



העשרה

קפה בחלב: דוגמה לעבודת חקר לחטיבת ביניים

ולדימיר דצקובסקי¹, מרסל אפרוימסקי²

במהלך עבודתי בהוראת פיזיקה לאורך שנים רבות התנסיתי לא מעט פעמים בהדרכה של תלמידים בביצוע עבודת חקר. במהלך השנים מצאתי גישה שמסייעת לי רבות בביצוע הדרכה זו. הגישה מבוססת על שלב מקדים שלי כמורה ועבודה משותפת עם התלמידים לאחר מכן. במאמר זה ברצוני לתאר מהלך הוראה כזה שבוצע יחד עם תלמידי בכיתה ח'.

במספר רב של בתי ספר שקיימת בהם התמחות בפיזיקה ומתמטיקה (למשל שבח-מופת, מערכת בתי ספר של מופת), מלמדים בכיתות ח'^[1,2,3] את הפרק פיזיקה מולקולארית בנושא קלורимטריה. אין צורך בהשקעות גדולות בציוד לביצוע ניסויים ועבודות חקר בנושא זה. במאמר זה מתוארת עבודת חקר שביצעה התלמידה מרסל אפרוימסקי מאורט שפירא כפר סבא בהנחייתי. עבודת החקר בוצעה בזמן חופשת הקיץ במעבדה הרב-תחומית המשמשת גם מעבדה לפיזיקה בתיכון חדש בבת-ים (ראו איור 1) וזאת במטרה להשתתף בהצגת פרויקטים בינלאומית בחסות חברת "גוגל"^[8] Research of the thermal modes of various types of light bulbs.

עבודת החקר



איור 1: המעבדה הרב-תחומית של תיכון חדש בבת-ים

עבודת החקר התמקדה במטלה הידועה בשם: "קפה בחלב". המחקר יצא מתוך בעיה שנוסחה באופן מושך ומסקרן: פרופסור הזמין קפה בחלב. המלצר הביא לו ספל עם קפה חם וקנקן עם חלב בטמפרטורת החדר. באותו רגע זומן הפרופסור לשיחת טלפון. ידוע שהפרופסור אוהב קפה חם. מה עליו לעשות - להוסיף חלב לקפה מיד (פתרון 1) או להוסיף את החלב אחרי שיחת הטלפון (פתרון 2)?

המטרה של עבודת החקר הייתה לקבל פתרון כמותי לשאלה: מהו ההבדל בין הטמפרטורות הסופיות של התמיסה כשמוסיפים את החלב מיד או כשמוסיפים אותו רק לאחר שיחת הטלפון, כתלות בכמות החלב המוספת ומשך הזמן של שיחת הטלפון.

1 | מורה לפיזיקה בתיכון חדש בת-ים, זוכה בפרס "רקנאטי- צ'ייס-רש"י" למורה היזם 2008 על בניית מעבדות בהתנדבות בבתי ספר שונים

ברחבי הארץ המעבדות משמשות לביצוע פרויקטי חקר על ידי תלמידים.

2 | תלמידת כיתה י' באורט שפירא כפר סבא. זכתה באליפות איחופה והעולם בשחמט לנערות.

http://en.wikipedia.org/wiki/Marsel_Efroimski

המודל התאורטי

עוד לפני התחלת העבודה עם התלמידה שאלתי את השאלות האלה: מהו הידע הפיזיקלי והמתמטי הדרוש לה כדי לבצע את המחקר וכיצד אפשר להתאים את עבודת החקר לידע זה?

בנוגע לידע הפיזיקלי, בחרר שעל התלמידה להבין באילו דרכים יוצאת האנרגיה מהקפה כחום, במה הדרכים תלויות, ומה השינויים שחלים במקביל לכך בקפה עצמו. התהליכים שמדובר בהם הם אלה:

1. משטח הפנים העליון של הנוזל יש הסעה וגם קרינה - Q_1

2. מהנוזל צריכה לעבור אנרגיה על ידי הולכת חום דרך דפנות הספל ואחר כך מתקיימות הסעה וקרינה אל הסביבה - Q_2

3. דרך תחתית הספל עובר חום על ידי הולכה, ויש מעבר אנרגיה על ידי הולכה נוספת אל השולחן שעליו מונח הספל - Q_3 .

