

## ניתוח איכותי של תנועת גופים קשורים על מישור משופע

ולדימיר דזקובסקי, יבגניה גבאי, בית-ספר תיכון עירוני למדעים ולתרבות ומכללת "שבח-מופת", תל-אביב-יפו

**תקציר:** במאמר זה מובא ניתוח איכותי של תנועת שני גופים הקשורים ביניהם שאחד מהם נמצא על מישור משופע. חקירת תנועת הגופים נעשתה בעזרת דיאגרמה דו-ממדית וכוללת את כל מוגוון תנועות ההחלקה האפשריות לאורך מישור משופע, כולל המקרים הפרטיים של מישור אופקי ומכונת אטווד.

**מילות מפתח:** מתודיקה, ניתוח איכותי, מישור משופע, דיאגרמה דו-ממדית

### מבוא

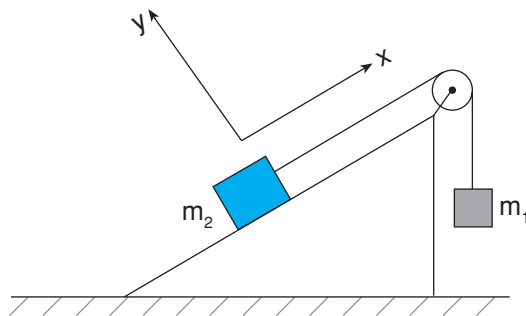
אחד הראשונים שהבין את המשמעות של ניתוח איכותי היה המתמטיקאי הצרפתי אַנְרִי פואנקרה (Henri Poincare) אשר גילה עניין בבעיה הבאה: כיצד משפיעה האינטראקציה בין כוכבי הלכת של מערכת השמש על תנועתם. התברר שהשאלה שהציג לעצמו מאוד מורכבת. אז שינה פואנקרה את ניסוח השאלה. במקום לפרט את תנועתו של כל כוכב לכת, שאל את השאלה הבאה: "האם בסופו של דבר יפלו כוכבי הלכת אל השמש או לא?" התברר שאפילו שאלה זאת דורשת אנליזה מעמיקה.

בניתוח איכותי של בעיה נוח לעתים קרובות להשתמש בדיאגרמות דו-ממדיות. כדוגמה אפשר להביא דיאגרמות מופע (פאזה) של מצב הצבירה של חומר. דיאגרמה כזאת מתוארת במישור של שני פרמטרים: לחץ וטמפרטורה. בדיאגרמה אפשר לראות תחומים של מצבי הצבירה השונים: מוצק, נוזל וגז של חומר כלשהו. דוגמה נוספת היא מתחום האקוסטיקה. שני הפרמטרים בדיאגרמה הדו-ממדית הזאת הם עוצמת הקול ותדירותו. בדיאגרמה זאת אפשר לראות תחומי מוסיקה, דיבור, רעש, וגם תחומי רעשים קיצוניים (גבוליים עד כאב ובלתי נשמעים).

במאמר זה נטפל באחת הבעיות הקלאסיות של המכניקה בעזרת ניתוח איכותי.

### ניסוח השאלה

הבה ננתח את המצב הבא: בקדקוד מישור משופע, שאינו חלק, הורכבה גלגלת "חסרת מסה". שני גופים (1, 2) בעלי מסות  $m_1$  ו- $m_2$ , בהתאמה קשורים לחוט העובר מעל לגלגלת (ראה **תרשים 1**).



תרשים 1

זווית הנטייה של המישור היא  $\alpha$ . נניח שבהתחלה מערכת שני הגופים מוחזקת על ידי כוחות חיצוניים במצב מנוחה ביחס למישור המשופע. (**תרשים 1**). לו היינו פותרים בעיה "סטנדרטית" בפיסיקה, השאלה שהייתה עולה היא: "מה תהיה התאוצה של מערכת הגופים אחרי שחרורם, אם ידועים הפרמטרים  $m_1, m_2, \alpha, \mu, \nu$  - מקדם החיכוך בין גוף 2 והמישור המשופע?"

