גלי קול באוויר ועקרון אי הוודאות

יפתח נבות, בית המדרש 'נקודת ארכימדס' למורים חוקרים בפיזיקה במרכז אחר"ת ובית הספר הרב תחומי עמל עמק חרוד.

הקשר

הנושא עלה בעקבות הנחיית עבודת חקר של תלמיד בכיתה י"א בכברי. נושא העבודה היה הפיזיקה של התמצאות עטלפים במרחב באמצעות גלי קול.[1]

מבוא

עטלפים משתמשים באותות קצרים (פולסים) של גלי קול כדי "לראות". העטלף משמיע פולס קול וקולט את ההחזר. לפי הפרש הזמנים בין השמעת הקול לקליטת ההחזרה שלו, יכול העטלף לדעת את מרחקו מהעצם המחזיר. נעיר גם שהעטלף יכול לזהות את החזר הפולס שהוא עצמו השמיע ואינו מתבלבל, כי הוא יודע את התדר שלו. נשאלת השאלה "לאיזה דיוק ניתן להגיע בשיטה זו?" התשובה תלויה כמובן באופן ההחזרה ובאופי ההחזרה של גלי קול מהעצמים במרחב, ועל כך במאמר "גלי קול באוויר ואופטיקה גאומטרית" (מקור 7 ברשימת המקורות). במאמר זה נדון בהיבט אחר של השאלה והוא היכולת להגדיר היטב את התדר של פולס הקול ובאופן שבו אי-הוודאות בתדר תלויה במשך הפולס.

עקרון אי-הוודאות בהקשר של חלקיק קוונטי קובע שלא ניתן לקבוע במדויק את המקום ואת התנע של החלקיק בעת ובעונה אחת.[2]

ביתר פירוט, בניגוד לחלקיק קלאסי שאפשר להגדיר את מקומו במרחב, המצב המרחבי של חלקיק קוונטי מתואר על ידי פונקציית התפלגות שקובעת את הסיכוי לקבל ערך x במדידת המקום. לכן יש אי-ודאות בהגדרת המקום של החלקיק: אי-הוודאות שווה לרוחב ההתפלגות (סטיית התקן). באופן דומה, התנע של החלקיק מתואר על פונקציית התפלגות במרחב התנע, ויש אי-ודאות בקביעת התנע של החלקיק (ראו נספח 2).

כעת נוכל לנסח ביתר דיוק את עקרון אי-הוודאות.

אם נסמן ב- Δx את אי-הוודאות במקום וב- Δp את אי-הוודאות בתנע, אז מתקיים:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

כאשר h הוא קבוע פלאנק ו- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

לכן, בהינתן אי-הוודאות במקום, אי-הוודאות בתנע חייבת להיות גדולה מספיק, כך שיתקיים אי-השוויון, ואם למשל אי-הוודאות במקום קטנה פי שניים, אז אי-הוודאות בתנע גדולה פי שניים.

המקור של עקרון אי-הוודאות הוא בקשר שבין ההתפלגות במרחב המקום להתפלגות במרחב התנע. למעשה, ההתפלגות נקבעת על ידי פונקציית הגל, ופונקציית הגל של התנע מתקבלת מפונקציית הגל של המקום על ידי טרנספורם פורייה. כלומר, אם

---

1 הערה: העבודה לא הגיעה לידי סיום, ולכן אין הפניה לעבודה.

2 ראו בהקשר זה את המאמר של גיא אשכנזי בתהודה 32: עיקרון אי-הוודאות והקשר הקוולנטי.

מפונקציית הגל $\Psi(x)$ אפשר לקבל את ההסתברות לקבל ערך p במדידת המקום, אזי מתוך טרנספורם פורייה $\overline{\Psi}(p)$ שלה אפשר לקבל את ההסתברות לקבל ערך במדידת התנע של החלקיק. כעת, מתכונות טרנספורם פורייה, אם הפונקציה של המקום צרה (המקום מוגדר היטב), אזי טרנספורם פורייה שלה המעביר את הפונקציה למרחב התנע, רחב, ולכן אין התנע מוגדר היטב.

