

# קשיי תלמידים בקישור בין גרפים ופיסיקה: דוגמאות מקינמטיקה

על פי המאמר:

McDermott, L. C., Rosenquist, M. L. & Van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. American Journal of Physics, 55 (6), 503-513.

תרגום חופשי: סמדר לוי.

במאמר מומחשות, ע"י דוגמאות מקינמטיקה, כמה טעויות נפוצות של תלמידים בנייתוח גרפים בפיסיקה. השגיאות שנעשו ע"י התלמידים במחקר מצויות באוכלוסיות שונות ובשכבות השכלה שונות. המאמר בוחן שתי קטגוריות של קשיים שזוהו: קושי לקשר גרפים לתפישות פיסיקליות, וקושי לקשר גרפים לעולם המציאות.

## 1. הקדמה

תלמידים רבים בקורסי המבוא בפיסיקה נראים כחסרי יכולת להשתמש בגרפים להפקת או להעברת מידע. כחלק מהמחקר על הבנת תלמידים בפיסיקה, הקבוצה בחנה כמה מהטעויות שנעשו ע"י תלמידים לגבי גרפים. חלק מהמוטיבציה לביצוע המחקר הייתה השכנוע שמיומנות בשרטוט ובניתוח גרפים היא בעלת חשיבות מכרעת לפיתוח והבנת נושאים רבים בפיסיקה. הם התעניינו במיוחד בחקירה האם ניתן יהיה לטפל ביעילות בכמה מהקשיים בתפישות הקינמטיות שזוהו במחקר קודם, בעזרת דגש מוגדל על הצגות גרפיות. הבעיות שיש לתלמידים לגבי גרפים אינן יכולות להיות מיוחסות בפשטות להכשרה בלתי מתאימה במתמטיקה. לעתים קרובות תלמידים שאין להם שום בעיה לסמן נקודות ולחשב שיפועים לא יכולים ליישם את מה שלמדו על גרפים מלימודי המתמטיקה לפיסיקה. לכן מוכרחים להיות גורמים אחרים, שונים מאשר רקע מתמטי. הניתוח של טעויות בגרפים שזוהו במחקר זה מראה שרבות מהטעויות הן תוצאה ישירה של חוסר יכולת לקשר בין הצגה גרפית והנושא המתואר.

במאמר זה מתוארות שתי קטגוריות של קשיי תלמידים שנחקרו: קושי בקישור גרפים לתפישות פיסיקליות וקושי בקישור גרפים לעולם המציאות. קשיים ספציפיים לכל קטגוריה מזוהים ונדונים במונחים של ביצועי התלמיד בבעיות כתובות וניסויי מעבדה. כל הדוגמאות המובאות הן מקינמטיקה, למרות שהמחקר כלל גם נושאים אחרים בפיסיקה.

רוב העבודה שתוארה כאן בוצעה במשך מספר שנים בהקשר לקורס מבוא שנתי בפיסיקה לסטודנטים המתעתדים להירשם לאלגברה או לפיסיקה על בסיס מתמטי. המידע שהושג מקבוצה זו הושלם ע"י הרחבת המחקר לסטודנטים שנרשמו לקורסי פיסיקה ספציפיים למורים ולקורסי מבוא סטנדרטיים באוניברסיטת וושינגטון. נבדקו גם תשובות של תלמידי פיסיקה בתיכון לאותן שאלות. למרות שהיו הבדלים בדרגת החומרה, אופי הקשיים היה זהה לכל האוכלוסיות הללו. הממצאים גם היו קונסיסטנטיים עם דווחי חוקרים אחרים.

## 2. קשיים בקישור גרפים לתפישות פיסיקליות

זוהו מספר קשיים ספציפיים שנעשו ע"י תלמידים בקישור גרפים לתפישות פיסיקליות. בחלק זה נדונים כמה מהנפוצים ביותר ע"י בדיקת תשובות תלמידים לחמש בעיות בקינמטיקה. בשלב שבו שאלות אלה מופיעות בבחינות קורס המבוא לפיסיקה, התלמידים ככלל כבר הראו שליטה טובה במושגים קינמטיים בפתרון בעיות אחרות ללא גרפים. לכן רוב הטעויות שנעשו ע"י תלמידים אלה יכולות להיות מיוחסות לחוסר יכולת לפרש גרפים יותר מאשר לניסיון לא מתאים עם המושגים.

### א. הבחנה בין השיפוע והגובה של גרף

בניתוח גרף בפיסיקה, התלמיד צריך להיות מסוגל להחליט אלו מתכונות הגרף מתייחסות לתפישות פיסיקליות מיוחדות. בגרף בקו ישר, לדוגמא, מידע יכול להיות טמון בקואורדינטות של נקודה, בהפרש הקואורדינטות בין שתי נקודות, או בשיפוע של הקו.

תלמידים רבים זקוקים לעזרה כדי ללמוד לבחור איזה מן התכונות האלה "לקרוא" בתשובה לשאלות על הנושא המוצג בגרף.

נמצא שלעתים קרובות תלמידים לא יודעים אם להפיק את המידע הדרוש מהשיפוע או מהגובה של הגרף. בבעיה הבאה, התבקשו התלמידים להשוות את שתי התנועות הקצובות המוצגות בגרף מקום - זמן המתואר ב-Fig 1.

בעיה 1: תרשים 1 מראה גרף מקום לעומת זמן לתנועת שני גופים A ו-B, הנעים לאורך אותו סרגל.  
 (א) ברגע  $t=2s$ , האם מהירות גוף A גדולה, קטנה, או שווה למהירות גוף B?  
 (ב) האם לגופים A ו-B יש ברגע כלשהו אותה מהירות? אם כן, באלו זמנים? נמק.

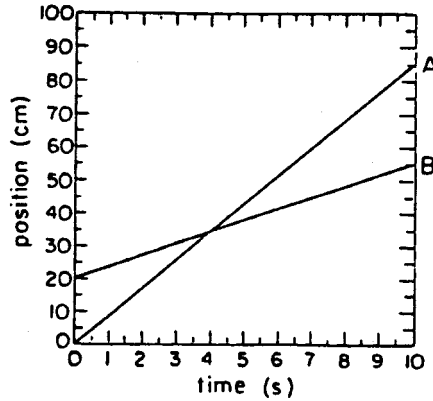


Fig. 1.

כדי לענות על סעיף א', צריך רק לדעת ששיפועי הגרפים מייצגים את המהירויות של הגופים ושקו A תלול יותר מקו B. מכאן שמהירות גוף A גדולה מזו של גוף B. למרות זאת, תלמידים רבים אינם עונים נכון. רוב התשובות השגויות נובעות כנראה מכישלון להבין שמידע על מהירות לא יכול להיות מופק מהגובה. ב- $t=2s$ , קו B נמצא מעל קו A, ותלמידים רבים מתמקדים בהבדל זה בגובה, ולא בהבדל השיפוע, כדי להחליט לאיזה גוף מהירות גדולה יותר.  
 תלמידים שלא ענו נכון לסעיף ב', לא מבינים שלשני הגופים אף פעם לא תהיה אותה מהירות, כי שיפועי הקווים A ו-B אף פעם אינם זהים. לכן, הם בוחרים  $t=4s$ , נקודת החיתוך שבה לגרפים יש אותו גובה, כזמן שבו המהירויות זהות. שוב נראה שתלמידים רבים מתרכזים בתכונה הלא נכונה של הגרף בהגעה לתשובותיהם. (יכול גם להיות שכמה תלמידים מפרשים נכון את חיתוך הגרפים ב- $t=4s$  כזמן שבו הגופים נמצאים באותו מקום, אך אז טועים ומסיקים שלגופים יש גם אותה מהירות.)

### ב. פירוש שינויים בגובה כשינויים בשיפוע

כמצופה, לתלמידים קשה יותר לנתח גרפים עקומים מאשר גרפים ישרים. בגרף עקום יש שינויים בשיפוע וגם שינויים בגובה. השינויים בשיפוע אינם כה ברורים כשינויים בגובה ודורשים בחינה מדוקדקת יותר לפני שניתן להפיק מהם מידע. כמה מהסיבוכים הנוספים בניתוח גרף עקום מודגמים בבעיה הבאה.