בבואנו לפתור את הבעיה באופן כללי, נראה כי היא קשה אף לסטודנטים שעשו התמחות בתרמודינמיקה ובוודאי לתלמידים בחטיבת הביניים. כדי לראות זאת, יש לבחון את כלל האנרגיה היוצאת מהספל כחום:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

בהתאם לחוק הקיור של ניוטון, האנרגיה Q היוצאת מהספל כחום במשך פרק זמן קצר $\Delta\tau$ פחפורציונאלית להפרש הטמפרטורות בין הנוזל לבין האוויר^[6]

$$1 \quad Q = \alpha S(t_i - t_0) \Delta\tau$$

כאשר: S הוא שטח הפנים הכולל של הכוס, t_0 הטמפרטורה של הסביבה, t_i טמפרטורת הנוזל ו- α מקדם העברת האנרגיה כחום מהנוזל לסביבה. ניתן למצוא בניסוי את הערך של α המתאים לספל מסוים והמצוי בסביבה מסוימת.

אם ידוע ערכו של המקדם α , אז יש האופציה לעבור לפתרון בעיות של מוליכות חום לא סטציונארית^[7] ואולם גישה זו דורשת ידע מתמטי ברמה גבוהה מזו שיש לתלמידים, ולמרסל היה רק ידע על פונקציות אלמנטאריות, פתרונות של מערכות ליניאריות ופתרונות של משוואות ריבועיות.

אפשר היה לספק למרסל נוסחאות לפתרון הבעיה עם הסברים על המשמעות והתכונות של פונקציה אקספוננציאלית. במקרה הזה היינו מפסידים את המשמעות המחקרית של הפרויקט: הבנת העיקרון של התהליך הפיזיקלי של מעבר אנרגיה בין גופים בטמפרטורה שונה (חום). במקרה כזה העבודה הייתה הופכת לתהליך פורמלי בלבד.

נקטנו בדרך אחרת שאינה דורשת ידע מתמטי עמוק. המודל המתמטי שבו השתמשנו היה מודל לא רציף של הפרשים סופיים המתבסס על חוק שימור האנרגיה. לפי חוק זה, חוק שאותו מרסל הבינה בקלות, הפחת באנרגיה הפנימית של הכוס צריך להיות שווה לאנרגיה שעוברת ממנה אל הסביבה (חום) לפי חוק ניוטון (משוואה 1).

הפחת באנרגיה הפנימית של מערכת שהטמפרטורה שלה משתנה נתון על ידי^[6]:

$$2 \quad Q = C_m \Delta T = C_m(t_i^{+1} - t_i)$$

כאשר C הוא קיבול החום הסגולי של המערכת, m המסה שלה, והביטוי בסוגריים הוא שינוי הטמפרטורה של המערכת בין שני זמנים עוקבים.

מותך משוואות (1) ו-(2) התקבלה הנוסחה הסופית של משוואת איזון האנרגיה:

$$3 \quad mc(t_i^{+1} - t_i) + \alpha S(t_i - t_0) \Delta\tau = 0$$

מותך משוואה זו חילצנו את הקשר בין טמפרטורת הגוף ברגע הזמן הבא t_i^{+1} לבין טמפרטורת הגוף ברגע הזמן הקודם t_i :

$$4 \quad t_i^{+1} = t_i - (\Delta\tau/cm) \alpha S(t_i - t_0)$$

לצורך ביצוע החישובים הקשורים להוספת חלב לקפה, השתמשנו בנוסחה שמגדירה את הטמפרטורה הממוצעת של תמיסה המורכבת מנוזלים שונים שלכל אחד מהם מסה, חום סגולי וטמפרטורה שונים:

$$5 \quad \bar{t} = \frac{\sum_{j=1}^n c_j m_j t_j}{\sum_{j=1}^n c_j m_j}$$

ואת קיבול החום הסגולי הממוצע של התמיסה:

$$6 \quad \bar{c} = \frac{\sum_{j=1}^n c_j m_j}{\sum_{j=1}^n m_j}$$

החלק המעשי של המחקר

כאמור, כדי לעשות חישובים לפי המודל המתמטי שהוצג לעיל, היינו צריכים קודם כל למצוא בניסוי את מקדם העברת החום מנוזל לאוויר.

