עלייתו ונפילתו של קרום הסבון הנמתח בין שתי טבעות

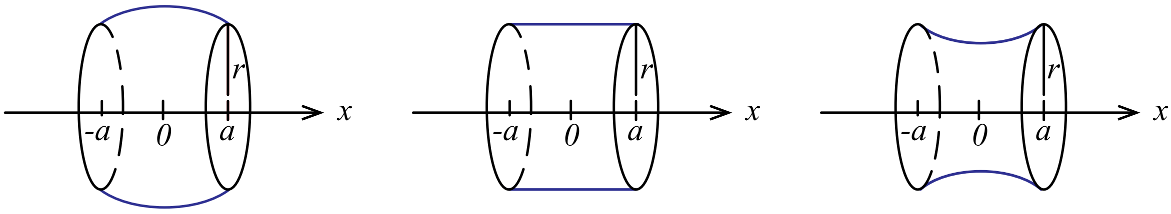
יפתח נבות

יפתח נבות

מבוא

נסתכל על קרום סבון מתוח בין שתי טבעות עגולות בעלות רדיוס r הנצבות במרחק $2a$ זו מזו. בגלל מתח הפנים, קרום הסבון מסתדר על המשטח המינימלי, באילוץ של האחיזה בטבעות. לכן עולה השאלה הבאה:

שאלה: באיזה מהציורים הבאים שטח הפנים של גוף הסיבוב הנוצר על ידי הקו הכחול הוא הקטן ביותר?



ג ב א

בפרק א' נציג את החישוב של המשטח המינימלי בשתי דרכים: על ידי עקרון ווריאציה ועל ידי פתרון שאלה אנלוגית באופטיקה גיאומטרית ושימוש בחוק סנל. בפרקים ב' עד ד' נבדוק באילו תנאים מתקיים המשטח המינימלי ומתי הוא קורס.

בפרק ה' נבדוק מה המשמעות של כל זה כאשר מסתכלים על הבעיה האנלוגית באופטיקה גיאומטרית.

פרק א: משוואת המשטח המינימלי

נניח שציר x הוא ציר הסימטריה (סימטריה גלילית), ונסמן ב- $f(x)$ את הפונקציה המתארת את המרחק של קרום הסבון מהציר לכל $x \in [-a, a]$.

מכיוון שהסבון תפוס על הטבעות, בקצוות מתקיים: $f(\pm a) = r$.

השטח של קרום הסבון נתון על ידי האינטגרל הבא (ראו נספח 1):

$$S = \int_{-a}^{a} 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \qquad (1)$$

נציע שתי דרכים למציאת הפונקציה המתארת את המשטח המינימלי:

שיטה 1: על ידי עקרון ווריאציה מתקבלת משוואה עבור צורת המשטח בעל השטח המינימלי (ראו נספח 2, וכן, על חשבון ווריאציה באופן כללי ראו מקורות 1,2 ברשימת המקורות):

$$ff'' = 1 + f'^2 \qquad (2)$$

כפי שאפשר לנחש ולבדוק על ידי גזירה והצבה, הפתרון הוא (ראו נספח 5):

$$(3) \qquad f(x) = b\cosh\left(\frac{x}{b}\right)$$

כאשר הגודל b נקבע לפי תנאי השפה:

$$(4) \qquad r = b\cosh\left(\frac{a}{b}\right)$$

הערה: מבחינה גיאומטרית, b הוא הרדיוס בנקודה הצרה ביותר, כאשר $x = 0$ (כי $x = 0$ היא נקודת המינימום של הקוסינוס ההיפרבולי ו- $\cosh(0) = 1$.)

שיטה 2: על ידי אנלוגיה לשאלה הבאה באופטיקה גיאומטרית: מהו המסלול של קרן אור בתווך בעל מקדם שבירה משתנה, כאשר מקדם השבירה נמצא ביחס ישר לגובה מעל הקרקע (כאשר הקרקע מישורית)?

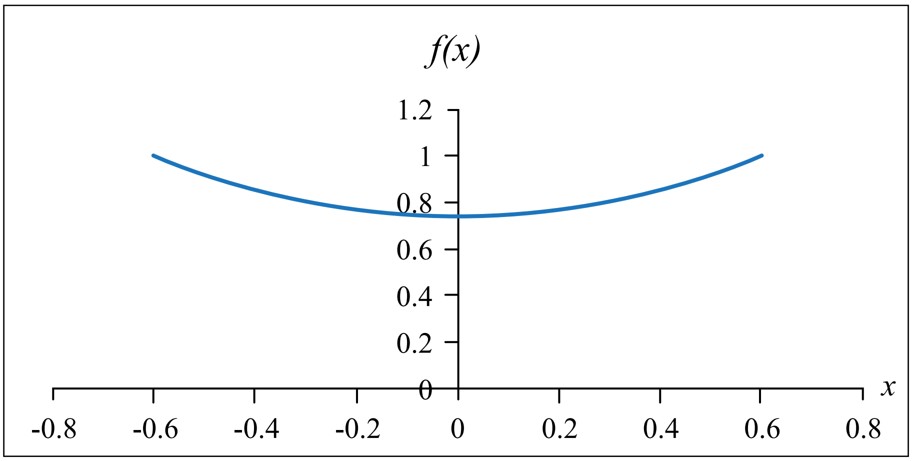
מתברר שהשאלה הזאת היא אנלוגית לשאלת המשטח המינימלי (ראו נספח 3). על ידי שימוש בחוק סנל מתקבלת המשוואה הבאה (ראו שוב נספח 3): קיים קבוע c_s כך ש:

$$(5) \qquad f^2 = c_s\left(1 + f'^2\right)$$

גם כאן קל למדי לבדוק שהפתרון נתון על ידי משוואה (3), כאשר $c_s = b^2$. (ראו נספח 5 על הפונקציות ההיפרבוליות)