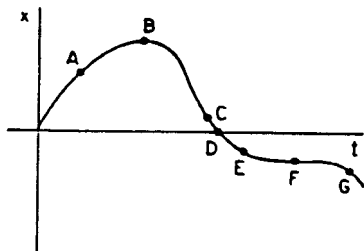


Fig. 2.

בעיה 2: באילו מהנקודות המסומנות בגרף שב- Fig 2:

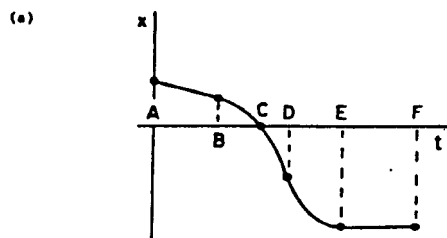
- (א) התנועה איטית ביותר?
- (ב) הגוף מגביר את גודל מהירותו?
- (ג) הגוף מקטין את גודל מהירותו?
- (ד) הגוף משנה את כוון תנועתו?

ניתן לענות ע"י מעקב אחר הגבהים והשיפועים וע"י התחשבות באופן שבו גדלים אלה משתנים בכל אחת מן הנקודות המסומנות. התנועה איטית ביותר בנקודות B ו-F, בהן השיפוע הקטן ביותר, אפס. השיפוע הגדל בנקודה G מראה שהגוף מגדיל את מהירותו. הגוף מאט בנקודות A, C, D, ו-E, שבהן השיפוע קטן בגודלו. בנקודה B, שם השיפוע משנה סימן, הגוף מסתובב ומתחיל לנוע בכיוון ההפוך. בהסברים הכתובים שלהם, התלמידים מגלים לעתים קרובות סימנים של קשיי שיפוע-גובה המוכרים מגרפים ישרים. תשובות שגויות לתנועה האיטית ביותר בד"כ כללו את נקודה D, שם הגובה 0 אך השיפוע לא. טעות טיפוסית לסעיף ב' היא לטעון שהגוף מגדיל את מהירותו בנקודה A "כי הגרף גדל". כמובן, שלמרות שהגובה גדל בנקודה A, השיפוע הקטן מצביע על האטה ולא על האצה. במקום לחפש שינויים בשיפוע, תלמידים רבים מתמקדים על שינויים ברורים יותר בגובה. בסעיף ג', כמה תלמידים כללו את נקודה G כנקודה שבה הגוף מאט כי "השיפוע שלילי". תלמידים אלה מבססים את תשובתם על כוון השיפוע במקום על השינויים בגודלו. לגבי שינוי הכוון בסעיף ד', תלמידים רבים בוחרים בנקודה D כי "המיקום הופך מפלוס למינוס". במקום לחפש נקודה שבה השיפוע משנה סימן, הם מזהים נקודה שבה הגובה משנה סימן.

### ג. ייחוס גרף אחד לאחר

בנוסף לקושי בייחוס התכונות השונות של גרף לתפישות פיסיקליות מיוחדות, תלמידים לעתים קרובות לא יכולים לייחס טיפוס אחד של גרף לאחר. רבים אינם מסוגלים לתרגם אחורה וקדימה מגרף מקום לעומת זמן לגרף מהירות לעומת זמן.

בדוגמא הבאה, תלמידים לעתים קרובות אינם מבינים שעליהם להשתמש בשיפוע של גרף מקום-זמן כגובה של גרף מהירות-זמן. זה אפילו קשה להם יותר לראות שיפוע גדל של גרף מקום-זמן כגובה גדל של גרף מהירות זמן.

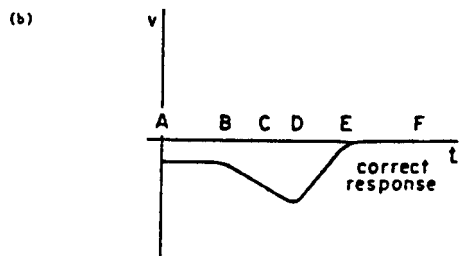


**בעיה 3:** בתרשים (Fig 3) מתואר גרף המקום

לעומת זמן, עליו מסומנות כמה נקודות

המייצגות זמנים מעניינים. שרטט גרף של מהירות

לעומת זמן לתנועה זו. התייחס לנקודות המסומנות.



התשובה הנכונה מופיעה בתרשים (b) 3. בדוגמא השגויה המופיעה בתרשים (c) 3, ברור שהתלמיד ניסה לשרטט גרף חדש ע"י מניפולציה של המידע בגרף הנתון. התוצאה, בכל אופן, היא רק היפוך של הגרף המקורי. התלמיד התמקד בבירור על גובה גרף מקום-זמן במקום על השיפוע. בניסיון לייצר גרף אחד מאחר, תלמידים לעתים קרובות אינם מסוגלים להתעלם מצורת הגרף המקורי.

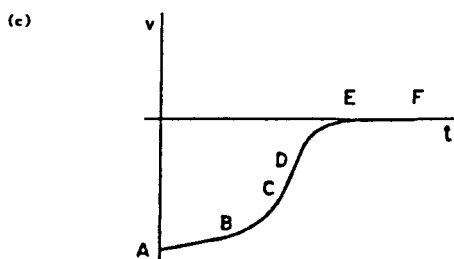


Fig. 3.

#### ד. התאמת מידע כתוב לתכונות רלבנטיות של גרף

המשימה של התאמת המידע בקטע כתוב להצגה גרפית קשה לתלמידים רבים. כדי לענות על השאלות בבעיה הבאה, על התלמיד להתייחס גם לגרף ב-Fig. 4 וגם לבעיה הכתובה.

**בעיה 4 :** לספינת חלל שלושה מנועים רקטיים שונים, שכל אחד מהם מקנה לספינה תאוצה קבועה כשהוא דולק. בגרף שבתרשים, נקודה P מייצגת את מהירות הרקטה ברגע מסוים. בנקודה Q הקפטן מדליק את מנוע מס' 1. בנקודה R, מנוע מס' 3 מכובה ומנוע מס' 2 מודלק. בנקודה R, מנוע מס' 3 מכובה ומנוע מס' 2 מודלק. אין שום מידע על הספינה אחרי נקודה R.

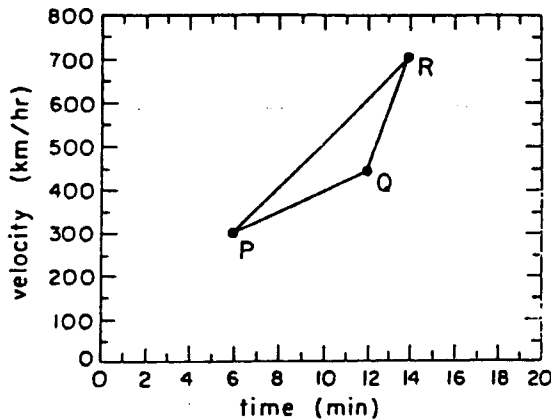


Fig. 4.

מצא את התאוצה הנגרמת ע"י כל מנוע המופיע ברשימה למטה, אם מידע זה מופיע בגרף. נמק את תשובתך.

- (א) מנוע מס' 1
- (ב) מנוע מס' 2
- (ג) מנוע מס' 3

בבעיה 4, הקטעים PQ ו-QR נותנים חלק מן ההיסטוריה של המהירות לעומת הזמן של תנועת הרקטה. לקטע PR אין שום פירוש כזה, אך הוא מצויר בגרף כך שכל שלושת החלקים מוצגים באופן זהה. כדי לענות על השאלות נכון, על התלמידים לזהות את השיפוע של PQ עם התאוצה הנגרמת ע"י מנוע מס' 1, לזהות את השיפוע של QR עם התאוצה הנוצרת ע"י מנוע מס' 3, ולהבין שלא ניתן להחליט לגבי התאוצה הנגרמת ע"י מנוע מס' 2. לכן על התלמידים להתייחס לשיפועים של שניים מן הקטעים ולהתעלם מן השלישי.

