גזירת הביטוי המתמטי לתאוצה צנטריפטלית

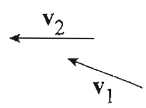
עדי רוזן, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, ומשרד החינוך והתרבות, ירושלים

נציג בשורות אלה דרכים שונות לגזירת הביטוי המתמטי המבטא את גודל התאוצה הצנטריפטלית בתנועה מעגלית קצובה, נעיר מספר הערות דידקטיות, ונציע דרכים לשלב את הרעיונות בהוראת המכניקה.

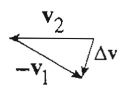
ראשית, שתי הערות:

1. במאמר זה הוקטורים מסומנים באותיות עבות (bold), למשל **v** ,**r** ו- **a**. ולעומתם סקלרים סומנו באותיות נטויות (italic), למשל *r*, *v* ו- *a*. לציון גודלו של וקטור (שהוא כידוע סקלר) השתמשנו לעיתים בסימון "ערך מוחלט", למשל $|\Delta \mathbf{v}|$.

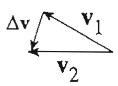
2. הפרש בין שני וקטורים, למשל בין וקטורי מהירות $\mathbf{v}_1$ ו- $\mathbf{v}_2$ (תרשים 1) ניתן לבנות באופן המתואר בתרשים 2. סרטוט זה מבוסס ישירות על הגדרת הפרש וקטורים כחבור וקטור אחד עם הנגדי של הוקטור השני. במקום זאת, אפשר לבנות הפרש וקטורים באופן המתואר בתרשים 3. (ברור שהווקטורים $\Delta \mathbf{v}$ המתקבלים בשתי דרכים אלה שווים.) במאמר זה השתמשנו בשתי הדרכים.



תרשים 1



תרשים 2



תרשים 3

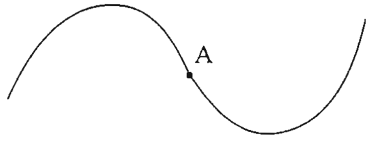
תנועה קצובה על פני מסלול עקום כלשהו

לפני שעוסקים בכיתה בתנועה המעגלית על היבטיה ויישומיה השונים, כדאי להורות פרק המרחיב את המושגים הקינמטיים החד ממדיים לתנועה במישור. במסגרת פרק כזה רצוי לדון בתנועה קצובה על פני מסלול עקום כלשהו (נגדיר כ"תנועה קצובה" תנועה בה **גודל** המהירות קבוע). דיון כזה טבעי לפתוח בשאלה: האם גוף הנע בתנועה כזו הוא גוף מואץ?

המושגים שמפנימים התלמידים בתהליך הלמידה, מעורפלים יותר מכפי שאנו עלולים לחשוב; המושג "תאוצה" אינו מושג קל להבנה, בעיקר לא אופיו הווקטורי. אחד ממקורות הקושי נעוץ **בשפה**; פיסיקאים משתמשים במונחים השאולים מחיי היום-יום כדי לכנות מושגים פיסיקליים. אני מניח שהדבר נובע מהרצון ל"הדביק" למונחים הקשרים אינטואיטיביים. אולם אליה וקוץ בה: משמעות המונחים בחיי היום-יום שונה בדרך כלל ממשמעותם בפיסיקה. במונח "תאוצה" בשימוש יום-יומי מתכוונים לתאר מצבים בהם ***גודל*** מהירותו (speed) של גוף הולך וגדל. לעומת זאת בפיסיקה משתמשים במונח "תאוצה" למצבים שבהם ***וקטור*** המהירות (velocity) משתנה; למכונית בולמת על כביש ישר עשויה להיות תאוצה חיובית מנקודת מבטו של הפיסיקאי (כאשר ציר המקום מנוגד לכיוון תנועת המכונית).

מכונית הנוסעת סביב כיכר, ומד המהירות (שהוא אגב מד-***גודל*** מהירות, ובאנגלית speedometer) מורה באופן יציב על 60 קמ"ש - מואצת מנקודת הראות של הפיסיקה. אולם נדמה, ששום "אדם ברחוב" לא יאמר ש"הנהג מאיץ" בשני מקרים אלה. ***המשמעות השונה במדע ובחיי יום-יום שיש למונחים, גורמת לבלבול ולתפיסות מוטעות של מושגים***. חשוב שהתלמידים יהיו מודעים לקיומן של שתי מערכות המושגים, וכי עליהם להתמודד עם שתיהן. ***מודעות התלמידים לבעיית השפה מפחיתה בלבול ותפיסות מוטעות של מושגים***.

לאחר שהתלמיד משתכנע שלגוף הנע בתנועה קצובה על מסלול עקום יש תאוצה, ניתן להצעידו צעד נוסף, ולהראות ***שהתאוצה בכל נקודה ניצבת למסלול התנועה***. (למעשה תיתכנה ***נקודות*** לאורך המסלול העקום בהן התאוצה שווה לאפס, כמו למשל בנקודה A שבתרשים 4, אך נדמה שבשלב מוקדם זה, לא כדאי לספר לתלמיד את ***כל*** האמת).