הערה: במאמר של חזי יצחק ודוד אגמון (מקור 2) מופיעה אנלוגיה דומה: גם בעיית הברכיסטוכרון אנלוגית לחישוב המסלול של קרן בתווך בעל מקדם שבירה משתנה. אולם במקרה זה מקדם השבירה נמצא ביחס ישר לאחד חלקי השורש של גובה הנפילה, במקום היחס הישר לגובה מעל הקרקע בשאלה האנלוגית לשאלת קרום הסבון.

איך נראה הפתרון: כדי לצייר את הגרף של פונקציית הפתרון $f(x)$ (משוואה (3)) נסתכל למשל על טבעות ברדיוס $r = 1cm$ ובמרחק $1.2cm$ ($a = 0.6cm$). אפשר למצוא את הערך המתאים של b על ידי פתרון נומרי של משוואה (4). מקבלים ש- $b = 0.74507cm$ ומתקבל הגרף הבא:



תרשים 1: צורת המשטח כאשר r=1, a=0.6, b=0.74507
ונזכיר שהמשטח הוא גוף הסיבוב הנוצר על ידי סיבוב הגרף של f(x) סביב ציר x.

לכן, מתרשים 1 מתקבלת התשובה לשאלה שמוצגת בפתיחת המאמר: ציור א' הוא זה שמתאר את המשטח המינימלי.

הערה: המשטח המינימלי המתואר בנוסחה (3) נקרא "קטנואיד" ולפי וויקיפדיה (בערך 'Catenoid') הוא תואר על ידי המתמטיקאי לאונרד אוילר ב- 1744.

פרק ב: ניסוי מחשבתי

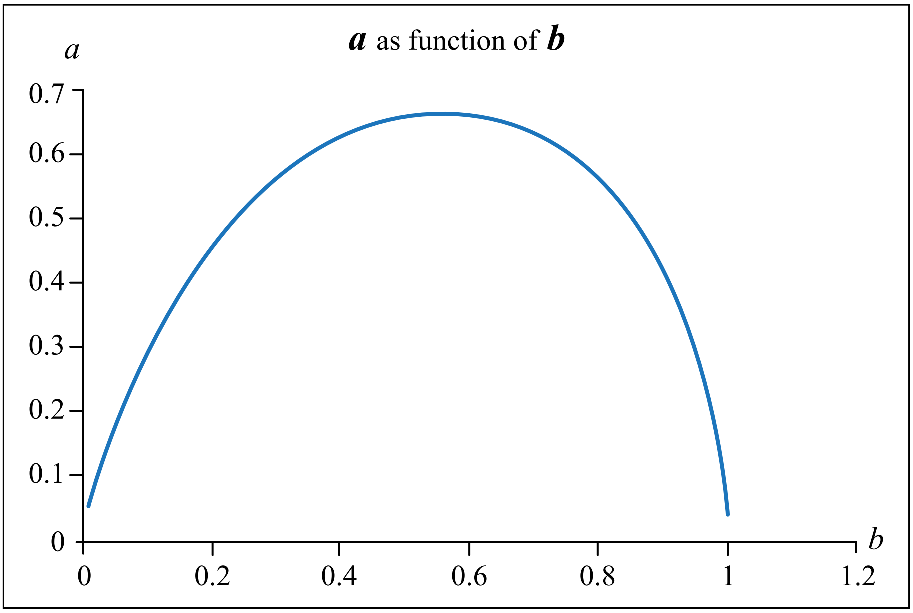
ניקח שתי טבעות עגולות בעלות רדיוס קבוע $r = 1cm$. נטבול את הטבעות בסבון ונוציא אותן צמודות זו לזו. כעת נתחיל להרחיק את הטבעות זו מזו. נרצה לחשב את צורת המשטח, ואת הרדיוס המינימלי b לכל ערך של המרחק בין הטבעות. למעשה, קל יותר לחשב את הכיוון ההפוך. לכל ערך של b נחשב את חצי המרחק בין הטבעות על ידי היפוך נוסחה (4):

$$a = b\cosh^{-1}\left(\frac{r}{b}\right)$$

תחום ההגדרה: $0 < b \le r$.

הסבר: $\cosh(x) \ge 1$ ולכן הפונקציה ההפוכה, $\cosh^{-1}\left(\frac{r}{b}\right)$, מוגדרת רק כאשר $\frac{r}{b} \ge 1$.