בבעיה זו נפוצים כמה סוגי טעויות. לדוגמא, במציאת התאוצה הנגרמת ע"י מנוע מס' 1, כמה תלמידים לא

מזהים שעליהם לחשב את היחס  $\frac{\Delta V}{\Delta t}$  במשך פרק הזמן שמנוע מס' 1 פועל, כלומר עליהם למצוא את השיפוע של

PQ. במקום זה, כמה תלמידים מחלקים את קואורדינטות הנקודה P, בעוד שאחרים מחלקים את הקואורדינטות של נקודה Q. תלמידים אלה אינם מבחינים בהבדל בין היחסים של  $\frac{V}{t}$  לבין  $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ .

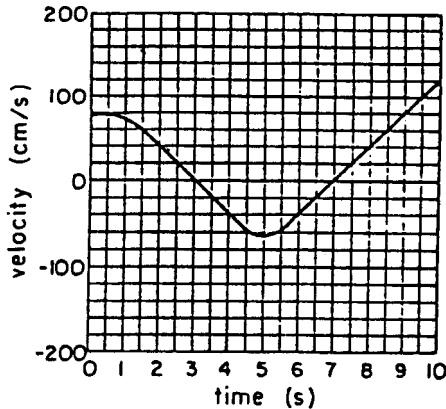
למרות שהרוב מתייחסים לצורך לחשב את השינוי במהירות מחולק בפרק זמן, הם אינם מקשרים יחס זה עם השיפוע של PQ.

בקרב התלמידים שכן מחשבים את התאוצה תוך שימוש בשיפועים, רבים אינם מסוגלים להתאים את השיפוע המתאים למנוע המתאים.

הטעות הנפוצה ביותר הייתה, בכל אופן, כשלון להבין שלא ניתן להחליט לגבי תאוצת מנוע מס' 2. רוב התלמידים העושים טעות זו מחשבים את השיפוע של PR לתאוצת מנוע מס' 2. טעות מסוג כזה מעידה על חוסר תשומת לב לפרטי התיאור הכתוב ויכולה להצביע על שימוש באלגוריתם זכור למציאת תאוצה כ"שיפוע גרף v כנגד t".

## ה. פירוש השטח שמתחת לגרף

פירוש השטח שמתחת לגרף הוא רעיון חדש לתלמידים רבים בקורס המבוא בפיסיקה. התהליך של מציאת העתקים ע"י ספירת מספר הריבועים מתחת לגרף המהירות לעומת הזמן דורש פירוש שטחים כאורכים. לתלמידים קשה לעתים קרובות לראות גודל שהם מקשרים עם יחידות ריבועיות כמייצג גודל עם יחידות לינאריות. בדוגמא הבאה, על התלמידים לפרש גרף מהירות-זמן כדי להחליט מתי גוף ממוקם במקום מסוים.



**בעיה 5:** תרשים (a) מראה גרף מהירות לעומת זמן עבור גוף

המצוי ב:  $X=0$  ב:  $t=0$ . מתי ימצא הגוף ב:  $X=110$  cm?

תלמידים מעטים מסוגלים בתחילה לקבל מבט איכותי כולל על התנועה ע"י קריאת הגרף בתרשים (a) 5. הם אינם מפרשים את השטחים החיוביים ושליילים לחילופין, מעל ומתחת לציר  $v=0$ , כמייצגים העתקים חיוביים ושליילים לחילופין.

לכן אינם יוצרים תמונה מנטלית של גוף המבצע תנודות הלוך וחזור. ללא הראיה של תנועה מחזורית, התלמידים אינם מודעים לכך שעליהם למצוא יותר מזמן אחד שבו העצם נמצא

ב:  $X=110$  cm.

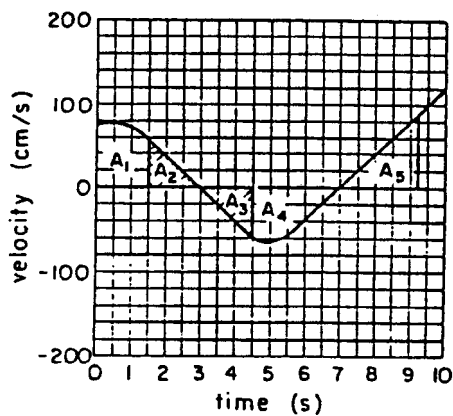


Fig. 5.

כדי לענות על השאלה, צריך קודם לשים לב ששטח ריבוע אחד מתאים להעתק של 10 cm. מבדיקה חפוזה של הגרף וספירה מקורבת של ריבועים, ניתן להפיק את המידע הבא: הגוף מגיע להעתק החיובי המקסימלי הראשון שלו (כ-150 cm) ומסתובב ( $v=0$ ) ב- $t=3.0$ s. אז הוא נע בכיוון השלילי עד שהוא מסתובב בפעם השניה ב- $t=7.0$ s. הערך המקורב של השטח החיובי הראשון והשטח השלילי מראה שהגוף חוזר בקירוב לנקודת ההתחלה ( $X=0$ ) כשהוא הופך את כוונתו ב- $t=7.0$ s. הגודל הרב יותר של השטח החיובי השני מראה שהגוף נע לבסוף בכיוון החיובי מעבר למקסימום הראשון.

הניתוח שלמעלה מראה שהגוף עבר דרך  $X=110$ cm שלוש פעמים. ע"י סימון 11 הריבועים הראשונים ( $A_1$ ) ניתן למצוא שהפעם הראשונה היא ב- $t=1.5$ s. למציאת הזמנים האחרים, נוח לחלק את השטח שמתחת לעקומה לחמישה שטחי משנה, וכך לפשט את תהליך הקיזוז של שטחים חיוביים ושליילים. שטחים  $A_{1-5}$  מוראים בתרשים (b) 5. אם יש להם תמונה מנטלית של המסלול בראש,

התלמידים יכולים להחליט שהגוף ממשיך לעבר ההעתק החיובי המקסימלי שלו ( $A_{1-2}$ ) ב- $t=3.0$ s, מסתובב, ואז חוזר ל- $X=110$  cm ( $A_{1-3}$ ) ב- $t=4.5$ s. אז הוא ממשיך לנוע בכיוון השלילי עד שהוא מגיע ל- $X=0$  ( $A_{1-4}$ ) ב- $t=7.0$ s, שם הוא מסתובב שוב ונע בכיוון החיובי. הגוף עובר דרך  $X=110$  cm ( $A_{1-5}$ ) בפעם השלישית ב- $t=9.3$ s.

רוב הקשיים שיש לתלמידים בבעיה זו מיוחסים ישירות לחוסר היכולת לדמיין את התנועה המוצגת בגרף המהירות לעומת הזמן. בכל אופן, הם גם עושים מגוון של טעויות אחרות בנסותם להפיק מידע לגבי ההעתק מגרף מהירות-זמן. ברמה היסודית ביותר, תלמידים יכולים לחשב את ההעתק המיוצג ע"י השטח של ריבוע אחד, אך לא לדעת מה לעשות עם מספר זה. תלמידים היודעים שעליהם לכפול את שטחו של ריבוע אחד במספר הכולל של הריבועים כדי למצוא העתק כולל, לעתים קרובות לא יכולים להחליט אלו ריבועים עליהם לספור. לדוגמא, בספירת הריבועים "מתחת לעקום", כמה תלמידים כוללים את כל הריבועים בין העקום והשורה התחתונה של הרשת (גריד). ע"י התעלמות מן הציר  $v=0$ , הם נכשלים בהבנת תפקידו בהגדרת השטחים החיוביים והשליליים. הם אינם מקשרים שטח חיובי בגרף מהירות-זמן עם העתק בכיוון החיובי או שטח שלילי עם העתק בכיוון השלילי. ברמה מתוחכמת יותר של קושי, תלמידים לעתים קרובות לא מבינים שכדי לענות על שאלה לגבי המיקום ברגע מסוים, עליהם להתייחס למידע שאיננו מסופק ע"י גרף מהירות-זמן. במקרה זה, על התלמידים להשתמש בתנאי ההתחלה ( $X=0$ ) הנתון במבוא לבעיה.