תרשים 4

דרכים אנליטיות לגזירת גודל התאוצה בתנועה קצובה על מעגל

1. גזירה המתבססת על השיטה של בידוד משתנים

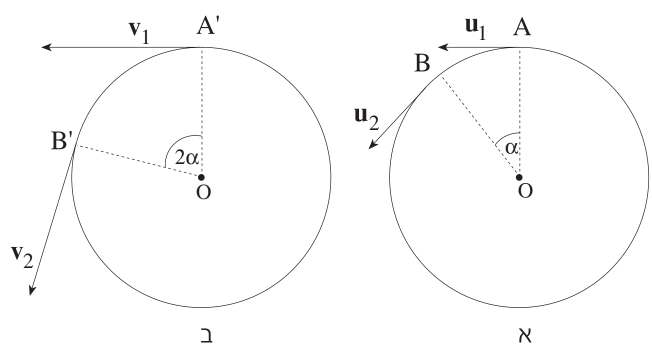
חקירת תלות של משתנה תלוי y במשתנים בלתי תלויים x_1, x_2 ... נעשית בשלבים: בוחנים את התלות של y ב- x_1 כאשר שאר המשתנים הבלתי תלויים קבועים. לאחר מכן חוזרים על התהליך לגבי שאר המשתנים הבלתי תלויים. מהקשרים המתקבלים מוצאים לבסוף את תלות y במשתנים הבלתי תלויים x_1, x_2 ... . לשיטה זו נחשפים התלמידים בשיעורי המעבדה; למשל, בניסוי "החוק השני של ניוטון"[(1)] בוחנים את תלות התאוצה בכוח כאשר המסה "מוקפאת", ולאחר מכן בוחנים את תלות התאוצה במסה כאשר "מקפיאים" את הכוח.

במאמר זה מתואר כיצד להשתמש בשיטה של בידוד משתנים לשם ניתוח תלות התאוצה הצנטריפטלית בפרמטרים הקובעים אותה.

תחילה דנים עם התלמידים בשאלה "באֵילו גורמים תלוי גודל התאוצה הצנטריפטלית?". מהדיון, המבוסס על סרטוט וקטורי מהירות והפרשם, ניתן 'לדלות' מהתלמידים שגודל התאוצה תלוי בגודל מהירות הגוף v, וברדיוס מסלולו R.

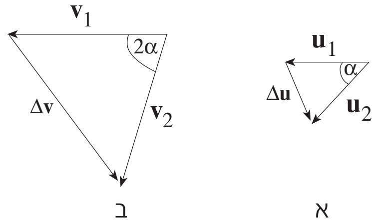
מציאת אופי התלות נעשית בשני שלבים:

א. מציאת תלות התאוצה a במהירות v: בוחנים כיצד משתנה התאוצה הרגעית כאשר המהירות גדֵלה פי שניים. לשם כך מתבוננים בתנועת גוף שגודל מהירותו u, על מעגל שרדיוסו R (גוף א' בתרשים 5 א'), ועל תנועת גוף במהירות שגודלה $v = 2u$ על



תרשים 5

פני מעגל בעל אותו רדיוס (גוף ב' בתרשים 5 ב'). עורכים השוואה בין גדלי התאוצות הממוצעות על פני מרווח זמן Δt. במרווח זמן זה גוף א' נע מנקודה A ל-B, וגוף ב' נע מנקודה 'A ל-'B. גודל תאוצה ממוצעת מוגדר על ידי הביטוי $\bar{a} = |\Delta\mathbf{v}|/\Delta t$. מאחר ו- Δt שווה בשתי התנועות, ניתן להסתפק בהשוואת גדלי השנויים של המהירויות. בתרשימים 6 א' ו- 6 ב' סירטטנו את ההפרשים של וקטורי המהירויות של גופים א' ו- ב' בפרק הזמן Δt. משולש 6א' דומה למשולש AOB ומשולש 6ב' דומה למשולש A'O'B' כפי שניתן לראות בתרשים 9.



תרשים 6

שני המשולשים שהתקבלו הם שווי שוקיים. המשולש שבתרשים 6 ב' שונה מהמשולש בתרשים 6 א' בשני דברים:

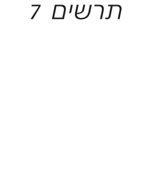
(1) שוקיו ארוכות פי שניים.

(2) זווית הראש שלו גדולה פי שניים.

בוחנים פי כמה גדול אורך בסיס המשולש שבתרשים 6 ב' מאורך בסיס המשולש שבתרשים 6 א'. ניתן לנסח את הניתוח באופן מילולי, ובלשון מתמטית.

ניסוח מילולי: אִילו שני המשולשים היו שווים בזווית הראש, ורק שוקיו של המשולש שבתרשים 6 ב' היו ארוכות פי שניים, הרי $|\Delta\mathbf{v}|$ היה גדול בדיוק פי שניים (תכונה של משולשים דומים). אילו השוקיים היו שוות, ורק זווית הראש היתה גדולה פי שניים, אז עבור מרווח זמן Δt קצר, $|\Delta\mathbf{v}|$ היה שוב גדול פי שניים, כי: עבור זווית גדולה פי שניים אורך הקשת במעגל שרדיוסו v גדולה פי שניים. אם Δt קצר, כלומר הזוויות קטנות, $|\Delta\mathbf{v}|$ שווה בקירוב לאורך הקשת. לסיכומו של דבר, אם השוקיים ארוכות פי שניים וגם זווית הראש גדולה פי שניים, אזי $|\Delta\mathbf{v}|$ גדול פי ארבעה.