מתקבל הגרף הבא:

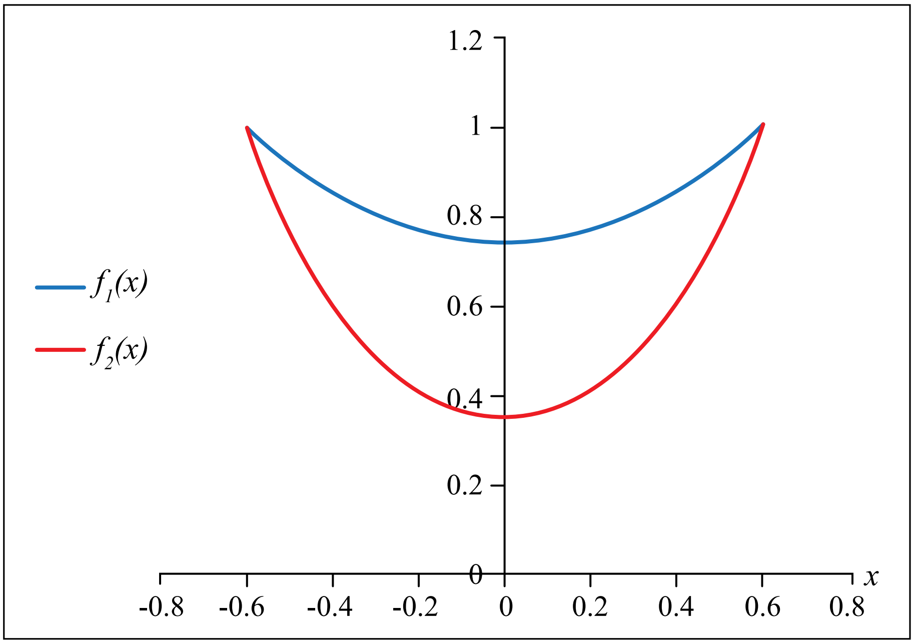


תרשים 2: חצי המרחק בין הטבעות, a, כפונקציה של הרדיוס המינימלי b כאשר r=1

מסקנה 1: הגודל a חסום. עבור $a > a_m = 0.662743r$ אין משטח מינימלי. בניסוי נראה שבמקרה כזה משטח הסבון יקרוס לכיוון הציר, וייווצרו שני משטחים על פני שתי הטבעות. עבור $a = a_m$ מתקבל $b_m = 0.5525r$. כלומר, כאשר מגדילים את המרחק בין הטבעות, הרדיוס המינימלי b לא קטן עד לערך קרוב לאפס לפני הקריסה. הקריסה מתרחשת הרבה לפני כן.

מסקנה 2: עבור $a < a_m$, לכל ערך של a יש שני ערכים אפשריים ל- b. כל אחד מהפתרונות הוא משטח מינימלי מקומי.

הגרף הבא מציג את שני הפתרונות המתקבלים עבור $r = 1, \quad a = 0.6$:



תרשים 3: שתי הצורות של המשטח כאשר, $r = 1$, $a = 0.6$, $b_1 = 0.74507$, $b_2 = 0.35189$

שאלה: האם ניתן לראות בניסוי את שני המצבים, או שמא רק אחד מהם יציב באמת? כדי לענות על שאלה זו נחשב את שני השטחים המתקבלים עבור $r = 1$, $a = 0.6$

פרק ג: חישובי שטחים

הצבת הפונקציה של המשטח המינימלי (נוסחה (3)) בנוסחה לשטח (נוסחה (1)) נותנת:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^{a} 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\; dx \\ &= \int_{-a}^{a} 2\pi b \cosh\left(\frac{x}{b}\right)\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{b}\right)}\; dx \\ &= \int_{-a}^{a} 2\pi b \cosh^2\left(\frac{x}{b}\right) dx \\ &= 2\pi ba + 2\pi b^2 cosh\left(\frac{a}{b}\right)\sinh\left(\frac{a}{b}\right) \\ &= 2\pi ba + 2\pi r\sqrt{r^2-b^2} \end{aligned}$$

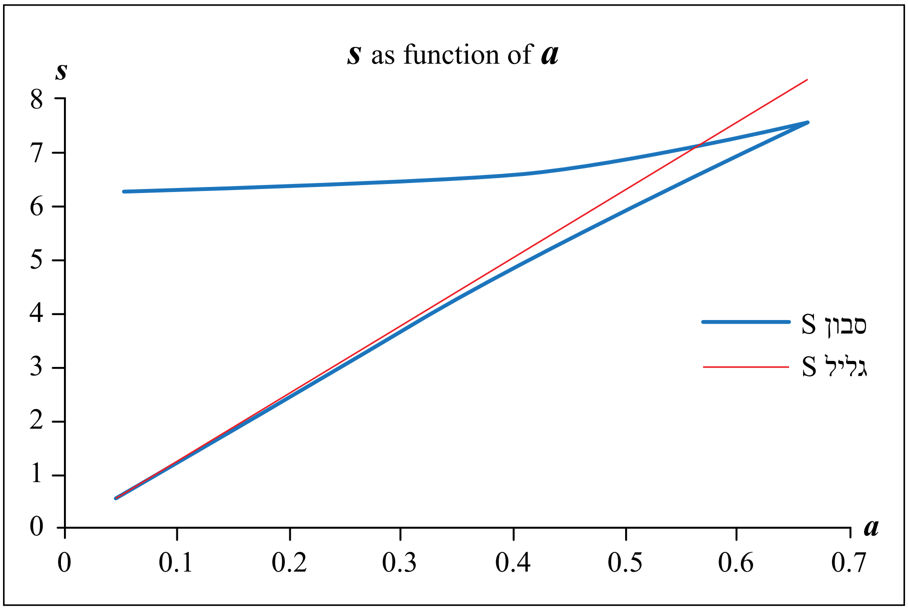
במקרה של הגרף בתרשים 3 למעלה, $a = 0.6$, $r = 1$:

עבור $b_1 = 0.74507$ מתקבל שטח $s_1 = 6.9996$.

עבור $b_2 = 0.35189$ מתקבל שטח $s_2 = 7.2079$.

כלומר, $s_2 > s_1$, ולכן נצפה שהצורה הצרה יותר (בעלת רדיוס b_2 במרכז) תהייה יציבה פחות.

זה נכון לכל ערך של a, כפי שרואים בגרף הבא המציג את שני הענפים של השטח:



תרשים 4: שני הענפים של השטח כפונקציה של חצי המרחק בין הטבעות a, כאשר r = 1
הקו האדום הדק מתאר את שטח הפנים של גליל ברדיוס 1 ובגובה 2a

כפי שרואים בתרשים 4, כאשר $a \to 0$ (כלומר, המרחק בין הטבעות שואף לאפס) השטח של הענף התחתון שואף לאפס (אכן, הצורה של המשטח נעשית דומה לגליל בגובה השואף לאפס), והשטח של הענף העליון שואף ל- 2π (ואכן, הצורה של המשטח מתקרבת לשני עיגולים).

מצד שני, כאשר $a \to a_m = 0.662743r$ שתי האפשרויות הולכות ומתקרבות זו לזו.

פרק ד: אינטרפולציה

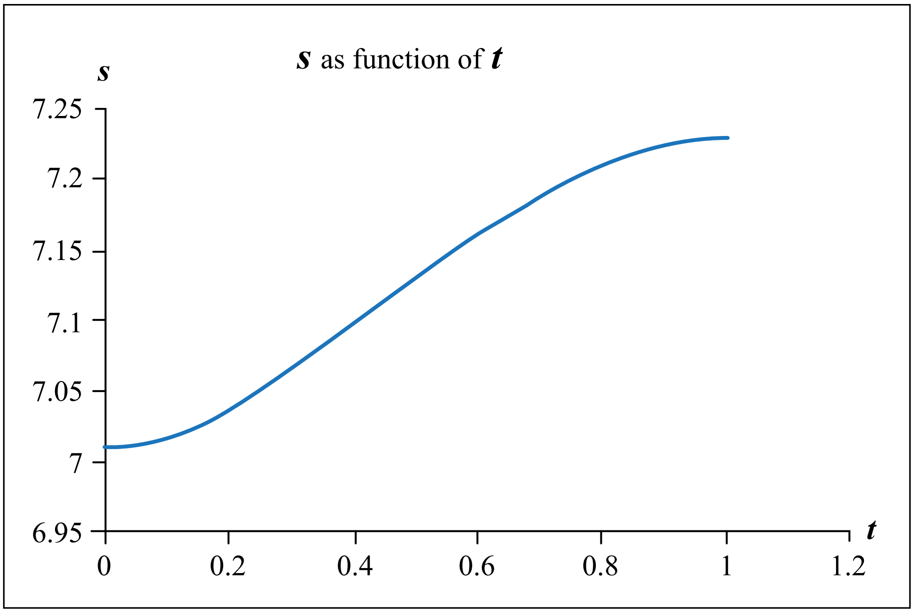
כדי לבדוק את שתי נקודות המינימום שמצאנו אפשר להגדיר פונקציה תלויה בפרמטר:

$$f_t(x) = (1-t)\, f_1(x) + t f_2(x)$$

כאשר $f_1(x)$ ו- $f_2(x)$ הן הפונקציות המתאימות ל- b_1 ול- b_2 לפי נוסחה (3) עבור a ו- r נתונים. עבור $t = 0$ מתקבלת הפונקציה $f_1(x)$ ועבור $t = 1$ מתקבלת הפונקציה $f_2(x)$.

הגרף בתרשים 5, של השטח כפונקציה של t, מראה ש- $f_2(x)$ אינה נקודת מינימום, אלא נקודת אוכף.