## ביקורת על הדוגמאות

מאפיין נפוץ של הדוגמאות שנדונו הוא שכדי לענות נכון על השאלות, על התלמיד לעשות יותר מאשר פשוט להיזכר בפרוצדורה, כגון לחשב שיפוע של גרף מקום-זמן למציאת מהירות. נמצא שבעיות שבהן היה דרוש רק שחזור פשוט, בדרך כלל יצרו קושי מועט אצל רוב התלמידים בקורס המבוא לפיסיקה או הקורסים למורים. בכל אופן, כשהשאלה דורשת פרשנות מפורטת של גרף - התאמת קטע כתוב לגרף נלווה או השוואת שתי תנועות המוצגות על אותו גרף - זיכרון בלבד אינו מספיק. היישום המעשי של מיומנויות גרפיות בתחום כלשהו בד"כ כרוך יותר בדרך של פרשנות מאשר של זיכרון מה השיפוע של גרף מסוג מסוים מייצג. הערכה ריאליסטית של יכולת התלמיד להפיק מידע מגרף מוכרחת לכן לערב אלמנטים של פרשנות דומים לאלה הדרושים בדוגמאות שהובאו.

### 3. קשיים בקישור גרפים לעולם המציאות

בפרק 2, נבחנו כמה מהטעויות הנעשות ע"י תלמידים בייחוס תכונות שונות של גרף לתפישה הפיסיקלית שהגרף מייצג. הטעויות סווגו לחמש קבוצות קשיים, שכל אחד מהם נדון במונחים של תשובות התלמידים לבעיית גרף כתובה. קשיים אחרים, בעלי אופי דומה וגם שונה, מתעוררים כשסטודנטים מנסים ליחס גרף לעצם או אירוע מסוים בעולם המציאות.

בסדרת ניסויים בקורס המבוא לפיסיקה, התלמידים משרטטים גרף לתנועה של כדור פלדה המשוחרר מרמפה התחלתית ויכול להתגלגל לאורך צירופים שונים של מסלולי אלומיניום ישרים. שני מערכי המסלולים בתרשימים 6 (a) ו-6 (b) משמשים ליצירת תנועה קצובה ומואצת, בהתאמה. התלמידים מתבקשים לשרטט גרפי מקום-זמן ומהירות-זמן. ניתן להשתמש בשעוני עצר ובסרגל, אך לא נתונים כוונים ספציפיים לגבי הגדלים שיש למדוד או לחשב. בתנאים אלה, נמצא שהמשימה של הצגת תנועה נצפית על גרף היא קשה מאד לתלמידים רבים. מבנה המסלול בתרשים 6 (c) דומה לזה שב-6 (b), אך עם תוספת. התלמידים אינם מבצעים שום מדידות למקרה זה, אך משרטטים גרפים איכותיים של מהירות-זמן ותאוצה-זמן.

למקרה הפשוט ביותר, זה של התנועה הקצובה, כדור הפלדה מתגלגל על מסלול אופקי עם ארבעה סטופרים ממוקמים במרחקים שווים זה מזה וממשטח ההתחלה, כמוראה בתרשים 6 (a). לתיקון השפעות חיכוך, המסלול ה"אופקי" בעצם משופע קלות. הסטופרים מופעלים בו-זמנית כשהתנועה מתחילה. כל שעון נעצר כשהכדור עובר את המקום שלו. גרף מקום-זמן נכון מופיע בתרשים 7 (a). בתרשימים 7 (b)-7 (d) מופיעים גרפים של תלמידים.

בתנועה המוצגת בגרף 6 (b), הכדור מתגלגל לאורך מסלול אופקי במהירות נמוכה, מאיץ במורד המדרון המשופע, ואז מתגלגל לאורך מסלול אופקי נמוך יותר במהירות קבועה גדולה יותר. יש שעון עצר אחד לרגלי משטח ההתחלה ואחד בכל אחד מהחיבורים של חלקי המסלול. ארבעת השעונים מופעלים בו-זמנית לפני שהתנועה מתחילה. כל שעון נעצר כשהכדור עובר את המקום שלו.

גרפים נכונים של מקום-זמן ומהירות-זמן מוצגים בתרשימים 9 (a) ו-18 (a) בהתאמה. גרפים של תלמידים מופיעים בתרשימים 8 (b)-8 (d) ו-9 (b)-9 (d).

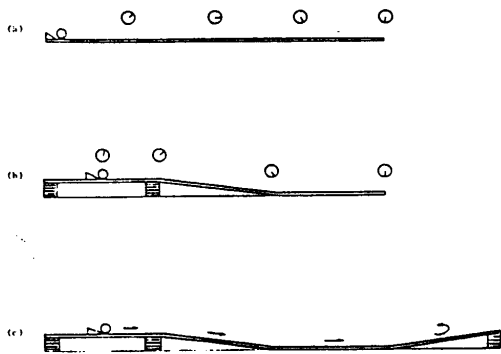


Fig. 6.

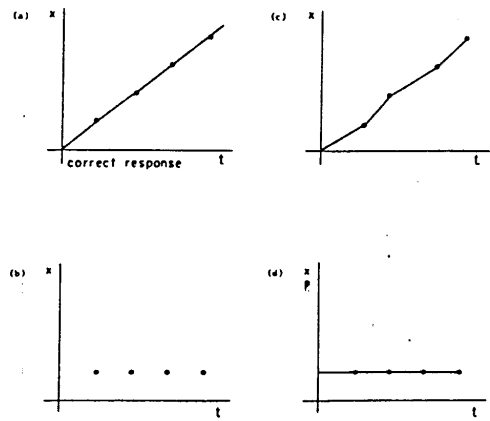


Fig. 7.

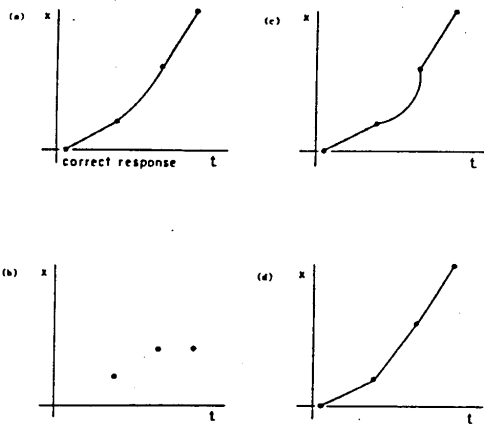


Fig. 8.

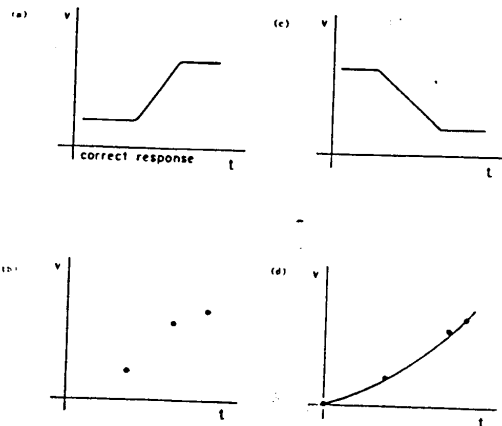


Fig. 9.

בתרשים (c) 6, החלק שנוסף למסלול ב- (b) 6 מאפשר לכדור להתגלגל במעלה מדרון משופע שני, להאט, להסתובב, ולהאיץ בחזרה למטה.

גרפים איכותיים נכונים של מהירות-זמן ותאוצה-זמן מוצגים בתרשימים (a) 10 ו-(a) 11 בהתאמה. תרשימים (b) 10 ו-(b) 11 מראים גרפים של תלמידים.

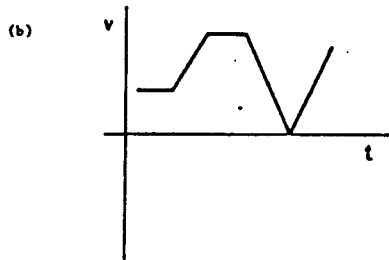
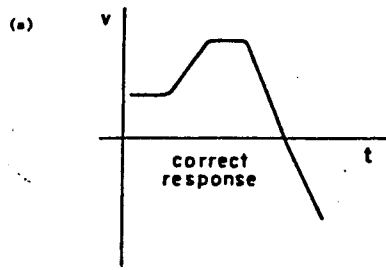


Fig. 10.