כמו שציינו, אין צורך בצידוד מתוחכם ויקר לביצוע ניסויים בתחום הקלורимטריה. השתמשנו בצידוד הבא: פלטה חשמלית, כסות, מדי חום דיגיטליים, סטופר, מאזניים דיגיטליים, מבחנה (ראו איור 2).

מדדנו במשך 2 דקות את השינוי של טמפרטורת הנוזל (מים) בתוך הספל.

את מקדם העברת החום מהנוזל לסביבה חילצנו מתוך משוואה (3)

$$\alpha = \frac{cm (t^{j=1} - t^{j=0})}{s (t^{j=0} - t_0) \Delta \tau}$$

על סמך ההנחה כי משך הזמן הוא קצר יחסית, קיבלנו:

$$\alpha = 30 \frac{W}{m^2 \cdot C}$$



איור 2: הצידוד שהשתמשנו בו במחקר

יישום המודל באמצעות מחשב

נוח מאוד לפתור משוואות בצורת הפרשים סופיים באמצעות EXCEL. לך הדרכתי את מרסל לבנות מודל מתמטי של נוסחה 3 באמצעות EXCEL.

נתוני הקלט היו:

חלב	מים (עם קפה)	
$c_2 = 3900 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$	$c_1 = 4200 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$	חום סגולי
$m_2 = 50 \text{ g}$	$m_1 = 200 \text{ g}$	מסה
$25^\circ C$	$90^\circ C$	טמפרטורה התחלתית

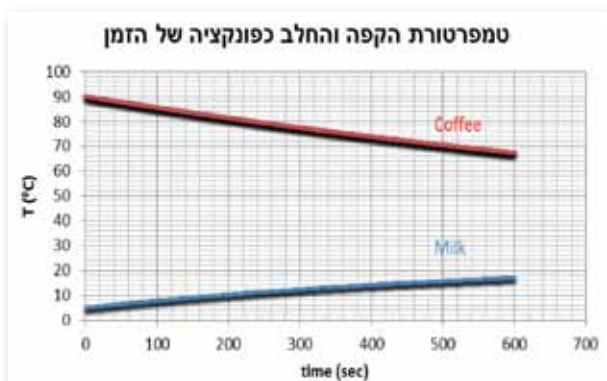
בנוסף השתמשנו בנתונים הבאים: טמפרטורת הסביבה - $25^\circ C$ ושטח הפנים של הנוזל:

$$S = 0.046 \text{ m}^2$$

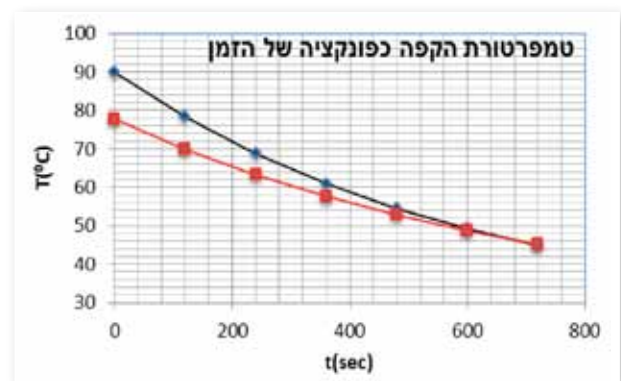
בעיקרון, השטח S יכול להיכנס כגורם ניסיוני המהווה חלק מ- α . אך אם שטח זה שווה לכל שטח הפנים של הקפה, אז ל- α תהיה, על פי משוואה (1), משמעות פיזיקלית: זוהי כמות אנרגיה שיוצאת מיחידת שטח הפנים של הנוזל לסביבה כאשר הפרש הטמפרטורות ביניהם הוא $1^\circ C$.

למקרה שבו החלב הוסף לפני שיחת הטלפון ושהשיחה ארכה 500 שניות, הדרכתי את מרסל להשתמש תחילה בנוסחה (4) ואחר כך להשתמש שוב במשוואה (3) עד למשך זמן של 500 שניות. הטמפרטורה הסופית שהתקבלה במקרה זה הייתה: $52^\circ C$ (איור 3).