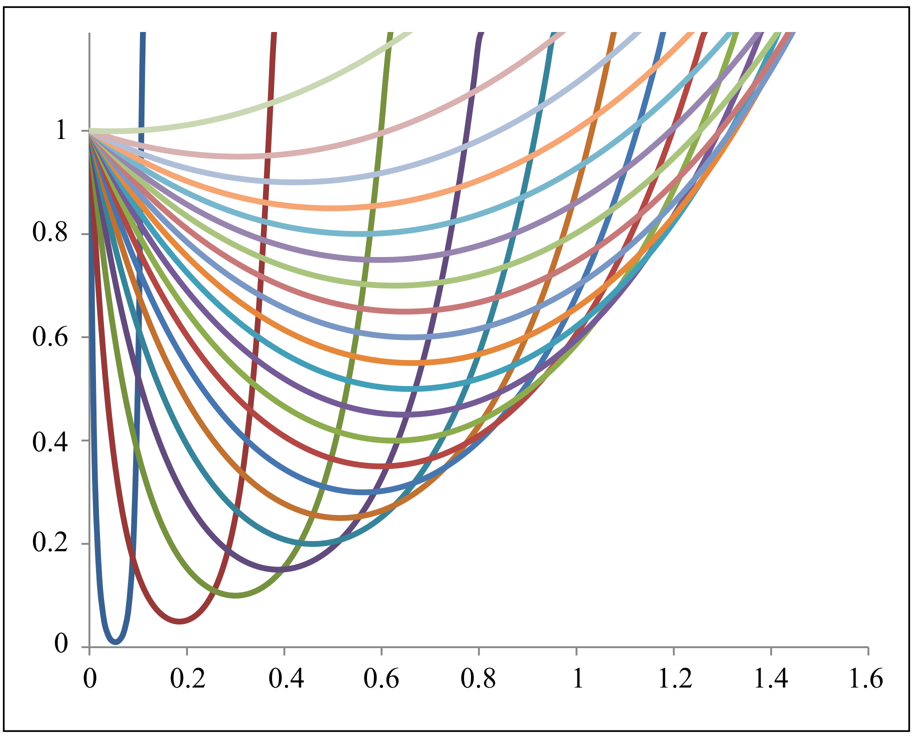
הערה: נקודת אוכף ולא נקודת מקסימום, כי אין אפשרות של מקסימום מקומי בשאלה הזאת. תמיד אפשר להוסיף פיתול קטן שיגדיל את השטח.



תרשים 5: השטח של משטח האינטרפולציה כפונקציה של הפרמטר t עבור r=1, a=0.6

פרק ה': מה המשמעות של כל זה בשאלה האנלוגית באופטיקה?

הגרף הבא מציג את המסלולים של קרני האור היוצאות ממקור אור נקודתי, במישור שבו מקדם השבירה נמצא ביחס ישר למרחק מציר ה- x (ראו נספח 3):



תרשים 6: המסלול של 21 קרני אור היוצאות מהנקודה (0,1) במישור עם מקדם שבירה משתנה.

כפי שרואים בתרשים 6, ישנם אזורים שלא מגיע אליהם אור בכלל, בהתאם לקריסתו של קרום הסבון כאשר המרחק בין הטבעות גדול מהמרחק הקריטי.

נסתכל למשל על הנקודה (1.5, 1) במישור המתואר בתרשים 6. כפי שרואים בתרשים, נקודה זאת נמצאת באזור לבן. כלומר, אף קרן אור היוצאת מהנקודה (0, 1) לא מגיעה אליה. למעשה, אם נלך מהנקודה (0,1) לאורך קו מקביל לציר x, נגיע לאזור חשוך כאשר נעבור את הנקודה (1, 1.325486). באנלוגיה לקרום הסבון, נסתכל על טבעות בעלות רדיוס $r = 1$. ההליכה על הקו המקביל בתרשים 6 אנלוגית להרחקת הטבעות זו מזו. קרום הסבון יקרוס כאשר נרחיק את הטבעות למרחק גדול מ- $\mathrm{dist} = 2{\cdot}a_m$, כאשר $a_m = 0.662743$ הוא הערך של נקודת המקסימום בתרשים 2. אם נרחיב את המבט על תרשים 6 מעבר לציר האופקי בגובה 1, נראה שנוצר במישור מעין קו מעטפת, כאשר כל הנקודות שמתחת לקו המעטפת הן חשוכות.

מצד שני, רואים בתרשים 6 שבכל נקודה שנמצאת מעל קו המעטפת מצטלבות שתי קרניים. כלומר, צופה הנמצא בנקודה בתוך המעטפת יראה את מקור האור פעמיים, בשני כיוונים שונים. הכפילות הזאת אנלוגית לשני הפתרונות שמצאנו למשטח המינימלי (ראו תרשים 3). נזכיר שאחת מהנקודות באמת מתאימה למינימום מקומי והשנייה התגלתה לבסוף כנקודת אוכף של פונקציית השטח. אבל קרני האור שונות מקרום הסבון. קרום הסבון לא יכול להתייצב בצורה של נקודת האוכף, אבל קרן האור כן תנוע במסלול המתאים, שאומנם אינו מינימלי אבל הוא כן מקיים את תנאי הפאזה הסטציונרית (ראו הסבר בפרק ב' במאמר "גלי קול באוויר ואופטיקה גיאומטרית", מקור 3 ברשימת המקורות).

על קו המעטפת עצמו תיווצר הצטברות של קרני אור רבות, ועולה השאלה: מהי צורת קו המעטפת?