אפשר גם לנתח את תנועת הגופים באופן כללי. לשם כך יש לנסח את השאלה בדרך אחרת: "באילו תנועות, השונות איכותית, יכול גוף 2 להחליק לאורך המישור המשופע?" לא קשה לנחש, שקיימות חמש אפשרויות:

1. תנועה מואצת במעלה המדרון
2. תנועה קצובה במעלה המדרון
3. מצב מנוחה
4. תנועה מואצת במורד המדרון
5. תנועה קצובה במורד המדרון

ברור שסוג התנועה תלוי ביחס בין הפרמטרים המאפיינים את התהליך. נציין כי קיימים אינסוף ערכים של פרמטרים

שיטה זו שקולה לפתרון גרפי של אי שוויונים בשני נעלמים. לצורך זה נכתוב במקום הביטויים (1) ו-(2) את אי השוויונים:

$$(3) \quad z - (\sin\alpha + \mu\cos\alpha) > 0$$

$$(4) \quad z - (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) < 0$$

$$z = m_1/m_2 \text{ כאשר}$$

מכיוון שקיימים שני מקדמי חיכוך - קינטי וסטטי, מתקבלים 4 אי שוויונים. באופן עקרוני רק ערכי מקדם החיכוך הסטטי המכסימלי  $(\mu_s)_{\max}$  ומקדם החיכוך הקינטי  $(\mu_k)$  משמעותיים לחקר. נציב ב-(3) וב-(4) את הערכים:  $\mu_s = 0.8$  ו- $\mu_k = 0.6$ . מתקבלים לא שניים, אלא ארבעה אי שוויונים, המתאימים למקדם החיכוך הסטטי המקסימלי ולמקדם החיכוך הקינטי. נבנה את הדיאגרמה הדו-ממדית המתאימה לבעיה שלנו (תרשים 2). הציר האופקי מייצג את זווית הנטייה  $\alpha$  של המישור המשופע, והציר האנכי מייצג את היחס  $z$  בין מסות הגופים. יש לציין שיש משמעות פיסיקלית רק לערכים לא שלילים של  $z$ :

$$z \geq 0 \text{ ולערכי זווית } \alpha \text{ הנמצאים בקטע } [0; \pi/2].$$

ארבעת אי השוויונים שהתקבלו מ-(3) ומ-(4) חילקו את הדיאגרמה לחמישה אזורים אשר מתאימים לסוגי התנועה השונים באופן איכותי (ראה תרשים 2).

קל לראות שגוף 2 נע בתאוצה במעלה המישור המשופע לכל זוגות הפרמטרים  $z$  ו- $\alpha$ , הנמצאים בתחום A. המערכת נמצאת במצב מנוחה עבור כל זוגות הפרמטרים  $z$  ו- $\alpha$ ,

$m_1, m_2, \alpha, \mu$ , אשר מאפשרים את כל אחת מהתנועות הנ"ל.

### ניתוח איכותי בעזרת דיאגרמה דו-ממדית

לניתוח הבעיה נידרש לשתי נוסחאות: אחת מהן קובעת מהי תאוצת המערכת כאשר גוף 2 נע במעלה המישור המשופע:

$$(1) \quad a = \frac{g}{m_1 + m_2} [m_1 - m_2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)]$$

$a > 0$  בהתאם לכיוון הצירים שבחרנו (ראה תרשים 1).