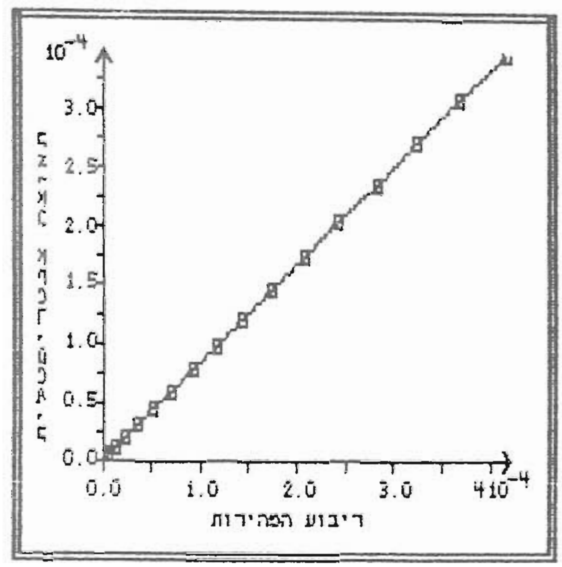
ניסוח מתמטי: מורידים גובה לבסיס במשולש שבתרשים 6 א'. קל להווכח כי $|\Delta\mathbf{v}| = 2v\sin\frac{\alpha}{2}$ (תרשים 7).



תרשים 7

עבור Δt קצר $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ לכן $|\Delta \mathbf{v}| \approx 2\upsilon\,\frac{\alpha}{2}$ כיוון ש- υ גדל פי שניים ו- α גדולה פי שניים הרי $|\Delta \mathbf{v}|$ גדול פי ארבעה.

ניתן גם להתבסס על הקשר $|\Delta \mathbf{v}| = 2\upsilon\,\sin\frac{\alpha}{2}$ ולבנות באמצעות גליון אלקטרוני גרף המתאר את התאוצה כפונקציה של ריבוע המהירות. גרף כזה מתואר בתרשים 8.



תרשים 8

מצאנו איפוא, שאם מגדילים את המהירות פי שניים, יגדל גודל התאוצה פי ארבעה. מכאן:

$$a_R \propto v^2 \qquad (1.1)$$

ב. מציאת תלות a ב- R: בוחנים כיצד משתנה התאוצה הרגעית כאשר רדיוס המעגל גדֵל פי שניים. לשם כך מתבוננים בתנועתם הקצובה של שני גופים בפרק זמן Δt, כאשר גדלי מהירויות שני הגופים שווים, אך רדיוס המסלול של גוף ב׳ גדול פי שניים מזה של גוף א׳. במקרה זה מתקבלים שני משולשים שווים באורכי השוקיים, אולם, למשולש המתאים לתנועת הגוף על מעגל בעל רדיוס כפול יש זווית ראש α קטנה פי שניים, לכן השינוי במהירות של גוף זה בזמנים קצרים יהיה קטן פי שניים, לכן:

$$a_R \propto \frac{1}{R} \qquad (1.2)$$

מ- (1) ו- (2) נובע כי:

$$a_R \propto \frac{\upsilon^2}{R} \qquad (1.3)$$

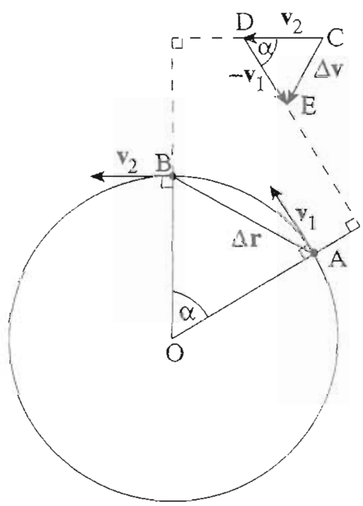
2. גזירה המתבססת ישירות על הגדרת התאוצה הרגעית

גזירה אחרת מתבססת ישירות על הגדרת התאוצה הרגעית. מוצאים את הגבול של שינוי המהירות במרווח הזמן השואף לאפס כלומר:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (2.1)$$

זו השיטה המקובלת בבתי הספר, ולמען השלמות׳ נציג גם אותה:

חלקיק סובב במעגל שרדיוסו R במהירות שגודלה υ. בעוברו מנקודה A לנקודה B בפרק זמן Δt משתנה מהירותו מ- $\mathbf{v}_1$ ל- $\mathbf{v}_2$ (תרשים 9).



תרשים 9

נוסחה (1) היא צורת כתיבה תמציתית המתארת את ההליך למציאת כיוון התאוצה וגודלה. כיוון התאוצה ידוע מדיון בתנועה קצובה על מסלול עקום כלשהו, לכן נשתמש רק באותו חלק של ההליך המתואר בנוסחה (2.1) המגדיר את גודל התאוצה $|a_R|$, שנסמנו בקיצור a_R:

$$a_R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

נוסחה (2.2) אומרת שיש למצוא ביטוי מתמטי עבור $|\Delta \mathbf{v}|/\Delta t$, ולאחר מכן לבחון מהו הגבול של הביטוי כאשר Δt שואף לאפס. נסרטט תחילה את $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. לשם כך נעתיק את וקטור $\mathbf{v}_2$ לנקודה כלשהי C (תרשים 9) כך ש- $\overline{CD} = \mathbf{v}_2$, ואת הווקטור $(-\mathbf{v}_1)$ לקצה הווקטור $\mathbf{v}_2$ כך ש- $\overline{DE} = -\mathbf{v}_1$. הווקטור $\overline{CE}$ הוא ההפרש $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$.