סיכום

קרום הסבון יוצר משטח מינימלי. עבור משטח עם סימטריה גלילית, קיבלנו משוואות לפונקציה היוצרת של גוף הסיבוב בשתי שיטות שונות: על ידי עקרון ווריאציה ועל ידי אנלוגיה לשאלה באופטיקה גיאומטרית ושימוש בחוק סנל.

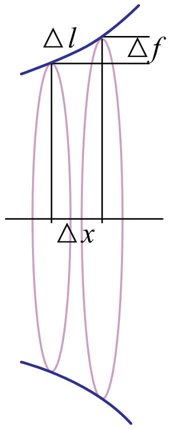
מפתרון המשוואות קיבלנו שהמשטח המינימלי המחבר שתי טבעות עגולות מתואר על ידי גוף סיבוב שנוצר על ידי קוסינוס היפרבולי. אך לא בכל תנאי. כאשר מרחיקים את הטבעות זו מזו הרדיוס של המשטח בנקודת האמצע הולך וקטן, אבל נשאר גדול מחצי (ליתר דיוק, מ 0.5525) מהרדיוס של הטבעות. ולפתע, כאשר המרחק בין הטבעות מתקרב לערך קריטי של קצת פחות משני שלישים (ליתר דיוק, 0.662743) מהקוטר של הטבעות, המשטח קורס למרכז.

מקורות

1. Herbert Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley, Chapter 2
2. דוד אגמון וחזי יצחק, התכונות המפתיעות של הברכיסטוכרון הבדיד, תהודה, כרך 37.
3. יפתח נבות, גלי קול באוויר ואופטיקה גיאומטרית, תהודה, כרך 33 .

נספח 1: חישוב השטח של גוף סיבוב

נסתכל על גוף הנוצר על ידי סיבוב של גרף הפונקציה $f(x)$ סביב ציר x, בתחום $-a \le x \le a$.



איור a1: פרוסה דקה של גוף סיבוב

כדי לחשב את שטח הפנים של גוף הסיבוב נחלק את הקטע $\left[-a,a\right]$ לקטעים באורך Δx. החלוקה הזאת יוצרת חלוקה של גוף הסיבוב לפרוסות דקות. שטח הפנים של קרום הפרוסה הדקה שנשענת על הקטע שבין x ל $x+\Delta x$, בסדר ראשון ברוחב Δx, נתון על ידי היקף הטבעת הממוצע: $2\pi f(x+\Delta x/2)$ כפול הרוחב (האלכסוני) שלה (Δl):

$$\Delta S = 2\pi f\left(x+\Delta x/2\right)\Delta l$$

לפי משפט פיתגורס (ראו איור a1):

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta f^2 = \left(1+\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2\right)\Delta x^2$$

השטח הכולל מתקבל מסכום השטחים של הטבעות בגבול $\Delta x \to 0$.
בגבול זה, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'\left(x\right)$ והסכום הופך לאינטגרל:

$$S = \int_{-a}^{a} 2\pi f\left(x\right)\sqrt{1+f'\left(x\right)^2}\ dx$$

נספח 2: עקרון ווריאציה על השטח

נחשב את השינוי בשטח כאשר משנים מעט את המשטח: $f \to f+\delta f$ נותן:

$$\delta S = \int_{-a}^{a} 2\pi\left(\sqrt{1+f'^2}\ \delta f + \frac{ff'}{\sqrt{1+f'^2}}\ \delta f'\right)dx$$

על ידי אינטגרציה בחלקים, וכאשר שומרים על הקצוות, מקבלים:

$$\delta S = 2\pi\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{1+f'^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{ff'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)\right)\delta f\ dx$$

תנאי המינימום: $\delta S = 0$ נותן:

$$\sqrt{1+f'^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{ff'}{\sqrt{1+f'^2}}\right) = 0$$

$$\sqrt{1+f'^2} - \frac{f'^2 + ff''}{\sqrt{1+f'^2}} + \frac{ff'^2 f''}{\left(1+f'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ולאחר צמצום מתקבלת משוואה (2):

$$1 + f'^2 - ff'' = 0$$

נספח 3: ניסוח שאלה באופטיקה גאומטרית שהיא אנלוגית לבעיית השטח המינימלי

שאלה: מהו המסלול של קרן אור במישור שבו מקדם השבירה נמצא ביחס ישר למרחק מישר כלשהו במישור?

הערה: כפי שמתואר במאמר של חזי יצחק ודוד אגמון (מקור 1), גם בבעיית הברכיסטוכרון מופיעה האנלוגיה לחישוב המסלול של קרן בתווך בעל מקדם שבירה משתנה. אולם, בשונה משאלת קרום הסבון, בבעיית הברכיסטוכרון מקדם השבירה נמצא ביחס ישר לאחד חלקי השורש של גובה הנפילה (זאת מכיוון שהמהירות של גוף נופל פרופורציונית לשורש גובה הנפילה).