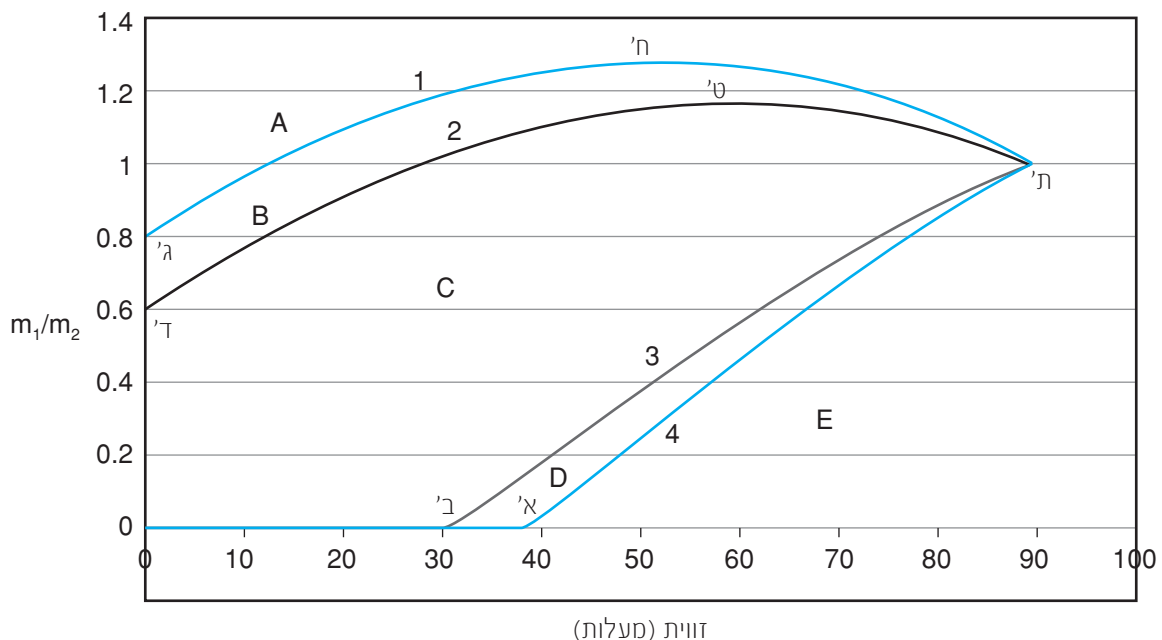
הנוסחה השנייה קובעת מהי התאוצה, כאשר גוף 2 נע במורד המישור המשופע:

$$(2) \quad a = \frac{g}{m_1 + m_2} [m_1 - m_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)]$$

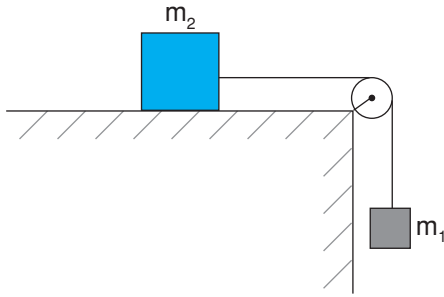
כמובן, התאוצה  $a$  ב-(2) מקיימת  $a < 0$ .

בנוסחאות (1) ו-(2) הגורם  $g/(m_1 + m_2)$  תמיד חיובי ללא תלות בערכי הפרמטרים של הבעיה. לכן אפשר לא להתחשב בו בקביעת כיוון תנועתם של הגופים הנקבע על ידי סימן התאוצה בלבד (כאשר תנאי ההתחלה הוא שבזמן  $(v_0 = 0, t_0 = 0$

נציג את תוצאות החקר בדיאגרמה דו-ממדית. דיאגרמה כזאת מהווה את מישור הפרמטרים של הבעיה, שעליו מצוינים התחומים, המתאימים לכלל המצבים השונים באופן איכותי.



תרשים 2: דיאגרמה דו-ממדית



תרשים 3: המקרה של מישור אופקי ( $\alpha = 0$ ).

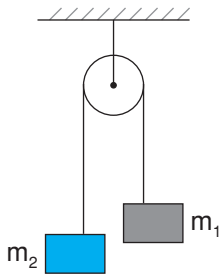
נקודות ח' ו- ט' הן נקודות מכסימום של הפונקציה  $z = z(\alpha)$ :

$$(7) \quad z = \sin\alpha + \mu\cos\alpha$$

נמצא את הזווית  $\alpha_0$  בה הפונקציה  $z$  מגיעה למכסימום:

$$(8) \quad dz/d\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha_0 = \mu$$

המשמעות הפיסיקלית היא שבזווית זו תנאי הרמת גופים לאורך מישור משופע הם "גרועים" ביותר. לדוגמה, בהרמת משקלים בזווית זו נדרש ההספק המקסימלי של המנוע. נקודה ת' מתאימה לזווית  $\alpha = \pi/2$  והמישור המשופע הופך למכונת אטוווד (ראה תרשים 4).



תרשים 4: המקרה של מכונת אטוווד ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ )

### הערך המתודי של ניתוח איכות

ניתוחים איכותיים של בעיות פיסיקליות עניינו את אנשי המתודיקה והופיעו בספרות המתודית כבר לפני 200 שנה. ניתוח זה גורם לתלמיד להתמקד בפן האיכותי של התופעה הפיסיקלית הנדונה. תלמידים מבינים יותר לעומק את מהותן של תופעות פיסיקליות ומפתחים חשיבה לוגית, תפיסה, דמיון ויצירתיות. הניתוח האיכותי תורם לניתוח מקרים פרטיים מתוך ראייתם בהקשר כולל של התופעה הפיסיקלית.