נסתכל על שני המשולשים שווי השוקיים OAB ו- CDE:
נסמן $\sphericalangle AOB = \alpha$. קל לראות כי גם $\sphericalangle CDE = \alpha$, לכן המשולש OAB דומה למשולש CDE (משולשים שווי שוקיים השווים בזווית הראש), לכן

$$\frac{CE}{AB} = \frac{CD}{OA} \qquad (2.3)$$

הווקטורים $\mathbf{v}_1$ ו $\mathbf{v}_2$ אמנם שונים, אך הם שווים בגודלם.
גודל מהירות החלקיק הוא υ:

$$|\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1| = \upsilon$$

נציב ב (3): $CE = |\Delta \mathbf{v}|$; $AB = |\Delta \mathbf{r}|$ (גודל וקטור ההעתק); $OA = R$ ו- $CD = \upsilon$ (גודל המהירות), ונקבל:

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{|\Delta \mathbf{r}|} = \frac{\upsilon}{R} \qquad (2.4)$$

נחלץ את $|\Delta \mathbf{v}|$ מ-(4) ונציב את הביטוי המתקבל ב-(2.2):

$$a_R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\upsilon}{R} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$

אך:
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \upsilon$$

מכאן:
$$a_R = \frac{\upsilon^2}{R}$$

3. גזירה המתבססת על אנלוגיה בין זוג הווקטורים v, a לזוג v, r

גזירה זו מוצגת בספר הפיסיקה של תכנית PSSC[2] וכן בסרט "תנועה מעגלית" מסדרת סרטי הווידאו "היקום המכני"[3].

מסתכלים על זוג הווקטורים: **v**, **r** (**r** - וקטור המקום של החלקיק ביחס למרכז המעגל) ועל הזוג **v**, **a** של החלקיק הנע בתנועה קצובה במעגל.

על זוג הווקטורים הראשון ידוע כי: **r** קבוע בגודלו, והוא מסתובב במהירות זוויתית קבועה ω. המהירות **v** היא קצב השינוי של הווקטור **r**. הקשר ביניהם (תרשים 10 א'):

★ לגבי הכיוונים: **v** ניצב ל- **r**, במגמת הסיבוב של **r**.

★ לגבי הגדלים: $\upsilon = \omega r$ (3.1)

על זוג הווקטורים **v** ו- **a** יודעים כי:
v קבוע בגודלו, והוא מסתובב במהירות זוויתית קבועה ω (בדומה לווקטור **r**, ראה תרשים 10 ב').

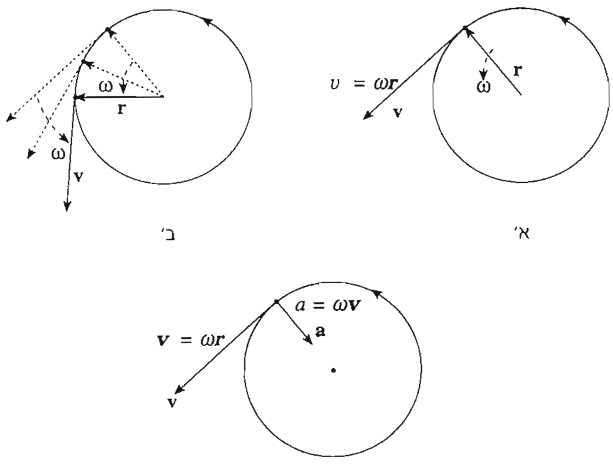
התאוצה **a** היא קצב השינוי של הווקטור **v**. ***לכן הקשר שבין a ו- v צריך להיות כמו בין r ו- v***, כלומר (ראה תרשים 10 ג'):

★ כיוונו של הוקטור **a** צריך להיות ניצב לווקטור **v** במגמת הסיבוב של **v**, כלומר ***פונה כלפי מרכז המעגל***

★ הגדלים של **a** ו- **v** צריכים לקיים קשר דומה לקשר (1), כלומר: $a = \omega \upsilon$ (3.2)

לאחר שמציבים את הביטוי ל-ω מ- (3.1) ב-(3.2), מקבלים כי:

$$a = \frac{\upsilon^2}{r}$$



תרשים 10

4. גזירה המתבססת על "נפילה" מקו משיק למעגל

את התכונה "התמדה" מקובל לייחס לגוף שכוחות חיצוניים אינם פועלים עליו, או שהכוח השקול הפועל עליו שווה לאפס. **ניוטון** ייחס "התמדה" לגופים שכוח חיצוני פועל עליהם, במובן הבא: הכוח הפועל על גוף אינו "משמיד" את המהירות שהיתה לו עם תחילת פעולתו. מהירות זו נשמרת, אולם אליה מצטרף שינוי המהירות הנובע מפעולת הכוח. המהירות והמקום בכל רגע נקבעים על ידי שני גורמים אלה.

למשל, את הנוסחה $\upsilon = \upsilon_0 + at$ לגבי תנועה שוות תאוצה על קו ישר, ניתן להבין מנקודת ראות זאת כך: כאשר כוח קבוע פועל על גוף בכיוון תנועתו, אזי אחרי פרק זמן t מהירותו υ שווה למהירות υ_0 שיש לגוף בגין התמדה, כשאליה מצטרף השינוי במהירות at שהגוף רוכש בגין פעולת הכוח. באופן דומה ניתן לפרש את

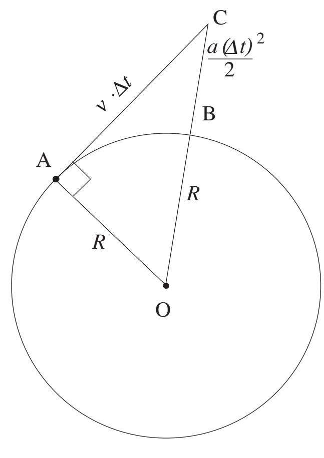
הנוסחה $\Delta x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