תשובה לשאלה: ראשית נבחר מערכת צירים ניצבים (x, y) כך שציר ה- x הוא הישר מהשאלה. אנו מניחים שמקדם השבירה בנקודה (x, y) במישור נתון על ידי:

$$n(x,y) = \mu|y|$$

עבור מקדם חיובי כלשהו μ.

נשים לב שבמודל הזה, קרן שמגיעה לציר ה- x $(y = 0)$ נעה במהירות אינסופית (כי $n = 0$). מבחינת האנלוגיה לקרום הסבון, זה שקול לקריעת החיבור בין הטבעות. לכן נתייחס רק לקרניים שיוצאות מנקודה שמעל לציר ה- x ונשארות בחצי המישור העליון.

נסתכל על קרן אור שיוצאת ממקור אור בנקודה $(-a, r)$ ומגיעה לצופה בנקודה (a, r). נניח שהמסלול של קרן האור מתואר על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$.

מצד אחד, לפי עקרון פרמה:

המסלול של קרן האור יהיה המסלול המהיר ביותר, כאשר המהירות בכל נקודה שווה למהירות האור בריק חלקי מקדם השבירה בנקודה:

$$v(x,y) = \frac{c}{n(x,y)} = \frac{c}{\mu y}$$

הזמן שלוקח לקרן האור להגיע מהמקור לצופה נתון על ידי אינטגרל לאורך המסלול של אלמנט האורך חלקי המהירות:

$$T = \int_{\gamma} \frac{dl}{v}$$

ואינטגרציה לפי הפרמטר x, כאשר:

$$v(x, f(x)) = c / (\mu f(x))$$

$$dl = \sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

נותנת:

$$T = \int_{-a}^{a} \frac{\mu}{c} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

אך הנוסחה הזאת, עד כדי מקדם קבוע, זהה לנוסחה (1) עבור השטח של קרום הסבון.

לכן, לפי עקרון פרמה, מסלול קרן האור וצורת משטח הסבון מתוארים שניהם על ידי הגרף של אותה הפונקציה $f(x)$ שעבורה האינטגרל הזה מינימלי (בתנאי השפה).

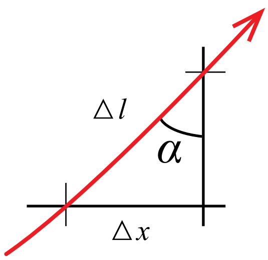
מצד שני, לפי חוק סנל:

לאורך המסלול של קרן האור מתקיים:

$$(c1) \qquad n \cdot \sin\alpha = k$$

כאשר k קבוע וכאשר α היא הזווית בין הכיוון של קרן האור לכיוון הגרדיאנט של מקדם השבירה n. אם נסתכל על קטע קרן באורך Δl, שמתחיל בנקודה $(x, f(x))$ ומסתיים בנקודה $(x + \Delta x,\ f(x + \Delta x))$ ומכיוון שכיוון הגרדיאנט של מקדם השבירה הוא בכיוון ציר y, נקבל (ראו איור c1):

$$\sin\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta l} \cong \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}$$



איור c1: קרן אור בזווית ביחס לאנך

ההצבה של $\sin\alpha$ ושל n במשוואה (c1) נותנת את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה עבור המסלול של קרן האור:

$$\mu f \cdot \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} = k$$

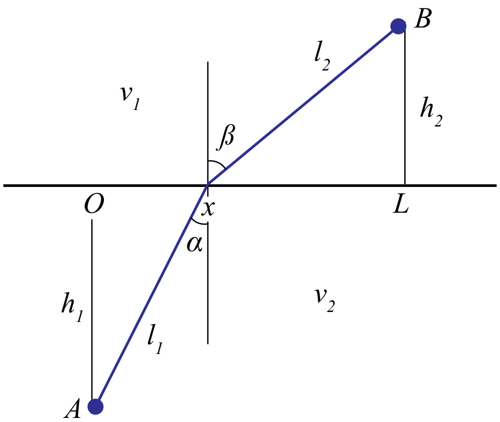
ומכאן מתקבלת משוואה (5):

$$f^2 = c_s\left(1+f'^2\right)$$

כאשר $c_s = k^2/\mu^2$.

נספח 4: חוק סנל ועקרון פרמה

נסתכל על השאלה הבאה: הנקודה A נמצאת בשדה חרוש במרחק h_1 מקצה השדה, והנקודה B נמצאת מחוץ לשדה, במרחק h_2 מקצה השדה. מהו המסלול המהיר ביותר מהנקודה A לנקודה B המתוארות בציור הבא, כאשר נתון שמהירות ההתקדמות בשדה החרוש היא v_1 ומהירות ההתקדמות מחוץ לשדה החרוש היא v_2?



איור d1: קרן אור מנקודה A לנקודה B.