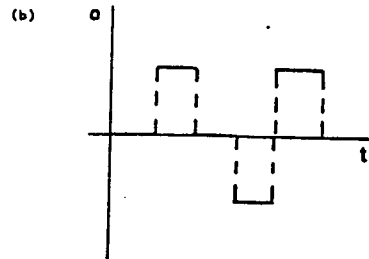
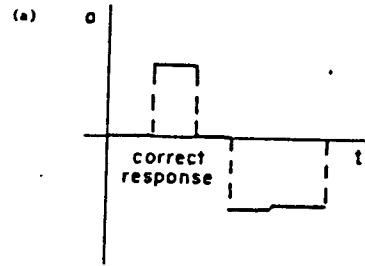


Fig. 11.

למטה יבדקו כמה מהבעיות שתלמידים פוגשים כשהם מנסים לשרטט גרפים מתצפיותיהם על שלושת התנועות שתוארו למעלה. לצורך הדיון, הטעויות שנעשו ע"י התלמידים בסוגים השונים של גרפי התנועה סווגו לחמש קבוצות של קשיים.

#### א. הצגת תנועה מתמשכת ע"י קו מתמשך

לפני שהשתתפו בקורסי הפיסיקה שבהם נערך לראשונה מחקר זה, כמעט כל התלמידים פגשו גרפי מקום-זמן בשעורי מתמטיקה. למרות ההכנה הזו, רבים לא ידעו איך להתחיל לשרטט את הגרף של תנועה קצובה שנצפתה במעבדה. לתלמידים היה קושי להחליט איזה נתונים לקחת ואיך להשתמש כראוי במדידותיהם.

לשרטוט גרף מקום-זמן לתנועה בתרשים (a) 6, יש צורך לבחור ראשית, ליצור מערכת צירים, ולסמן מספרי מקום לאורך המסלול. המקומות של העצם משורטטים אז כנגד זמנים מתאימים. במקום לעבוד לפי הפרוצדורה הזו, בכל אופן, כמה תלמידים פשוט מדדו את האורך של חלקי המסלול ואז שרטטו אורכים אלה כנגד קריאות השעון כשהכדור עבר את הסוף של כל חלק. תרשים (b) 7 מראה גרף כזה. תלמידים אלה אינם מצליחים להבחין בין מקום הכדור ( $X$ ) ברגע מסוים וההעתק שלו ( $\Delta X$ ) במשך פרק זמן. הם אינם מכירים בכך שתנועת הכדור צריכה להיות מוצגת ע"י קו מתמשך במקום ע"י סדרה של נקודות בודדות. בדומה לכך, כשהתבקשו לשרטט גרף מקום-זמן עבור גוף במנוחה, כמה תלמידים שרטטו רק נקודה אחת (בד"כ בראשית) במקום קו אופקי. לכן הגרפים שלהם אינם מראים שאין שום שינוי במקום במשך פרק זמן.

כשלוך להציג רציפות של תנועה קיים אצל כמה תלמידים המייצרים גרף של תנועה מואצת המורכב מנקודות בדידות. בגרף מקום-זמן בתרשים (b) 8, התלמיד צייר את אורך כל חלק של התנועה כמקום הכדור בסוף פרק הזמן. למרות שהתנועה רציפה, הנקודות אינן מחוברות. כמו בתנועה קצובה, חלק מהבעיה אולי נובע מבלבול בין מקום ברגע מסוים לבין העתק במשך פרק זמן.

טעויות דומות בהצגת תנועה רציפה נעשות בגרפי מהירות-זמן. בתרשים (b) 9, התלמיד אינו מציג את המהירות כגודל המשתנה כל הזמן, אלא כשלוש נקודות, שכל אחת מהן חושבה ע"י חילוק אורך המסלול בזמן שהיה דרוש לתנועה לאורכו. תלמידים המשרטטים סוג זה של גרף מקשרים מהירות יחידה עם כל חלק של המסלול, בין אם אופקי או משופע, ובד"כ מסמנים מהירות זו רק לרגע שבו הכדור נמצא בקצה חלק זה של המסלול. לחלקים האופקיים, תלמידים אלה אינם מבינים שהמהירות המחושבת נמשכת לאורך פרק זמן ולכן צריכה להיות מיוצגת ע"י קו אופקי. לחלק המשופע, הם אינם מקשרים את המהירות הממוצעת שחישבו עם המהירות הרגעית באמצע פרק הזמן שבו מתגלגל הכדור במורד. כדי לשרטט גרף מהירות-זמן נכון, על התלמיד לדעת שנקודה בגרף מהירות-זמן מייצגת את המהירות ברגע מסוים ושהקו או העקום מייצגים את השינוי במהירות במשך פרק הזמן.

כמה תלמידים המסמנים נכון ערכים של זמן ומקום עלולים לא לחבר את הנקודות בעקומה חלקה. במקום זה, הם מקשרים בין נקודה לנקודה כך שנוצר קו לא רציף, כמו בגרף מקום-זמן בתרשים (c) 7. לגרף מהירות-זמן המתאים, במקום לשרטט קו אופקי, תלמידים אלה לעתים קרובות מחשבים מהירויות ממדידותיהם לגבי מקום



וזמן, מסמנים את הנקודות, ומקשרים ביניהן בקו זיג זג. הם אינם מודעים לכך שהערכים שנמדדו הם רק קירובים ושהרגולריות הנצפית בתנועה רציפה צריכה להיות מיוצגת ע"י עקומה חלקה המתאימה לנקודות שבנתונים.

טעויות ברמה מתוחכמת יותר נעשות ע"י מספר תלמידים המשרטטים קו ישר או עקום רציף לכל חלק של התנועה, אך לא מקשרים את החלקים כראוי. לדוגמא, התלמיד ששרטט את גרף מקום-זמן בתרשים (c) 8 שרטט פיתולים במקום עקומות חלקות לקישור החלקים. פיתול או חוד מצביע על שינוי פתאומי במהירות שאינו מתרחש בתנועה עצמה. כשמעממים אותם עם סתירות אלו, אפילו תלמידים טובים לעתים קרובות אינם מודאגים מכך שהשיפוע משתנה בפתאומיות בגרף מקום-זמן שהם שרטטו ואינם יודעים איך צריך הגרף להיראות כדי לפתור בעיה זו.

## ב. הפרדה בין צורת הגרף ומסלול התנועה

בין הטעויות שתלמידים עושים בניסיון לבנות גרף של התנועה הקצובה המתוארת בתרשים (a) 6 יש ניסיונות לשחזר את המראה של התנועה. מספר תלמידים מתקשים לקבל את הרעיון שתנועה קצובה על מישור אופקי יכולה להיות מיוצגת ע"י גרף מקום-זמן בעל שיפוע תלול, כמוראה בתרשים (a) 7. הם מקבלים שצורת הגרף צריכה להיות דומה לצורת המסלול ולכן משרטטים קו אופקי, כמו בגרף שבתרשים (d) 7. ציפיות דומות נצפו גם בקרב תלמידים צעירים יותר.

הפרדה בין גרף התנועה לבין צורת המסלול נראית קשה במיוחד בתנועות שבהן גם חלקים משופעים, כמו המסלול המתואר בתרשים (b) 6. גרף נכון של מקום-זמן, כש-X נמדד לאורך המסלול, מוצג בתרשים (a) 8. הגרף מורכב מקו ישר בעל שיפוע מתון למסלול האופקי הראשון, אחריו קטע המתעקם כלפי מעלה למסלול המשופע, וקטע ישר בעל שיפוע תלול למסלול האופקי האחרון. תלמידים רבים אינם מקשרים את שתי התנועות הקצובות האופקיות בכל אחד מהקטעים האופקיים של המסלול עם שני קווים משופעים בעלי שיפוע שונה, אך קבוע, בגרף מקום-זמן. הם גם לא חוזים שהתנועה לאורך הקטע המשופע של המסלול תיוצג ע"י עקומה בגרף. גם כאשר תלמידים מסמנים את המקום ואת קריאות השעון נכון, עלול להיות להם קושי להחליט האם לקשר את הנקודות בקווים ישרים או עקומים. מספר תלמידים מראים חוסר רצון לשרטט עקומות לקישור הנקודות. במקום זה הם מנסים לגרום לגרף מקום זמן להיראות כמו המסלול ע"י שרטוט גרף המורכב משלושה קטעים של קו ישר, כמו בתרשים (d) 8.