(ראו נספח 2: טרנספורם פורייה של גאוסיאן והקשר לעקרון אי-הוודאות.)

קשר דומה מתקיים בפולס של גל קול. מיקום הפולס אנלוגי למיקום החלקיק, והתדר של הפולס אנלוגי לתנע של החלקיק. אם הפולס קצר, אז תחום התדרים שלו רחב. לכן מתקבל כאן עקרון דומה לעקרון אי-הוודאות, שמגביל את דיוק ההתמצאות של העטלפים (ראו נספח 3: טבלה המתארת את האנלוגיה בין גל קול ובין חלקיק קוונטי).

בפרק א' ננסה להבין מדוע מתפשטים גלי קול באוויר ואיך תכונות האוויר קובעות את המהירות שבה הגלים מתפשטים, היא מהירות הקול.

בפרק ב' נדון בפתרונות משוואת הגלים בכלל ובחבילת גלים בפרט.

בפרק ג' נסתכל על חבילת גלים גאוסיאנית (כלומר, חבילת גלים שהמעטפת שלה היא בצורת גאוסיאן) ונקבל את הקשר בין הרוחב של חבילת הגלים במרחב המקום ובין הרוחב שלה במרחב התדר. מכאן נסיק את עקרון אי-הוודאות עבור גלי קול.

פרק א': למה מתפשטים גלי קול באוויר, ומהי מהירות הקול?

גל קול הוא גל של תנודות באוויר. התנודות הן תנודות אורכיות. כלומר, חלקיקי האוויר מתנדנדים במקביל לכיוון התפשטות הגל. כדי לחשב איך ומדוע מתקדמות תנודות באוויר (ולא נבלעות מיד, כמו למשל תנודות בערימת חול), נשתמש בשתי משוואות בסיסיות:

המשוואה הראשונה היא משוואה תרמודינמית המתארת את הקשר בין הלחץ והנפח של מערכת בתהליך אדיאבטי (ראו נספח 1):

$$PV^{\gamma} = \text{Const}$$

כאשר: P - הלחץ, V - הנפח ו γ - הוא גודל המכונה בשם המקדם האדיאבטי.

המשוואה השנייה היא החוק השני של ניוטון: $\Sigma F = ma$.

נסתכל על מעין צינור אוויר גלילי כמתואר באיור 1:

איור 1: מקטע גלילי שבו מתרחשת תזוזה של אוויר

הנפח שבין x_0 ו x_1 נתון על ידי:

$$V = A(x_1 - x_0)$$

כאשר A שטח החתך של הצינור.

נניח גם שציר x נבחר כך שהוא בכיוון תזוזת האוויר.

נסמן ב $y(x, t)$ - את התזוזה של אלמנט נפח זעיר במקום בזמן . שינוי הנפח כתוצאה מהתזוזה נתון על ידי:

$$\Delta V = A(y(x_1) - y(x_0))$$

בהנחה שהתהליך אדיאבטי, נוכל לקבל משוואה עבור השינוי המתאים בלחץ ΔP:

$$(P + \Delta P)(V + \Delta V)^{\gamma} = PV^{\gamma}$$

בסדר ראשון ב ΔV וב ΔP (ראו נספח 4) מקבלים:

$$\Delta PV^{\gamma} + \gamma PV^{\gamma-1}\Delta V = 0$$

ומכאן אפשר לחלץ את השינוי בלחץ בעקבות תנודת האוויר:

$$\Delta P = -\gamma P \frac{\Delta V}{V}$$

על ידי הצבת הביטויים ל V ול ΔV נקבל:

$$\Delta P = -\gamma P \frac{\partial y}{\partial x}$$

נסמן ב P_0 את לחץ האוויר במנוחה ונקבל מהמשוואה למעלה את הלחץ בעת התנודה, בסדר ראשון:

$$P = P_0 - \gamma P_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

כעת נסתכל על המשוואה השנייה, היא משוואת התנועה של ניוטון $ma = \Sigma F$. כדי לקבל את המשוואה בהקשר זה נסתכל שוב על מנסרת אוויר דמיונית בעלת שטח חתך A ועובי Δx. נפח המנסרה $V = A\Delta x$. המסה היא צפיפות האוויר ρ כפול הנפח, והתאוצה היא הנגזרת השנייה לפי הזמן של התזוזה . סכום הכוחות הוא הפרש הלחצים בקצוות כפול השטח A. הצבה במשוואת ניוטון נותנת:

$$\rho A \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (P(x + \Delta x) - P(x))A$$

לאחר חילוק ב $A\Delta x$ בשני האגפים, נקבל (בגבול $\Delta x \to 0$):

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

הצבת המשוואה ללחץ נותנת לבסוף:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\gamma P_0}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (1)$$

זוהי משוואת הגלים, ולפי משוואה זו, מהירות הקול c נתונה על ידי (ראו דיון בפרק ב'):

$$c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho} \qquad (2)$$

עבור אוויר בגובה פני הים, יש לחץ של אטמוספֵרה אחת או 101,325 פסקל (פסקל = ניוטון למטר מרובע), והצפיפות היא כ-1.293 ק"ג למטר מעוקב. רוב המולקולות של האוויר הן דו-אטומיות, ולכן $\gamma = 7/5$ (ראו נספח 1).

הצבת הנתונים האלה בנוסחה למעלה נותנת: $c = 331.2$ m/sec.

פרק ב': פתרון משוואת הגלים החד-ממדית.

נסתכל על תנודה המתוארת על ידי המשוואה:

$$y(x, t) = f(x \pm ct)$$

כאשר f פונקציה חלקה כלשהי.

גזירה פעמיים לפי המקום x וגזירה פעמיים לפי הזמן t מראות שתנודה זו מקיימת את משוואת הגלים (1), אם וכאשר המקדם c

נקבע לפי משוואה (2). לכן, אם $f(x)$ מתארת הפרעה כלשהי בזמן 0, ההפרעה בזמן t כלשהו תיראה אותו דבר, רק מוזזת ב- $\pm ct$. לכן המקדם c מתאר את מהירות ההתקדמות של ההפרעה, היא מהירות הקול. הסימן קובע אם ההתקדמות של הגל היא ימינה או שמאלה. הפתרון הכללי יכול להיות סכום של גל הנע ימינה וגל הנע שמאלה. כך למשל יכול להיווצר גל עומד.

על ידי טרנספורם פורייה מציגים את ההפרעה f כצירוף לינארי של התנודות ההרמוניות,

$$\varphi_k(x) = \cos(kx) + i\sin(kx) = e^{i(kx)}$$

כאשר k הוא מספר הגל או התדר הזוויתי המרחבי. מכיוון שהפונקציות $\cos(x)$ ו $\sin(x)$ הן מחזוריות עם מחזור 2π, אורך הגל של התנודה המתוארת על ידי $\varphi_k(x)$ הוא $\lambda = 2\pi/k$.

התלות בזמן מתקבלת ממשוואת הגלים, וכפי שמתואר למעלה, נתונה על ידי:

$$y_{k\pm}(x,t) = e^{ik(x\pm ct)} = e^{ik(x\pm\omega t)}$$

כאשר $\omega = kc$ היא התדר הזוויתי הזמני.