הנמצאים בתחום C. גוף 2 מחליק בתאוצה במורד המישור המשופע לכל זוגות הפרמטרים  $z$  ו- $\alpha$ , הנמצאים בתחום E. המצבים הפיסיקליים הנמצאים בתחומים B ו-D דורשים פירוט:

עקום 1 בתרשים 2 מתקבל עקום כאשר מציבים בביטוי (3) את סימן השוויון במקום סימן האי-שוויון ומציבים במקום  $\mu$  את מקדם החיכוך הסטטי המקסימלי  $(\mu_s)_{\max}$ . לכאורה, היינו צריכים לקבל עבור כל הזוגות  $\alpha$  ו- $z$  של העקום תנועה קצובה במעלה המדרון. אולם, ברגע בו מתחילה התנועה, מומר החיכוך הסטטי המקסימלי בחיכוך הקינטי, הקטן ממנו, ולכן נקבל תנועה מואצת במעלה המדרון.

עקום 2 (בתרשים 2) מתקבל כאשר מציבים בביטוי (3) את מקדם החיכוך הקינטי  $\mu_k$  ובמקום סימן האי-שוויון יבוא סימן השוויון. עבור כל זוגות הפרמטרים  $\alpha$  ו- $z$  של עקום 2, ינוע גוף 2 בתנועה קצובה במעלה המדרון (אחרי דחיפה קלה בכיוון זה). כדאי לציין שבאופן מעשי קשה מאוד להגיע לתנועה שוות מהירות של גופים קשורים על מישור משופע. מצב דומה מתקיים בתחום D. ההבדל הוא שגוף 2 מחליק במורד המישור המשופע, ותנועה שוות מהירות מתקיימת רק עבור הפרמטרים  $z$  ו- $\alpha$  של עקומה 3.

בפתרון בעיות מניחים לעתים קרובות ש- $\mu_s = \mu_k$ . במקרה זה עקומה 1 מתלכדת עם עקומה 2, ועקומה 4 מתלכדת עם עקומה 3.

יש לשים לב שבדיאגרמה הדו-ממדית ישנן נקודות בעלות משמעות פיסיקלית מסוימת. נתמקד בנקודות אלו. נקודות א' ו- ב' (תרשים 2) מייצגות את זוויות הנטייה  $\alpha_0$  של המישור המשופע בהן יתחיל גוף 2 להחליק במורד המדרון (יעבור ממצב מנוחה למצב של תנועה). מכיוון שבמקרה זה  $m_1 = 0$ , ניתן לחשב מ- (4) את ערכו של מקדם החיכוך הסטטי המכסימלי (ראה נקודה א' בתרשים 2).

$$(5) \quad (\mu_s)_{\max} = \operatorname{tg} \alpha_0$$

באופן עקרוני ניתן לחשב גם את מקדם החיכוך הקינטי  $\mu_k$  בעזרת הנקודה ב', אך מכיוון שקשה מאוד לקיים באופן מעשי תנועה קצובה במורד המדרון, הדבר כמעט בלתי אפשרי. נקודות ג', ד' הן נקודות המתאימות למקרה של מישור אופקי ( $\alpha = 0$ ) (ראה תרשים 3).

נציב ב- (1)  $\alpha = 0$  ונקבל:

$$(6) \quad m_1 = \mu m_2$$

וזהו התנאי עבורו המערכת של שני הגופים הקשורים תתחיל לנוע.

$z$  הוא פרמטר קובע, המראה, כי עבור מסות שונות, התנועה במישור משופע תלויה אך ורק ביחס המסות. מזה לומדים התלמידים למצוא פרמטרים קובעים, אשר מתאימים לפתרונות שקולים.

לאחרונה יש נטייה לכלול שאלות איכותיות במבחני הברגות (במיוחד ברמה של 5 י"ל). התהליך, לדעתנו, הוא חיובי וניתוח איכותי תומך בגישה זו.

מחקר ניסויי איכותי יכול להוות נושא נפרד. המחקר דורש תשובות על שאלות כמו: "כיצד לבצע את הניסוי", "מהם התנאים", "מה יקרה" וכו'. הרמה של המחקר יכולה לנוע מניסוי פשוט מאוד עד למחקר ברמה גבוהה.