כשתלמידים מתבקשים לשרטט גרפים מבלי לבצע מדידות, אפילו סביר יותר שהם יכללו תווים המשקפים את צורת המסלול. לדוגמא, כשמציגים להם את הדיאגרמה של שלושת המסלולים שבתרשים (b) 6, אך עם הכדור ממוקם בתחילת המסלול הראשון, תלמידים לעתים קרובות מייצרים גרפי תנועה שבהם פרקי הזמן לשלושת החלקים הם באורך שווה. מעטים לוקחים בחשבון את העובדה שבגלל מהירותו הגדלה הכדור מבלה פחות זמן בכל חלק. זה גם לא נדיר לתלמידים לשרטט את הקטע הראשון והשלישי של גרף מקום-זמן מקבילים זה לזה, בדיוק כמו שהחלק הראשון והשלישי של המסלול מקבילים. לעתים, אם הם מתבקשים לשרטט גרף מהירות-זמן לתנועה זו, תלמידים מייצרים גרף כמו זה שבתרשים (c) 9, שבו הגרף דומה יותר למסלול העצם הנע מאשר לשינוי המהירות עם הזמן.

נמצא שתלמידים גם יש בעיה בהפרדה בין צורת הגרף לבין מסלול התנועה במצב ההפוך של מעבר מהצגה גרפית לסיטואציה במעבדה. כשבמקום להתבקש לשרטט גרף לתנועה נצפית, תלמידים מכוונים לייצר תנועה המיוצגת בגרף, הם לעתים קרובות ינסו לסדר את המסלולים כך שיראו כמו גרף מקום-זמן או גרף מהירות-זמן שהם מנסים לפרש.

## ג. הצגת מהירות שלילית בגרף מהירות - זמן

כשמעורבת גם מהירות שלילית, כמו שמתחייב במקרה שעצם נע הופך כוון, תלמידים לעתים קרובות לא יכולים לתרגם את האירוע הפיזיקלי הממשי להצגה נכונה על גרף מהירות-זמן. בתנועה שבתרשים (c) 6, הכדור מתגלגל במעלה המסלול המשופע השני, מסתובב, ואז מתגלגל למטה. הגרף הנכון בתרשים (a) 10 מראה מהירות תחילת קבועה במסלול האופקי הראשון. מהירות גדלה בקצב קבוע כשהכדור מתגלגל במורד המדרון הראשון, תנועה קצובה בקטע האופקי השני, מהירות קטנה כשהכדור מתגלגל במעלה המדרון השני, ומהירות גדלה כשהכדור מתגלגל למטה. ההיפוך בכוון על המדרון השני מסומן רק ע"י החיתוך עם הציר האופקי. הכיפוף בקו בנקודה זו משקף את השינוי בתאוצה בגלל כוח החיכוך כשהכדור מתגלגל במעלה ובמורד המדרון. מאחר ששום מדידות אינן נעשות במקרה זה, שרטוט קביל של תלמיד עלול לא להראות קו מכופף.

בשרטוט גרף של התנועה שבתרשים (c) 6, תלמידים לעתים קרובות נכשלים בהצגת תנועת הכדור במדרון השני ע"י קו החותך את ציר  $V=0$ . במקום זה, הם יוצרים גרף, כמו זה שבתרשים (b) 10, שבו יש "V" עם נקודת קצה המסמנת את רגע הסיבוב לאחור. השינוי בכוון הגרף נראה כניסיון לייצג על הנייר את היפוך הכוון של התנועה הממשית במרחב.

#### ד. ייצוג תאוצה קבועה בגרף תאוצה-זמן

לתלמידים יש גם קושי בשרטוט גרף תאוצה-זמן איכותי נכון לתנועה של עצם שמאט, מסתובב לאחור, ומאיץ בכיוון ההפוך. המצב מסובך עוד יותר כשלא רק המהירות, אלא גם התאוצה משנה כוון. זה קורה בתנועה שבתרשים (c) 6. שלא כמו סימן המקום או המהירות של הכדור, סימן התאוצה אינו מידי, אלא מוסק. גרף תאוצה-זמן נכון מוצג בתרשים (a) 11. שרטוט גרף כזה דורש התחשבות בקשר בין המהירות והתאוצה בכל קטע של המסלול. יש שני פרקים של תאוצה אפס המתאימה לקטעים האופקיים של המסלול. תאוצת הכדור כשהוא מתגלגל במורד המדרון הראשון מובאת ע"י קו אופקי מעל ציר ה- $a=0$ . התאוצה במדרון השני היא שלילית בעקביות עם המהירות החיובית הקטנה כשהכדור מתגלגל מעלה ומהירות שלילית גדלה כשהוא מתגלגל מטה. ההפרש בגודל התאוצה לתנועה במעלה ובמורד המדרון משקף את ההשפעה השונה של החיכוך בכל מקרה. לא נצפה לפרט מסוג זה בגרפים האיכותיים ששרטטו ע"י התלמידים. במקום לשרטט גרף תאוצה-זמן עם המאפיינים שתוארו, התלמידים מייצרים מגוון של גרפים שונים. יש קושי מועט לשרטט גרף של התאוצה לשלושת הקטעים הראשונים של התנועה. בכל אופן, המדרון השני מציג בעיות. תו שכיח בגרפים שגויים רבים לחלק זה של התנועה הוא הצגת התאוצה במדרון ע"י שני קווים אופקיים נפרדים, אחד חיובי ואחד שלילי. הסדר עלול להשתנות, אך בשני המקרים התאוצה המוצגת אינה רציפה באופן חד ואינה עקבית עם התנועה הממשית. הגרף השגוי בתרשים (b) 11 מראה תאוצה חיובית למשך פרקי הזמן שבהם העצם מאיץ ותאוצה שלילית לפרקי הזמן שבהם העצם מאט. טעות מסוג זה שכיחה ומשקפת את האסוציאציה של תאוצה שלילית עם עצם המאט את מהירותו. נמצא שקושי תפישתי זה מתמיד ומעכב את התקדמותם של תלמידים רבים שאינם מבינים שעצם עם תאוצה שלילית יכול להאיץ (אם גם המהירות שלילית) או להאט (אם המהירות חיובית). תלמידים העושים את הטעות ההפוכה של שרטוט תאוצה חיובית לתנועה במעלה המדרון השני ותאוצה שלילית לתנועה במורד המדרון מקשרים את כוון התאוצה עם כוון התנועה. תלמידים רבים אינם מודעים לכך שלא ניתן לדעת מגרף תאוצה-זמן האם העצם מאיץ או מאט או באיזה כוון הוא נע.

#### ה. הבחנה בין סוגים שונים של גרפי תנועה

כשתלמידים מתבקשים לשרטט גרפי מקום-זמן, מהירות-זמן, ותאוצה-זמן לתנועה מודגמת במעבדה, הם לעתים קרובות משרטטים שלושה גרפים בעלי אותה צורה בסיסית. אפילו כשהם מבצעים מדידות של תנועה ומשיגים נתונים לשרטוט, נמצא שתלמידים לעתים קרובות מנסים לצייר את צורות הגרפים תואמות אחת את השניה. לדוגמא, התלמיד ששרטט את גרף מהירות-זמן המוצג בתרשים (d) 9 לייצוג התנועה שבתרשים (b) 6 סימן את נקודות הנתונים נכון, אך אז הוסיף גם נקודה ב- $V=0$ . התלמיד קישר אז את כל הנקודות בגרף מהירות-זמן בדרך של חיקוי גרף מקום-זמן שזה עתה סיים. גרף נכון דומה לגרף שבתרשים (a) 8. תלמידים עושים טעויות דומות בשרטוט גרף תאוצה-זמן לתנועה שעבורה שרטטו גרף נכון של מהירות-זמן. מספר תלמידים מתקשים לקבל את הרעיון שאותה תנועה יכולה להיות מוצגת ע"י גרפים בעלי צורה מאד שונה.