יש המנצלים רעיון זה כדי לגזור את הביטוי לגודל התאוצה הצנטריפטלית בתנועה מעגלית:

נניח שגוף נע בתנועה קצובה במעגל שרדיוסו R, במהירות שגודלה v. את תנועתו בפרק זמן Δt מנקודה A ל-B (תרשים 11) ניתן לראות כצרוף של שתי תנועות:

א. תנועה שהיתה מתרחשת אִילו לא היו פועלים עליו כוחות, כלומר בגין התמדה בלבד. זו תנועה קצובה מ-A בכיוון המשיק למעגל בנקודה A, במהירות שגודלה v. הגוף יעבור במרווח הזמן Δt מרחק $v\cdot\Delta t$, ויגיע לנקודה שסומנה בתרשים 11 באות C.

ב. תנועה שהיתה מתרחשת בהשפעת הכוח בלבד, ללא תרומה של המהירות ההתחלתית. הכוח הפועל על הגוף בתנועתו מ-A ל-B קבוע בגודלו אך משתנה מעט בכיוונו (הוא פונה בכל רגע כלפי מרכז המעגל). עבור Δt קצר נוכל להניח הנחת קירוב שגם כיוון הכוח קבוע. נבחר את כיוון מ- C כלפי מרכז המעגל ככיוון פעולת הכוח, ואז התנועה השנייה תתרחש מ-C ל-B, כאשר הנקודות C, B ו- O נמצאות על ישר אחד.



תרשים 11

נסתכל על המשולש OAC; $OA = R$, $AC = v\cdot\Delta t$, ו- $CB = \frac{a(\Delta t)^2}{2}$. עתה נשתמש במשפט פיתגורס עבור צלעות המשולש:

$$\left(R + \frac{a\Delta t^2}{2}\right)^2 = R^2 + (v\Delta t)^2$$

$$R^2 + Ra(\Delta t)^2 + \frac{a^2(\Delta t)^4}{4} = R^2 + (v\Delta t)^2$$

מרווח הזמן Δt קצר, לכן נוכל להזניח את המחובר $\frac{a^2(\Delta t)^4}{4}$ ביחס לאחרים, ולאחר פעולות אלגבריות מעטות נקבל:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

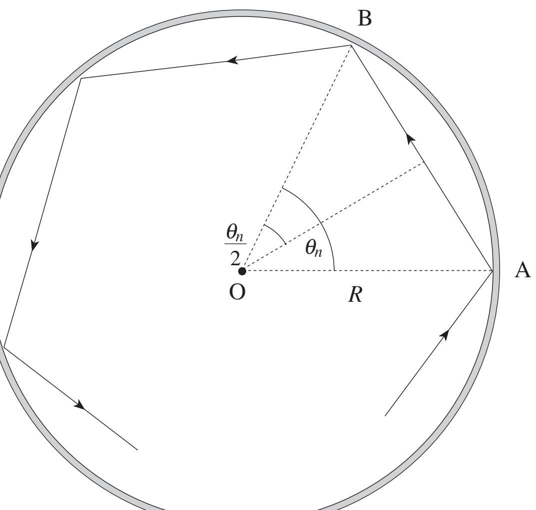
5. גזירה המתבססת על כוח רציף כגבול של סדרת "מכות"

גזירה פשוטה ומעניינת ניתנה על ידי **ניוטון** בטענה IV בכרך I של "Principia".

גזירה זו לא זכתה לתשומת לב רבה. יתכן שהדבר נובע מכך שהיא הוצגה באופן מילולי, ללא תרשימים ונוסחאות. ארונס[4] סבור שניוטון לא הציג את הגזירה במלואה בגלל זכות הראשונים השמורה ל**הויגנס**, איתו היו לניוטון חילוקי דעות וויכוחים מרים; בדיון שמופיע אחרי מספר מסקנות הנובעות מהטענה, ניוטון מודה: "... על ידי טענה כזו של מר הויגנס בספרו המצויין "Horologium Oscillatorium" הוא השווה את כוח המשיכה עם כוחות צנטריפטליים של גופים מסתובבים".

נציג את ההוכחה של ניוטון בתרגום חופשי, בליווי תרשים ופרוט הפעולות האלגבריות:

חלקיק שמסתו m נע במהירות שגודלה v בתוך מעטפת קשיחה של גליל שרדיוסה הפנימי R. התנגשויות החלקיק עם הגליל הן אלסטיות, ומסלול התנועה הוא מצולע משוכלל החסום במעטפת הגליל (תרשים 12).



תרשים 12

נסמן את מספר צלעות המצולע ב-n. זווית מרכזית של המצולע, למשל AOB , תסומן θ_n (תרשים 12).