היפוך סדר הדברים (הוספת החלב אחרי שיחת הטלפון) דרש שימוש חוזר במשוואה (3) עד למשך 500 שניות ואחר כך שימוש בנוסחה (4). הטמפרטורה הסופית של התמיסה במקרה זה הייתה - $47.7^\circ C$ (איור 3). מכאן שבתנאי הקלט שנקבעו, יישום המודל המתמטי הראה שעדיף היה להוסיף את החלב לפני שיחת הטלפון.



איור 4: טמפרטורת הקפה והחלב כפונקציה של הזמן (אדום) וטמפרטורת החלב (כחול)



איור 3: טמפרטורת הקפה להוספה מיידית של החלב (הקו האדום) וללא הוספת חלב (הקו הכחול). אם מוסיפים חלב רק לאחר 500 שניות, מתקבלת טמפרטורה של $47.7^\circ C$ לעומת $52^\circ C$ אם מוסיפים את החלב מיד

המודל המתמטי מאפשר לבדוק גם מקרים נוספים. למשל, אם החלב נלקח מהמקרה, הרי שבזמן שהפחפוס ידבר בטלפון, יתקרר הקפה בספל, ואילו החלב שבקנקן יתחמם. מה יקרה במקרה הזה?

ניתוח של הגרפים ושל תוצאות החישובים מראה שגם במקרה הזה עדיף הפתרון הראשון, אף שהיתרונות שלו יהיו קטנים יותר. לתופעה הזאת יש הסבר איכותי: באותו הזמן שהקפה מאבד את האנרגיה שלו כחום, האנרגיה של החלב בקנקן גדלה, והעדיפות של הפתרון הראשון בהשוואה לפתרון השני קטנה. אבל בגלל שההפרש בין טמפרטורות הקפה והסביבה גדול מההפרש בין טמפרטורות הסביבה והחלב, הפתרון הראשון בכל זאת עדיף.

השוואת התוצאות שהתקבלו בגיליון לתוצאות שהתקבלו במדידה

כאשר השווים את התוצאות שקיבלנו בגיליון לתוצאות שהתקבלו במדידה ישירה, מצאנו אי התאמה. מניתוח המקרה הגענו למסקנה כי בשלב הראשון, שבו חישבנו את המקדם α , עשינו שגיאה: השתמשנו רק בהפרש בין טמפרטורות הקפה בתחילת התהליך ואחר כך כעבור שתי דקות. בעזרת שני נתונים אלו בלבד חישבנו את המקדם. כלומר, α חושב לא נכון, והדבר השפיע על החישובים התאורטיים שלנו.

דרך טובה יותר היא להתייחס ל- α כאל מקדם חופשי ולבחון מהו הערך המתאים ביותר עבורו, כך שהמודל יתאים לתוצאות הניסוי. תוצאות תהליך זה מוצגות בטבלה 1.

t (sec)	0	200	400	600	800	1000	1200
T, experimental (°C)	90	82.2	76	70	65	60.8	58.8
$T(\alpha=15 \text{ W/m}^2 \cdot \text{C})$	90	82	74.9	68.6	63	58.1	53.7
$T(\alpha=14 \text{ W/m}^2 \cdot \text{C})$	90	82.5	75.8	69.9	64.4	59.7	55.4
$T(\alpha=13 \text{ W/m}^2 \cdot \text{C})$	90	83	76.7	71	65.9	61.3	57.2

טבלה 1: השוואת תוצאות הניסוי למודל התאורטי עבור ערכי α שונים

מתוך הטבלה ניתן להגיע למסקנה שהערך של α , המתאים ביותר למקרה שלנו, הוא:

$$\alpha = 14 \text{ W/m}^2 \cdot \text{C}$$

לאחר שלב זה ניתן להמשיך את העבודה בעזרת מחשב (לפני כן היו לנו כמה ימי עבודה משותפים). כלומר, ניתן לתקשר עם התלמידים באמצעות המחשב ולבצע חישובים בבית בעזרת המחשב.

