נאותה מהווה לדעתי תמריץ המגדיל במידה רבה את התעניינות התלמידים ומגביר את המוטיבציה שלהם לעסוק בנושא בו אנו דנים ולהתעמק בו.
- בספר על הוראת הפיזיקה של א. ארונס[7] מדגיש המחבר כי לדעתו, שלב חשוב ביותר בהתפתחותו האינטלקטואלית של תלמיד אשר ימשיך אולי ללמוד פיזיקה ברמה על-תיכונית, הוא פיתוח יכולתו להגיע ל״פירוש פיזיקלי״ משמעותי של פתרון בעייה שתוצג לפניו. שתיים מבין הבעיות המובאות בספרו כדוגמה הן:

  בעייה הדנה במטוטלת הקונית, ובעייה המתייחסת למאפייני מסילה עקומה הסובבת במעגל אשר כל אחת מנקודותיה היא נקודת שיווי משקל דינמי. בחלקים מסויימים של השלבים החמישי והשישי של הפעילויות שתיארתי, אימצתי גישה זאת של פרופסור ארונס.
- הפעלת עקרון השקילות לגבי גופים הנמצאים על דיסקת פטיפון מסתובבת מדגימה ״עולם״ שבו ״שדה הכבידה השקולה״ משתנה מנקודה לנקודה בעוצמתו, או בכיוונו, או בשניהם גם יחד. זוהי לדעתי השלמה מעניינת וחשובה ל״עולם״ האחר שעקרון השקילות חושף בפנינו ובפני תלמידינו - כוונתי ל״עולם״ של ״שדה כבידה״ מתאפס, כלומר לתופעת ״חוסר המשקל״ אשר בתקופתנו, תקופת הלוויינים, כה מרבים לעסוק בה.
- אני מקווה שהניסויים הפשוטים והמאלפים המתבצעים באמצעות הדיסקה המסתובבת של הפטיפון יבליטו גם את הפן החוויתי של הנושא. הם רומזים על אפשרויות נוספות לביצוע ניסויים מעניינים בעזרת פלטפורמות מסתובבות אחרות (כמו גלגל האופניים - פריט 0290 ברשימת הציוד של ״תוכנית רחובות״, ואולי ״מתקן סיבובי״ מיוחד שיוקם אי פעם באחד מפארקי המדע במדינתנו).

אחרון אחרון חביב, דומני שאחת המסקנות החשובות היא - אל תוציא ישן מפני חדש. כדאי להחזיר במהרה מערימת הגרוטאות את המכשיר שהעניק לנו בעבר הלא כל כך רחוק רגעי חדווה ואושר רבים - הלא הוא הפטיפון - ולהעמידו לאחר כבוד במקום שבו יוכל להמשיך להביא תועלת - במעבדה לפיזיקה בבית הספר התיכון!

מראי מקום

1. גולן ז, התנועה המעגלית והכוחות הפועלים בה, גליונות **1**(1), עמ' 24 - 17, 1971.
2. כהן, ר., כוח צנטריפטלי - מלה אסורה, גליונות, **1**(3), עמ' 20, 1972.
3. מכניקה, קבוצת רחובות, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות, 1970.
4. גלילי, י., רוזן, ע., זיק, י., שילוב עקרון השקילות בהוראת המכניקה הקלסית, תהודה, **20**(1), עמ' 25 - 13, 1999.
5. הבר-שיים, א., דודג׳, קרוס, פי.ס.ס.סי., הוצאת יחדיו, 1958.
6. מכניקה, קבוצת רחובות, פרק ד׳, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות, 1971.
7. Arons, A., Teaching Introductory Physics, pp. 340-342, John Wiley, 1971.

תהודה