שינוי גודל התנע בכל התנגשות:

$$\Delta p = 2mv \sin\frac{\theta_n}{2} \quad (5.1)$$

מרווח הזמן בין שתי התנגשויות עוקבות:

$$\Delta t = \frac{2R}{v} \sin\frac{\theta_n}{2} \quad (5.2)$$

קצב השינוי הממוצע של התנע מתקבל מחילוק משוואה (5.1) במשוואה (5.2):

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv^2}{R}$$

קצב השינוי הממוצע של התנע שווה לגודל הכוח הממוצע $\bar{F}$ הפועל על החלקיק $\left(\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t}\right)$, לכן נקבל:

$$\bar{F} = \frac{mv^2}{R} \quad (5.3)$$

עתה מסתכלים על סדרה של מצולעים (שלאורכם נע חלקיק במהירות v), כשמספר הצלעות שואף לאינסוף; ככל שמספר הצלעות גדול - ההתנגשויות עם הקיר נעשות קרובות יותר ויותר זו לזו, ובגבול, הכוח שהקיר מפעיל על החלקיק הוא רציף. תוצאה (5.3) נכונה לכל אחד מהמצולעים, לכן בגבול, כשמספר הצלעות שואף לאינסוף והתנועה היא מעגלית, התוצאה נשארת בעינה גם עבור הכוח הרציף.

מעניין לציין שגזירה זו אינה מתבססת על קירוב של זוויות קטנות.

עד כאן הצגנו חמש גזירות לתאוצה הצנטריפטלית. גזירה נוספת פורסמה על-ידי ***עוזי שכטר***[2].

מספר הערות לגבי הגזירות השונות

1. **בידוד משתנים:** לניתוח זה שלושה יתרונות:

א. הוא קל להבנה יחסית לניתוחים אחרים.

ב. הוא מצביע על מקור החזקה השנייה של גודל המהירות בביטוי של התאוצה הצנטריפטלית.

ג. נעשה שימוש בשיטה החשובה של בידוד משתנים. מאידך גיסא ניתוח זה מוביל רק לקשר של פרופורציה (ראה עמ' 13 תבנית (3)) ולא לשוויון, ואיננו יכולים להיות בטוחים שקבוע הפרופורציה אכן שווה ל-1.

אני מציע להפגיש לראשונה את התלמידים עם הביטוי v^2/R באמצעות גזירה זו, מפני שהיא מאפשרת ***לתלמידים לעשות את הניתוח, בהנחיית המורה, כאשר מידת ההנחיה תהיה מותאמת ליכולת התלמידים.***

2. **התבססות ישירה על הגדרת תאוצה:** גזירה זו מסתמכת ישירות על הגדרת התאוצה, היא ריגורוסית, ומהווה דוגמה לדרך בה נעשות הוכחות רבות בפיסיקה, וזו מעלה חשובה. מאידך גיסא, תלמידים מתקשים בהבנה של הוכחה זו, אינם תופסים את התמונה הכוללת, וחשים תסכול. כיוון שאני אמביוולנטי לגבי התועלת בהצגתה, אסתפק בתיאור הדרך שבה אני מתייחס לגישה זו בכיתה: לפני הצגת הגזירה, אני מציין שאני עומד להציג הוכחה מורכבת, וכי אינני דורש ידיעת כל פרטיה. יתר על כן, אני מכריז כי הם לא ידרשו להציג הוכחה זו בבחינה (להכרזה כזו יש כידוע השפעה מרגיעה מיידית). עם זאת, אני מבקש מהתלמידים לנסות להבין את התמונה הכוללת של ההוכחה, ולא להתמקד יתר על המידה בפרטים המתמטיים.

3. **אנלוגיה בין זוג הווקטורים $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$ לזוג $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$:** ניתוח זה מעורר תובנה. הוא 'אלגנטי', אך להערכתי מתאים בעיקר לתלמידים שיכולת ההבנה שלהם גבוהה מהממוצע.

שני קשיים עומדים לדעתי בפני התלמיד בהבנת גזירה זו:

א. הצורך לדמיין את המהירות כווקטור המסתובב במהירות זוויתית ω (בדומה לווקטור המקום $\mathbf{r}$). הקושי נובע מכך שנקודת האחיזה של וקטור המהירות אינה קבועה, כמו במקרה של הווקטור $\mathbf{r}$.

ב. המשפט "הוקטור $\mathbf{v}$ הוא קצב השינוי של הווקטור $\mathbf{r}$" הוא משפט קשה. לא אמליץ בכל פה על הצגת גזירה זו במסגרת הוראה תיכונית, אלא אם נעזרים בדף עבודה שתוכנן בקפידה למטרה זו.

נציין כי ברמה על-תיכונית, ניתן לבסס גזירה זו על משפט כללי האומר כי אם וקטור $\mathbf{A}$ הקבוע בגודלו מסתובב במהירות זוויתית ω, ניתן לבטא את הווקטור השווה לנגזרת של $\mathbf{A}$ לפי הזמן (נסמן אותו ב-$\dot{\mathbf{A}}$) על-ידי: $\dot{\mathbf{A}} = \omega \times \mathbf{A}$, ובפרט: $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ ו-$\mathbf{a} = \omega \times \mathbf{v}$. מכאן מקבלים את הביטוי המתמטי עבור התאוצה הצנטריפטלית.

4. **"נפילה" מקו משיק למעגל:** גזירה זו אמנם אינה תורמת ישירות להבנת המושג "תאוצה בתנועה קצובה במעגל", אך היא מעניינת בפני עצמה, ועשויה להגביר הבנה של תנועה בהשפעת כוח הפועל על גוף נע.