מכל האמור לעיל נובע, שהניתוח האיכותי עשוי לפתח את החשיבה הפיסיקלית של התלמידים, ולחדד את ההבדל בין יישום מתמטי לפתרון בעיות פיסיקליות לחשיבה פיסיקלית. לבסוף ננסח שתי בעיות, אשר יכולות לשמש כנושא ל"חקר איכותי".

1. כדור נזרק מהקרקע בזווית  $\alpha$  בכיוון לקיר הנמצא במרחק  $L$  מנקודת הזריקה וגובהו  $h$ . אילו תנועות שונות באופן איכותי אפשריות? מצא תחומי ערכים של המהירויות ההתחלתיות והזוויות, המאפשרות תנועה מסוימת. (מישור הפרמטרים:  $\alpha, Lg/v^2$ ).

2. על קרש בעל מסה  $M$  מונח בול עץ קטן בעל מסה  $m$ . מקדם החיכוך בין הקרש לבול הוא  $\mu_1$ , ומקדם החיכוך בין הקרש למשטח הוא  $\mu_2$ . על הבול פועל כוח אופקי  $F$ . הראה את כל האפשרויות השונות, באופן איכותי, של התנהגות המערכת. מהם ערכי הפרמטרים, המאפשרים את קיום המצבים השונים. סרטט בדיאגרמה דו-ממדית (מישור פרמטרים  $\mu_1, \mu_2$ ) תחומים, המתאימים למצבים שונים של ההתנהגות הדינמית של המערכת.

תהודה

דוגמה מצוינת של כל התכונות האלה של הניתוח האיכותי ניתן לראות בניתוח התנועה של גופים קשורים הנמצאים על מישור משופע, אשר הוצג במאמר זה. בעיה זאת כוללת תנועה לא רק של גופים קשורים, אלא גם תנועה של גוף בודד (מקרה  $z=0$ ), לא רק תנועה על מישור משופע, אלא גם תנועה במישור אופקי (מקרה  $\alpha = 0$ ) ומכונת אטווד ( $\alpha = \pi/2$ ).

הניתוח האיכותי, אשר הוצג במאמר, ניתן לבדיקה בניסוי. תלמידים מסוגלים לחקור את הבעיה בבית (כשיעורי בית) ואחר כך לדון בקבוצות במסגרת עבודה קבוצתית. יש לציין שלפני דיון בבעיה במסגרת ניתוח איכותי חייבים התלמידים לפתור תרגילים פיסיקליים מקובלים מסוג דומה. אפשר לראות שבניתוח הבעיה השתמשנו בשיטה המסייעת במציאת פתרון על ידי גישוש וניחוש מושכל, (heuristic), ובשיטה גרפית. שיטה זאת מלמדת לנתח תופעות פיסיקליות, להכליל עובדות ולהסיק מסקנות.

השיטה הגרפית משמשת לצורך המחשה. היא מפתחת חשיבה פונקציונלית, ולפעמים מובילה לניסוח שאלות ותשובות עליהן, גם אם שאלות אלו לא יעלו במסגרת השיטה האיוריסטית. לדוגמה, בניתוח האיכותי שהוצג במאמר הופיעו נקודות ח', ט' על עקומות 1 ו-2, אשר עזרו לגלות זוויות בהן נדרש הספק מכסימלי להרמת משקולות לאורך מישור משופע. ברור שלמסקנות כאלה יש ערך מעשי.

בחקר הדיאגרמה הדו-ממדית לומדים התלמידים למצוא ולהבין משמעות של נקודות מיוחדות (כמו נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות מקסימום), וכן התנהגות המערכת הנחקרת בתחומים שונים של הדיאגרמה. יש לשים לב שבפתרון השתמשנו לא במסות הגופים  $m_1, m_2$  ו- $z = m_1/m_2$ , אלא ביחס ביניהן:  $z = m_1/m_2$ .



## זר ברכה

אחברנו דוד מורביה, רכז הפיסיקה בהיג' הספר הגיבון הפילוני ט"ש דוד קאלי אקבאל גאדא האקרה מביה' הספר אחינוך, פיהידה אנאך שאר מדף באוניברסיטת גא-אביב "על שיגוף פלואה בקידום החינוך המדעי אנאך במדינת ישראל".