ניתוח החישובים התאורטיים

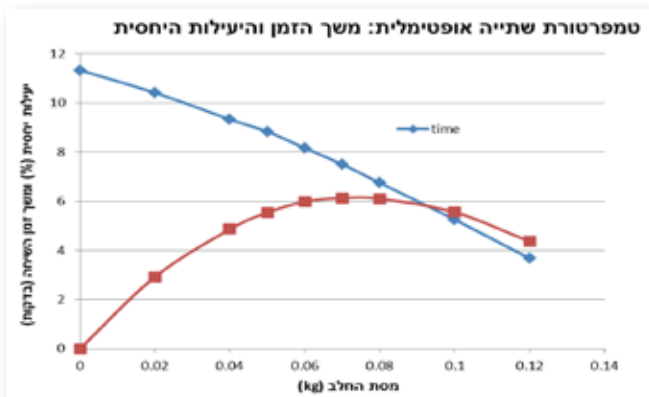
ראשית, רצינו למצוא מהם התנאים שבהם יעילותו של הפתרון הראשון היא מקסימלית בהשוואה לפתרון השני. היעילות נמדדה לפי היחס (באחוזים) בין השינוי בטמפרטורה (לעומת הטמפרטורה ההתחלתית) בין שני הפתרונות.

בכל החישובים שביצענו המסה של תמיסת המים והקפה היא 200 גרם, $\alpha = 14 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ וטמפרטורת הסביבה היא 20°C . מהגרף שהצגנו בתרשים 5 נובע כי היעילות בשיטה הראשונה היא מקסימלית ביחס לשיטה השנייה, אם מוסיפים לקפה 100 גרם חלב (היחס הוא 17.5% לאחר כ-20 דקות שיחה).

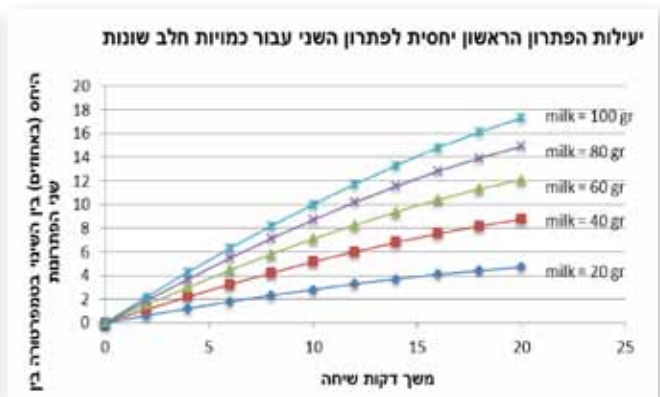
השאלה הבאה שעליה ביקשנו לענות הייתה: איזו יעילות תהיה לשיטה הראשונה ביחס לשנייה אם נדרוש כי שתיית הקפה תהיה בטמפרטורה המקובלת והאופטימלית של 60°C .

לשם כך צריך להביא בחשבון לא רק את החימום באחוזים של טמפרטורת הקפה אלא גם את טמפרטורת הקפה עצמו. לפי נתונים הנלקחים מהספרות, קפה (טוב) מבשלים בטמפרטורה של 96°C . כאשר מגישים את הקפה - הטמפרטורה שלו שווה ל- 90°C בערך. אם דורשים כי הטמפרטורה של הקפה לא תהיה נמוכה מ- 60°C , מקבלים מהחישוב גם את משך הזמן שבו מתקבלת טמפרטורה זו וגם את היעילות היחסית בין שתי השיטות לכמויות שונות של חלב (הגרף הכחול והגרף האדום באיור 6 בהתאמה).

מהגרף אפשר לראות כי בכל מקרה אורך השיחה לא צריך לעלות על 11 דקות, משום שמעבר לזמן זה אין הבדל בין שתי השיטות. אם היחס בין הקפה לחלב הוא 2:1 (100 גר' חלב), אורך השיחה המרבי שיגרוך הבדל בין שתי השיטות הוא כ-5 דקות. היעילות המרבית של השיטה הראשונה ביחס לשיטה השנייה היא כ-6% (נקודת המקסימום של הגרף הוורוד), והיא מתקבלת כאשר היחס בין הקפה לחלב הוא 3:1 (כ-70 גר' חלב) וכאשר אורך השיחה אינו עולה על 7 דקות.