#### ביקורת על הדוגמאות

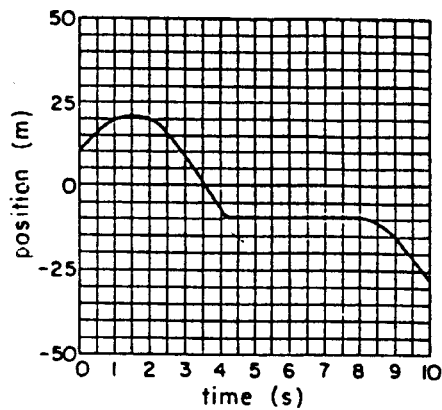
רבים מהקשיים הנדונים בחלק זה אינם צפים על פני השטח במהלך ההוראה הרגילה. רוב התלמידים בקורס המבוא לפיסיקה ובקורסי ההכנה למורים היו בעלי המיומנויות הדרושות לשרטוט גרפי תנועה עבור נתונים היכולים להיות מסומנים באופן ישיר או לעבור באופן כמעט מכני דרך פרוצדורה אלגוריתמית. נמצא שרוב התלמידים חסרי המיומנויות הנדרשות בכניסה לקורס יכולים בדרך כלל לפתח דרגה זו של מומחיות בעזרת הדרכה ספציפית. בכל אופן, כשבעיה דורשת ניתוח שאליו אין לתלמיד גישה - שרטוט גרפים לתנועה השונה איכותית מתנועות שפגש קודם או מציאת מידע מתוך הגרף ולא מקריאה ישירה - פרוצדורות משוננות אינן יעילות. דרוש ידע עמוק יותר. הדוגמאות שהובאו משלבות סוגים שונים של שאלות מאלה הנשאלות על ניסוי מעבדה והדגמות. כל אחת מהדוגמאות דרשה שהתלמידים יכירו בקשר בין התנועה הממשית ואחד או יותר מהייצוגים הגרפיים שלה. היכולת להפוך חשיבה בתרגום סיטואציה מעבדה לגרף וגרף לסיטואציה מעבדה דורשת דרגה של הבנה מעבר לזו הנרכשת בד"כ ברוב קורסי הפיסיקה.

#### 4. השלכות להוראה

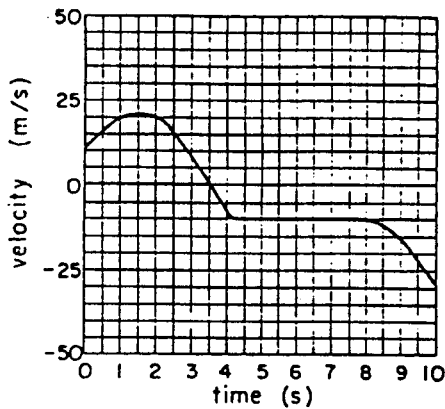
דנו בכמה בעיות בשרטוט וניתוח גרפים המשקפות קושי בקישור בין גרפים ונושא ספציפי. הדוגמאות נאספו במשך מספר שנים מתצפיות על כמה מאות תלמידים שלמדו קינמטיקה. הטעויות שזוהו הופיעו באופן ברור באוכלוסיות שונות וברמות שונות של תחכום. בחלק זה, נשקול כמה משמעויות להוראה. תוצאות המחקר הובילו לתכנון מודל להוראת קינמטיקה. החומר פותח, נבדק, והותאם בקורס מיוחד להכנת מיעוט של תלמידים להצלחה בפיסיקה, חומר זה שימש מאז עם אוכלוסיות אחרות, כולל מורים, תלמידי מנהל עסקים, ותלמידי אמנות. נציג כמה דוגמאות של אסטרטגיות הוראה שנמצאו יעילות בעזרה לתלמידים לפתח יכולת בקישור גרפים לתפישות פיסיקליות ובקישור גרפים לעולם המציאות.

במהלך ההוראה ניתן לתלמידים תרגול רב בבחירת התכונה המתאימה של הגרף להשגת המידע הדרוש. דוגמא אחת של איך מנסים לפתח יכולת זו מובאת בשאלת מבחן המבוססת על שלושה גרפי תנועה שונים ובעלי צורה זהה. לתלמידים מוצגים הגרפים של מקום-זמן, מהירות-זמן, ותאוצה-זמן המובאים בתרשים 12. נאמר להם שהמהירות התחילית בכל מקרה היא  $10 \text{ m/s}$  והם מתבקשים למצוא את המהירות ב-  $t=9\text{s}$ .

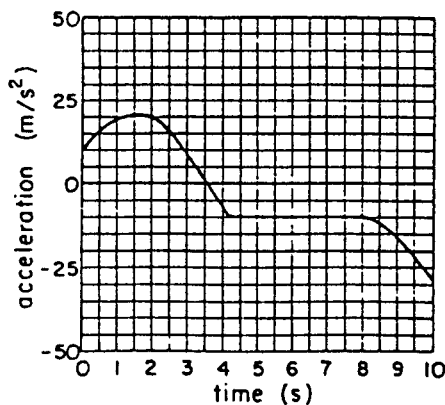
המפגש עם כל שלושת הסוגים של גרפי תנועה באותו זמן עוזר להבהיר לתלמידים את ההבדל בדרך שבה מועבר אותן מידע בכל גרף. למרות שהגרפים זהים בצורתם, התנועות המוצגות שונות מאוד. מידע לגבי המהירות צריך להיות מופק מתכונה אחרת של כל גרף.



התלמידים מוצאים את המהירות מגרף מקום-זמן ע"י חישוב השיפוע ( $-10 \text{ m/s}$ ) ואת המהירות מגרף מהירות-זמן ע"י קריאת הקואורדינטה האנכית ( $-15 \text{ m/s}$ ). בגרף תאוצה-זמן, הם צריכים לבדוק את השטח מתחת לעקום בין  $t=0$  ו-  $t=9\text{s}$ . משום שהשטחים החיוביים והשליליים מתקזזים, השינוי הכולל במהירות הוא אפס. לכן המהירות ב-  $t=9\text{s}$  זהה למהירות התחילית ( $10 \text{ m/s}$ ). התלמידים רואים שאינם יכולים למצוא את ערך המהירות התחילית מגרף תאוצה-זמן אלא צריכים להתייחס למבוא לבעיה. לכן בנוסף למתן תרגול בהפקת מידע מגרפי תנועה, סוג זה של בעיה מכוון את תשומת הלב למה שניתן ולא ניתן ללמוד מהצגה גרפית מסוימת.



אנו גם מקנים לתלמידים ניסיון בניתוח גרפים בהקשרים שונים מקינמטיקה. סוגים דומים של שאלות ניתוח גרפים מוצגות בנושאים שונים בקורס המבוא בפיסיקה. כמה דוגמאות הן מסה כנגד נפח, מומס כנגד ממיס, והחום המועבר כנגד העלייה בטמפרטורה. לכל סוג של גרף, התלמידים מתבקשים לזהות את הגדלים הפיסיקליים המוצגים ע"י הקואורדינטות של נקודה, ע"י ההפרש בין הקואורדינטות של שתי נקודות, ע"י שיפוע הקו בנקודה, וכו'. הם נשאלים סדרת שאלות לגביהן הם צריכים להחליט האם המידע הדרוש יכול להיות מוסק מהשיפוע או הגובה של הגרף. בנוסף להקניית מיומנות גרפית, תרגול בניתוח גרפים דומים בהקשרים שונים עוזר גם להעמקת ההבנה של תפישות קשורות כמו צפיפות, ריכוז, וקיבול חום.



כמה מתרגילי הגרפים שהוצגו לתלמידים מתייחסים לחומר שאינו מתחום הקורס. לדוגמא, אפשר לתת לתלמידים גרף המראה את שינוי הטמפרטורה עם עומק האוקיאנוס, שינויים בגובה עם המרחק מאתר מסוים, או צריכת השמן במשך פרקי זמן ארוכים.

יש שתי מטרות להרחבת התרגול בניתוח גרפים מעבר לפיסיקה:

- 1) לפתח יכולת כללית לעבודה עם גרפים העשויה להיות שימושית לתלמידים הרבה לאחר שהם ישכחו את רוב הפיסיקה שלהם,
- 2) לנצל את עומק ההבנה הגדל כתוצאה משימוש באותה פרוצדורה וסיבתיות בהקשרים שונים.

Fig. 12.

מניתוח הצלחת התלמידים בשאלות במבחנים, נמצא שהיכולת לבחור נכון האם להפיק מידע מהגובה, השיפוע או השטח מתחת לגרף מתפתחת לאט אך בעקביות ככל שתלמידים רוכשים ניסיון עם גרפים בהקשרים שונים. מרכיב חשוב בהבנת הקשר בין הצגה גרפית והמציאות שהיא מייצגת היא היכולת לתרגם אחורה וקדימה בשני הכוונים. מערכת תרגילים מיוחדת במודל על קינמטיקה מתוכננת לעזור לתלמידים ללמוד לתרגם מהצגה גרפית למציאות פיסיקלית ולהפך.