הערה: לפירוק של הפונקציה המתארת תנודה באוויר לסכום של תנודות הרמוניות יש משמעות מעבר לתרגיל המתמטי, וזאת ממספר סיבות. ראשית, אם מקור הקול הוא למשל תנודות של מיתר או החזרי קול בתחום מוגדר כמו חליל או תיבת תהודה, מתווספים תנאים של גל עומד. במצב כזה יופיעו בסכום רק אופני תנודה שהם כפולות של תנודה בסיסית, ולא ספקטרום רציף. שנית, מסיבות דומות, האוזן ששומעת את הקול מתרגמת את התנודות לתדרים, ולכן מבחינת התפיסה של אופי הקול, או זיהוי הדובר, או זיהוי הפולס שהעטלף שולח - התדר הוא הקובע.

אולם תנודה הרמונית נקייה מתפרסת על כל המרחב. כלומר, אם התדר מוגדר במדויק, המיקום אינו מוגדר כלל. זהו רמז ראשון לעקרון אי-הוודאות בגלי קול.

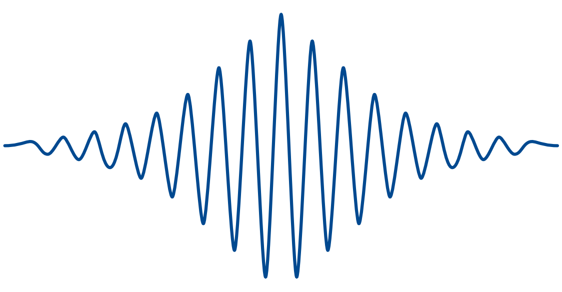
פרק ג': פולסים של קול, חבילות גלים ועקרון אי-הוודאות.

נסתכל על פולס קול גאוסיאני:

$$f(x) = \underbrace{Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}}_{\text{גאוסיאן}}\underbrace{e^{ik_0x}}_{\text{גל}}$$

פונקציה זו מתארת גל בתדר זוויתי (מרחבי) k_0 עם מעטפת גאוסיאנית ברוחב σ (ראו איור 2 ונספח 4).

הערה: הפונקציה f היא פונקציה מרוכבת, ולמעשה, גל הקול מתואר על ידי החלק הממשי שלה. הסיבה לכתיבה זו היא שמבחינה מתמטית נוח יותר לעבוד עם פונקציית האקספוננט.



איור 2: גרף של החלק הממשי של פולס גאוסיאני

על ידי השלמה לריבוע אפשר לחשב את טרנספורם פורייה של הפונקציה ולהציג אותה כסכום של תנודות הרמוניות, או חבילת גלים (ראו נספח 2):

$$f(x) = \widetilde{A}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\frac{1}{2}(\sigma(k-k_0))^2} e^{ikx}$$

כלומר, מקבלים שטרנספורם פורייה הוא גאוסיאן סביב תדר הבסיס k_0, ברוחב $1/\sigma$.

לכן כדי לייצר פולס בעל מיקום מוגדר היטב (σ קטן), דרוש תחום רחב של תדרים ($1/\sigma$ גדול). אפשר לנסח זאת גם כך:

$$\Delta x \cdot \Delta k = 1$$

כאשר $\Delta x = \sigma$ הוא אי-הוודאות במקום ו- $\Delta k = 1/\sigma$ אי-הוודאות בתדר (המרחבי). על ידי כפל וחילוק במהירות הקול נקבל את המשוואה הקושרת את משך הפולס לתדר הזוויתי (הזמני):

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = 1$$

נציב מספרים על מנת להדגים את המשמעות של התוצאה שקיבלנו. נסתכל, למשל, על פולס באורך אלפית שנייה, בתדר 20,000 הרץ.

לפי המשוואה למעלה, אי הוודאות בתדר היא: $\Delta f = \dfrac{\Delta\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi\Delta t} = 160\ \text{Hz}$

לכן ברור למה עטלפים מעדיפים לשדר בתדרים גבוהים.

הערה: החישוב למעלה נעשה עבור צורה מסוימת של גל הקול על מנת לפשט את החישובים, אבל אפשר להראות שהתוצאה נכונה באופן כללי. כדי לייצר פולס קצר דרוש תחום תדרים רחב.