כדי לפתור את השאלה נסמן ב- x את נקודת היציאה מהשדה החרוש, ונחשב את זמן הריצה מ A ל B כפונקציה של x:

$$t_{AB}=\frac{l_1}{v_1}+\frac{l_2}{v_2}=\frac{\sqrt{x^2+h_1^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{\left(L-x\right)^2+h_2^2}}{v_2}$$

נחפש מינימום על ידי גזירה:

$$\frac{dt_{AB}}{dx}=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{x}{l_1}-\frac{1}{v_2}\cdot\frac{L-x}{l_2}=\frac{\sin\alpha}{v_1}-\frac{\sin\beta}{v_2}$$

והשוואת הנגזרת לאפס נותנת:

$$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{\sin\beta}{v_2}$$

כעת, אם נחליף את הריצה בשדות לקרן אור, הנעה מנקודה A הנמצאת בתווך בעל מקדם שבירה $n_1=c/v_1$ לנקודה B הנמצאת בתווך בעל מקדם שבירה $n_2=c/v_2$, נקבל שתנאי הזמן המינימלי הוא למעשה חוק סנל:

$$n_1\sin\alpha=n_2\sin\beta$$

מסקנה: המסלול המקיים את חוק סנל הוא המסלול המהיר ביותר.

הערה: הסיבה הפיזיקאלית לכך שקרן האור בוחרת את המסלול המינימלי (או, ליתר דיוק, המסלול האקסטרמלי) היא עקרון הפאזה הסטציונרית (ראו מקור 3).

נספח 5: הפונקציות ההיפרבוליות.

מגדירים:

$$\cosh\left(u\right)=\frac{1}{2}\left(e^u+e^{-u}\right)$$

$$\sinh\left(u\right)=\frac{1}{2}\left(e^u-e^{-u}\right)$$

תכונות:

לפי ההגדרה קל לראות ש cosh פונקציה סימטרית ו sinh פונקציה אנטי סימטרית, ומתקיים:

$$cosh^2\left(u\right)-sinh^2\left(u\right)=1$$

(זה דומה למשפט פיתגורס, $\cos^2\left(u\right)+\sin^2\left(u\right)=1$, אבל בהיפוך סימן).

וגם:

$$\frac{d}{du}(\cosh)\left(u\right)=\sinh\left(u\right)$$

$$\frac{d}{du}(\sinh)\left(u\right)=\cosh\left(u\right)$$

(זה דומה לפונקציות הטריגונומטריות cos ו sin רק בלי שינוי הסימן).

מקור השם:

נסתכל על מסילה במישור (x, y) המוגדרת בצורה פרמטרית על ידי:

$$x(t) = \cosh(\omega t)$$

$$y(t) = \sinh(\omega t)$$

לפי הזהות למעלה מתקיים:

$$x^2 - y^2 = 1$$

וזו משוואת היפרבולה.

הקשר לפונקציות הטריגונומטריות:

הקשר עובר במספרים המרוכבים. את הזהות $e^{iu} = \cos(u) + i\,sin(u)$
אפשר להציג גם כך:

$$\cos(u) = \frac{1}{2}\left(e^{iu} + e^{-iu}\right)$$

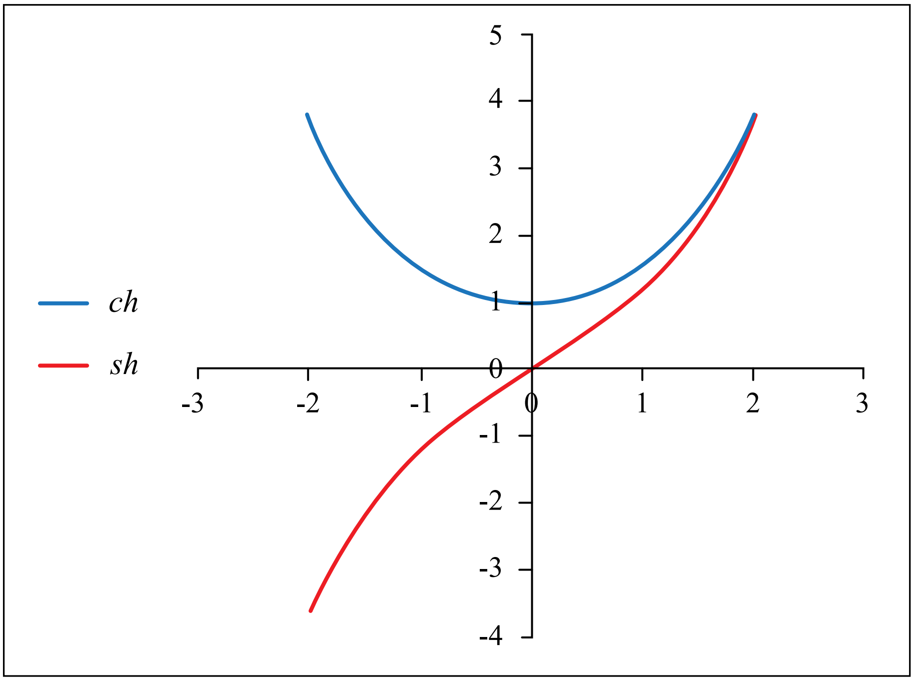
$$\sin(u) = \frac{1}{2i}\left(e^{iu} - e^{-iu}\right)$$

ולכן,

$$\cosh(u) = cos(iu)$$

$$\sinh(u) = -i\ sin(iu)$$

גרפים:



גרף e1: סינוס היפרבולי (באדום) וקוסינוס היפרבולי (בכחול).