איור 6: משך השיחה (הקו הכחול) והיעילות היחסית בין השיטות (הקו האדום) כאשר הטמפרטורה של הקפה מגיעה ל- 60°C עבור כמויות שונות של חלב



איור 5: יעילות השיטה הראשונה בהשוואה לשיטה השנייה (ב-%) כפונקציה של אורך השיחה (כמויות חלב שונות).

עצות מעשיות

כחלק מהדרישות לביצוע העבודה היה על התלמידה לבחון את הרלוונטיות ל"חיים" של המחקר שביצעה. בתהליך המחקר הגענו לכמה מסקנות שעל אוהדי השיחות בבית קפה להביא בחשבון. להלן מובאות ההשלכות של המחקר.

1. לנוסחה (3) נכנס מקדם קבוע $\frac{\alpha s}{cm}$ שאינו תלוי בזמן. מקדם זה מהווה קריטריון שמאפיין את קצב התהליך הפיזיקאלי (ככל שהוא גדול יותר, כך קצב שינוי הטמפרטורה של הקפה גדול יותר). ברור שהיחס בין שטח הספל ובין נפח הספל (המתכונתי למסתו) תלוי בצורתו של הספל. ידוע שהיחס הזה מינימאלי עבור צורת כדור. בגלל זה ספלים עגולים שומרים חום יותר זמן מספלים גליליים. במקרה הקיצוני ביותר היתרון שווה ל- 30%.
2. המשטח היציני של ספל לא צריך להיות גלי על מנת שלא להגדיל את השטח S. יש ספלים שבזכות הצורה היצינית שלהם עובדים כצלעות קיחור (השטח היציני גדל ב- 40%-50%).
3. הקטנת נפח הספל פי שניים והקטנה של כמות הקפה מגבירות פי שניים את קצב ההתקררות. גם זה נובע מנוסחה (3).
4. כאשר מזמינים קפה עם קצפת - אין מערבבים אותם! בגלל מוליכות חום וצפיפות נמוכים של הקצפת היא מהווה שכבת מכסה לקפה ומקטינה את איבוד החום מפני השטח העליון של הקפה ל-15%-12%.



איור 7: הכיתה בה נערך הניסוי

סיכום אישי

הפרויקט שתיארנו כאן הוא בעל פוטנציאל להתפתח לרמה גבוהה יותר. כוונתי היא שאם יקבל התלמיד ידע נוסף בנושאים כמו חשמל וטעינה ופריקת קבלים, ניתן יהיה לפתח את הפרויקט ולבנות מודל מתמטי שלם שממנו יוסקו מסקנות ברמה גבוהה יותר. יש להוסיף למודל המתמטי את אפיון החומרים ואת תכונות החומר כמו: צבע הספל, צפיפות, מוליכות חום וחום סגולי. כאמור, למודל שכזה דרושה רמת ידע גבוהה במתמטיקה (הידע יכלול לכל הפחות גזרות, אינטגרלים ופונקציות אקספוננציאליות). את הפרויקט שתיארנו הכינה מרסל בסיום כיתה ח'. לפרויקט לא היה המשך מעבר לתיקוני שגיאות. למרות זאת פיתוח הפרויקט צייד את מרסל בניסיון בהכנת פרויקטים ברמה גבוהה יותר בכיתה י'.

ביבליוגרפיה

1. יבגניה גבאי, "פיזיקה בסיסית", חלק ב, 2008.
2. ילנה טשרניחובסקי, "פיזיקה, חוברת תרגילים", 2008
3. יגאל גלילי, דני עובדיה, "סיווחת הפיסיקה", 2007
4. Donald Q. Kern, Allan D.Kraus. Extended surface heat transfer. New York, 1977
5. בת שבע אלון, אסתר בגנו, צבי גל. פרקי חשמל ומגנטיות. חלק א-פרקי חשמל. מכון ויצמן 1998.
6. Baily, M. A Survey of Thermodynamics, American Institute of Physics, New York, 1994.
7. Welty, James R., Wicks, Charles E., Wilson, Robert Elliott . Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer 1976.
8. <http://www.google.com/events/sciencefair/index.html>, 2011.