5. **כוח רציף כגבול של סדרת "מכות":** לגזירה של ניוטון יש ערך פדגוגי רב, ורצוי להציג אותה, אך לא ***במקום***

גזירה קודמת. גזירה זו מאפשרת לחזור על רעיונות של תאוצה צנטריפטלית וכוח צנטריפטלי מנקודת ראות חדשה, לאחר שחולף זמן מה מהגזירה הראשונה, ולאחר שפותחו המושגים ״תנע״ ו״אנרגיה״. אני רואה בכך תועלת רבה, לאור שני עקרונות מרכזיים במתודיקה של הוראת פיסיקה:

- ★ ***רוב התלמידים אינם מגיעים לתובנה בהתמודדות ראשונה.***
- ★ ***ניתן להעמיק הבנה על ידי חזרה על רעיונות שנרכשו בעבר, אך בהקשרים חדשים, ומנקודות ראות חדשות (הוראה ספירלית).***

ההקשר החדש בו מובאת התאוצה הצנטריפטלית עשיר מבחינת המושגים הפיסיקליים, ועשוי לתרום להעמקת ההבנה. במהלך הגזירה מטפלים בתרחיש של החזרת חלקיק מקיר, במטרה לקבל תוצאה חשובה, וכדי לחזק הבנה פיסיקלית קודמת. התלמיד לומד שחלקיק המתנגש בקיר התנגשות אלסטית אינו מוחזר מהקיר בכיוון הנורמל, אולם, הלימוד אינו נעשה במסגרת תרגיל סטרילי, ללא קשר לתופעות אחרות. באופן כזה ניתן גם להניח בסיס טוב לשימוש עתידי בתרחיש זה לשם פיתוח התיאוריה הקינטית של גז אידיאלי, אשר לפי תכנית הלימודים החדשה יהווה פרק לימוד חובה במסגרת המכניקה לתלמידים ברמה של 5 יחידות לימוד.

אני מציע שתלמידים יתוודעו לגזירה זו, ואצטרף לדעתו של ארונס[4] (p. 140) שלא כדאי לבזבז זמן הוראה יקר על הצגתה בשיעור, אלא שהתלמידים יתמודדו עם הניתוח ***כתרגיל מדורג***. בסוף מאמר זה הבאתי הצעה לתרגיל כזה, שאפשר לתת לתלמידים במסגרת שיעורי בית, לאחר שהם למדו את הנושאים ׳תנע׳ ו׳אנרגיה׳.

נקודת ההסתכלות של ניוטון, כפי שבאה לביטוי בפיתוח ההוכחה, היא מעניינת: כיום, פיסיקאים מסתכלים על הכוח כגודל רציף, ובתרחישים בהם הכוח משתנה - מניחים לעיתים הנחת קירוב שהכוח קבוע בפרקי זמן קצרים, ואחר-כך מחשבים את הגבול כאשר פרקי הזמן שואפים לאפס. ניוטון הסתכל על הבעייה מנקודת ראות אחרת: הוא לא הניח שהכוח קבוע למקוטעין, אלה הסתכל על הכוח כעל סדרת ״מכות״, כאשר הכוח הרציף מתקבל כגבול בו המרחק בין ה״מכות״ שואף לאפס.

כדאי להראות גם במסגרת של הוראת האנרגיה, על-פי הרעיון של הוראה ספירלית, שהכוח בתנועה קצובה ניצב למסלול: העבודה הנעשית על-ידי הכח השקול הפועל על חלקיק, שווה לשינוי באנרגיה הקינטית של החלקיק ***(משפט עבודה-אנרגיה)***. כאשר חלקיק נע בתנועה קצובה במעגל - האנרגיה הקינטית שלו קבועה, לכן עבודת הכוח השקול שווה לאפס. על-פי החוק השני של ניוטון הכוח השקול שונה מאפס, לכן הוא חייב להיות ניצב בכל נקודה להעתק של נקודת האחיזה של הכוח, כלומר הכוח השקול ניצב למעגל. גם את ההוכחה הזו כדאי להשאיר להתמודדות התלמידים במסגרת תרגול.

לסיכום סעיף זה, נדגיש כי **תאוצה היא גודל קינמטי**, שמוגדר באמצעות גדלים קינמטיים בסיסיים יותר, והיא אינה נגזרת מחוקי הדינמיקה. הביטוי המתמטי לתאוצה הצנטריפטלית היה v^2/R גם אִילו חוקי הדינמיקה היו שונים, ומן הראוי להדגיש נקודה זו בכיתה. עם זאת, ***להתבוננות אשר מקיפה גם את הדינמיקה, יתרון רב;*** התמונה שכוח המכוון לנקודה אחת (מרכז המעגל) פועל על גוף, ומשנה בכל נקודה את כיוון תנועת הגוף, ועל-ידי כך מקנה לגוף תאוצה, היא תמונה שנקלטת היטב.

גזירת מסלול תנועה על פי ידיעת הכוח.

נקודת המוצא המקובלת בפיתוח הנושא ׳תנועה המעגלית׳ היא ידיעת המסלול - מעגל. מהכרת המסלול מסיקים לגבי הכוח. נקודת מוצא זו הפוכה מנקודת המוצא המקובלת בהוראת הנושא ׳זריקה אופקית׳; כאן יוצאים מידיעת הכוח הפועל על הגוף, ומסיקים לגבי מסלול התנועה (פרבולה). בניתוח תנועתם של חלקיקים טעונים הנכנסים במאונך לשדה מגנטי אחיד, המידע שבידינו הוא דווקא לגבי הכוח, וממנו אנו מסיקים לגבי מסלול התנועה.
שאלון שהעברתי ל- 104 תלמידי כיתות י״ב (משלוש כיתות שסיימו ללמוד את הנושא ׳חשמל׳) כלל את השאלה:

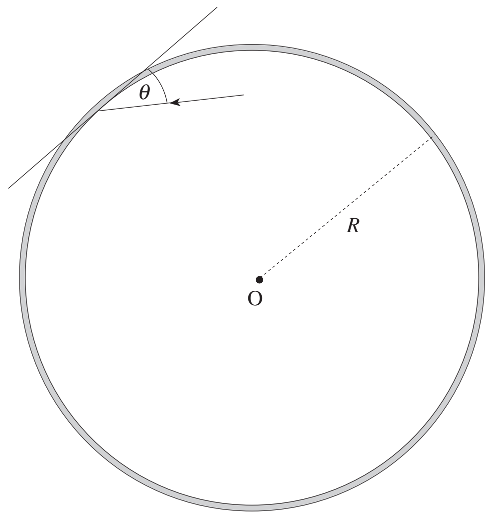
מדוע מסלול תנועתו של חלקיק טעון הנכנס במאונך לשדה מגנטי אחיד הוא מעגל?