בכמה מתרגילים אלה, התלמידים מתבוננים בכמה תנועות של כדורים מתגלגלים על מסלולים ואז בונים גרפים המייצגים את התנועות. בעלי אותה חשיבות, בכל אופן, הם ניסויים שבהם ניתנים לתלמידים גרפים של מקום או מהירות כנגד זמן והם מתבקשים להשתמש בכדורים ובמסלולים לייצר את התנועות המיוצגות בגרפים. למטה מובאים כדוגמאות תרגיל וניסוי שבהם תלמידים נדרשים להתקדם לחילופין בשני הכוונים.

אחת התנועות שהתלמידים מתבקשים להתבונן בה, למדוד, ולבנות גרפים מוצגת בתרשים (a) 13. הכדור מתחיל ממנוחה, מהירותו גדלה כשהוא מתגלגל במורד המסלול המשופע הראשון. אז הוא מתגלגל בתנועה קצובה לאורך המסלול האופקי הראשון, מאט במעלה המדרון השני, מסתובב לאחור, ומתגלגל למטה. מתג בנקודה A מאפשר הכנסת חלק נוסף של המסלול כך שהכדור מתגלגל לאורך מסלול משופע ארוך יותר בדרך למטה מאשר בדרך למעלה. התנועה נפסקת בקטע שני של מסלול אופקי.

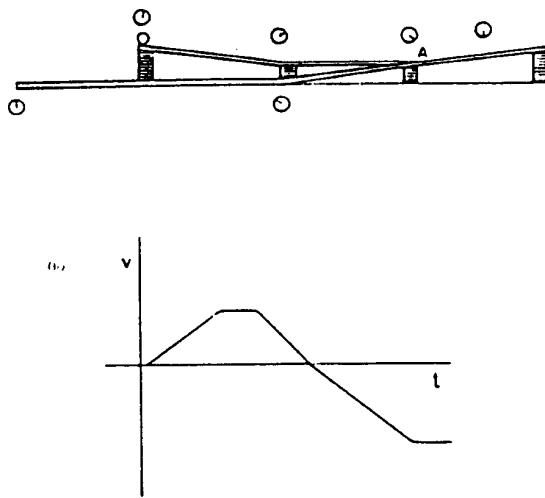


Fig. 13.

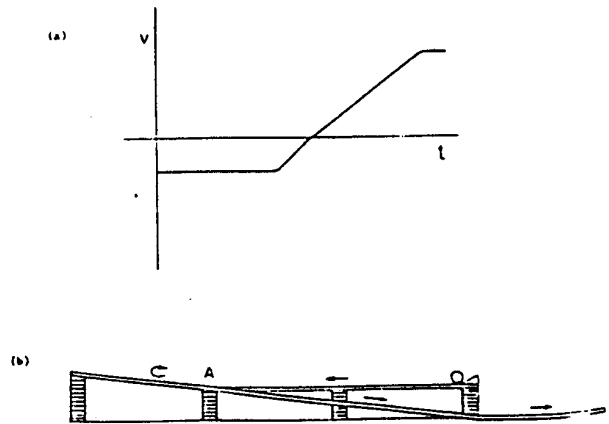


Fig. 14.

יצירת גרף נכון של מהירות-זמן עבור התנועה התברר כאתגר לרוב התלמידים. לבניית גרף מהירות-זמן שבתרשים (b) 13, התלמידים צריכים להיות מסוגלים לקשר את התנועה הממשית של הכדור לערכים שונים של מהירות, לקשר ערכים אלה עם זמנים מתאימים, ולהציג מידע זה על גרף. על התלמידים לראות קודם שהמהירות שווה אפס בשני רגעים (כשהכדור משוחרר וכשהוא מסתובב לאחור), שהמהירות קבועה לאורך הקטעים האופקיים של המסלול, ושהמהירות משתנה לאורך המדרונות. התלמידים צריכים אז לתרגם תצפיות אלה ואת מדידותיהם לנקודות וקווים שהם משרטטים על גרף מהירות-זמן. לחילופין עם ניסויים שבהם נבנה גרף מתנועה, יש כמה הדורשים מהתלמיד לתרגם בסדר הפוך. תוך שימוש במערכת של מסלולי אלומיניום, על התלמידים לתכנן מערך מסלולים שיכול לייצר תנועות שונות המתוארות בגרפים. בתחילה, לרוב התלמידים יש מושג קלוש לגבי איך להתקדם. לייצור תנועה נתונה במעבדה, יש צורך קודם לנתח את הגרף, קטע אחרי קטע. אז יש להשוות את המהירויות בקטעים השונים ולהחליט על פרקי הזמן שבהם העצם מגדיל את מהירותו, מקטין את מהירותו, וכיו'. לבסוף יש לסדר את קטעי המסלול כך שהמעברים ביניהם יהיו חלקים.

לייצור התנועה המתוארת בגרף שבתרשים (a) 14, על התלמידים ליצור תמונה מנטלית שבה הכדור נע בכיוון השלילי במהירות קבועה נמוכה יחסית לאורך מסלול אופקי, מאט במעלה מדרון, מסתובב לאחור, מאיץ (בקצב מעט מתון יותר) במורד המדרון בכיוון החיובי ולבסוף מתגלגל במהירות קבועה לאורך מסלול אופקי. התלמידים צריכים לשים לב שהכדור מגיע למהירות גבוהה יותר לאחור שהוא מסתובב מאשר לפני כן. לכן דרוש מתג

להכנסת קטע משופע שני שיאפשר לכדור להתגלגל לאורך מסלול ארוך יותר במורד מאשר במעלה. מערך המסלולים שיצור תנועה זו מתואר בתרשים 14(b). נמצא שתלמידים רבים זקוקים לסוג ניסויי המעבדה המתואר כדי שיוכלו לקשר בין תנועה ממשית לבין ההצגה הגרפית שלה. בסוף החלק בקורס המבוא לפיסיקה המוקדש לקינמטיקה, רוב התלמידים פיתחו מיומנות ראויה לציון בבניית גרף מתנועה נצפית וביצור תנועה המתוארת בגרף.

## 5. מסקנה

מבין המיומנויות הרבות היכולות להתפתח בלימודי הפיסיקה, היכולת לשרטט ולנתח גרף היא אולי אחת מהחשובות ביותר. כדי שיוכלו ליישם את הכלי רב העוצמה של ניתוח גרפים במדע, על התלמידים לדעת איך לנתח גרפים במונחים של הנושא הנדון. הם צריכים להיות מסוגלים לבחור את תכונת הגרף המכילה את המידע הדרוש ולהכיר ביחסים העשויים להתקיים בין גרפים שונים. הם צריכים לדעת להציג מערכת אמיתית באופן גרפי ולדמיין מערכת מתוך ההצגות הגרפיות שלה. כפי שהדוגמאות שהובאו מראות, בכל אופן, לתלמידים רבים יש צרות בכל אחד מתחומים אלה. יש גם אספקטים חשובים אחרים של גרפים שלא טופלו במחקר זה וידועים כקשים לתלמידים, למשל הקשר בין יחסים אלגבריים וגרפים.

כפי שניתן להסיק מהדיון במאמר זה, המחברים מאמינים שיכולת לגבי גרפים יכולה למלא תפקיד מכריע בעזרה לתלמידים להעמיק את הבנתם בתפישות הקינמטיות. זה נכון גם לנושאים אחרים בפיסיקה. בכל אופן, היתרונות לתלמידים של הדגשת גרפים בקורס פיסיקה נמשכים מעבר להשלכותיהם על החומר הנלמד. לרוב תלמידי הפיסיקה, בתיכון או בקולג', יכולת לעבוד עם גרפים תהיה שימושית יותר בעבודה האקדמית העתידית מאשר הידע שנרכש לגבי כל נושא ספציפי. השליטה בהצגות גרפיות לעתים קרובות אינה מתפתחת באופן ספונטני ודרושה התערבות בדרך של הדרכה ישירה.