התשובות הטובות ביותר, נוסחו בערך כך: ״כי הכוח ניצב בכל נקודה למהירות״. זו תשובה חלקית, כיוון שאם פועל כוח הניצב בכל נקודה למהירות, אך ***גודלו של הכוח משתנה***, מסלול התנועה של החלקיק ***לא יהיה מעגל*** אלא מסלול עקום, שעליו ינוע החלקיק בתנועה קצובה. עקמומיות המסלול בכל נקודה תקבע על-פי גודל הכוח באותה נקודה.

את התשובה לשאלה ראוי לנסח כך: הכוח בכל נקודה ניצב למהירות (תכונה של כוח מגנטי) לכן החלקיק נע בתנועה קצובה על מסלול עקום (גודל מהירותו אינו משתנה, כי לכוח אין רכיב בכיוון התנועה). הכוח קבוע בגודלו (על-פי $F = Bqv$) לכן עקמומיות המסלול בכל נקודה קבועה (כיוון ש- $F = \frac{mv^2}{R}$, כאשר F, m ו-v קבועים), לכן המסלול הוא מעגל.

תרגיל: לפניך תרגיל מודרך המתאר את הדרך בה ניוטון הוכיח שגודל הכוח השקול הפועל על גוף בתנועה מעגלית קצובה שווה ל- $\frac{mv^2}{R}$:

בתרשים מתוארת מעטפת גלילית שרדיוסה הפנימי R. חלקיק שמסתו m נע בתוך המעטפת גלילית (במישור הניצב למעטפת) ומתנגש התנגשות אלסטית במעטפת. הנח כי הכוח הנורמלי שהקיר מפעיל על החלקיק הוא הכוח היחיד הפועל עליו. הזווית בין מסלול התנועה (לפני ההתנגשות) לבין המשיק למעטפת הגלילית בנקודת הפגיעה תסומן ב- θ.



תרשים 13

1. הראה כי הזווית בין מסלול החלקיק שלאחר ההתנגשות לבין המשיק שווה ל- θ.

2. הראה כי אם θ מקיימת $\theta = \frac{180^\circ}{n}$ כאשר: $n = 3,4,5,...$ אזי מסלול תנועת החלקיק הוא מצולע משוכלל החסום במעטפת, כשזווית אשר קודקודה במרכז המצולע, וצלעותיה הם שני קטעים המחברים אותו עם שני קודקודים סמוכים של המצולע, מקיימת: $\theta_n = \frac{360^\circ}{n}$.

3. מהי צורת מסלול החלקיק כאשר:
(א) $n = 3$?
(ב) $n = 4$?
(ג) $n = 5$?
סרטט מסלולים אלו.

4. החלקיק נע על פני מצולע משוכלל בעל n צלעות:
(א) הראה כי משך הזמן Δt בין שתי התנגשויות עוקבות של החלקיק עם מעטפת הגליל הוא:
$$\Delta t = \frac{2R}{v}\ \sin\frac{\theta_n}{2} \qquad \text{(א)}$$
(ב) הראה כי שינוי גודל התנע Δp של החלקיק בכל התנגשות הוא:
$$\Delta p = 2mv\ \sin\frac{\theta_n}{2} \qquad \text{(ב)}$$
(ג) מה כיוון וקטור שינוי התנע בכל התנגשות? נמק.
(ד) הראה כי גודל הכוח הממוצע $\bar{F}$ שהמעטפת מפעילה על החלקיק הוא:
$$\bar{F} = \frac{mv^2}{R} \qquad \text{(ג)}$$
(ה) באֵילו מבין משוואות (א), (ב) ו- (ג) יחולו שינויים, אם מספר צלעות המסלול יגדל (אך המהירות תשאר קבועה בגודלה)?
(ו) מה תהיה צורתו של מסלול התנועה, בגבול כשמספר הצלעות שואף לאינסוף? מה ישתנה במקרה זה בנוסחה (ג)?

מראי מקום

1. זינגר, ד. (תשמ״ט). *פיסיקה - לקט ניסויים*. המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, עמ׳ 11, 1988.
2. Haber-Schaim U., Dodge, J.H., Gardner, R., & Shore, E.A. *PSSC PHYSICS*. U.S.A: Kendall, (1990) pp 67-69.
3. האוניברסיטה הפתוחה (תשנ״ב). *תנועה מעגלית*. היקום המכני.
4. Arons, A.B. *A Guide to Introductory Physics Teaching*. New York: John Wiley & Sons, (1990).
5. שכטר, ע. (תשנ״ד). תאוצה צנטריפטלית - התייחסות קינמטית. *תהודה - עתון מורי הפיסיקה*, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, 15 (3) עמ׳ 36-37, 1993.