ביבליוגרפיה.

1. על גלי קול:

L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Pergamon Press (1959), Chapter 8.

2. על פיסיקה סטטיסטית ומשוואת המצב של גז אידיאלי:

L.D.Landau and E.M. Lifshitz, Statistical Physics 3rd Edition part1, Pergamon press (1980), Section 43.

על עקרון אי הוודאות בתורת הקוונטים:

L.I.Schiff, Quantum Mechanics, Third Edition, McGRAW-HILL (1968), Chapter 3, Sec12.

3. גיא אשכנזי ורוני קוזלוב (2014): עיקרון אי-הוודאות והקשר הקוולנטי, תהודה 32, עמ' 31-14.

4. על עטלפים ואקולוקציה

H. Raghuram, G. Marimuthu Donald Redfield Griffin, the discovery of echolocation, Resonance - Journal of Science Education, 10 (2) (2005). pp. 20-32. ISSN 0971-8044

וגם

Matti Airas, HUT, Echolocation in bats, Laboratory of Acoustics and Audio Signal Processing

5. עוד על עטלפים: מתוך האתר: http://www.parks.org.il/News/Pages/batsNoam2.aspx

6. ועוד על עטלפים, מתוך ההרצאה של דוקטור יוסי יובל באוניברסיטה תל אביב: http://www.youtube.com/watch?v=83UfPKvGqyI

7. יפתח נבות, גלי קול באוויר ואופטיקה גיאומטרית. תהודה, כרך 33.

נספחים

נספח 1: תהליך אדיאבטי בגז אידאלי.

תהליך אדיאבטי הוא תהליך שבו אין חילופי אנרגיה עם הסביבה. נסתכל על גז בנפח V ובלחץ P ונניח שבמהלך התהליך הנפח גדל בשיעור ΔV. מכיוון שאין חילופי אנרגיה עם הסביבה, העבודה $P\Delta V$ שווה לשינוי האנרגיה הפנימית. כלומר:

$$\Delta U + P\Delta V = 0$$

כאשר U מסמן את האנרגיה הפנימית של המולקולות של הגז.

כעת נסתכל על גז אידאלי.

משוואת המצב של גז אידאלי:

$$PV = NkT$$

כאשר N מספר המולקולות, k קבוע בולצמן ו- T הטמפרטורה.

בנוסף, עבור גז אידאלי, האנרגיה הפנימית נתונה על ידי: $U = Nf\cdot\frac{1}{2}kT$, כאשר f מספר דרגות החופש למולקולה. ממשוואת המצב מקבלים:

$$U = \frac{f}{2}PV$$

$$\rightarrow \Delta U = \frac{f}{2}(P\Delta V + \Delta PV)$$

הצבה של ΔU ממשוואת שימור האנרגיה למעלה והעברת אגפים נותנת:

$$\frac{f+2}{f}P\Delta V + \Delta PV = 0$$

מחלקים ב- ΔV ומקבלים (בגבול $\Delta V \rightarrow 0$):

$$\gamma P + V\frac{dP}{dV} = 0$$

כאשר מסמנים $\gamma = \frac{f+2}{f}$.

על ידי פתרון המשוואה הדיפרנציאלית מקבלים לבסוף:

$$PV^{\gamma} = Const$$

עבור מולקולות דו-אטומיות, $f = 5$ ולכן $\gamma = 7/5$.

נספח 2: טרנספורם פורייה של גאוסיאן והקשר לעקרון אי-הוודאות.

נחשב את האינטגרל הבא:

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\frac{1}{2}(\sigma(k-k_0))^2} e^{ikx}$$

ראשית נציב: $u = \sigma(k - k_0)$:

$$I(x) = \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\frac{1}{2}(u^2 - i\frac{2}{\sigma}ux)} e^{ik_0x}$$

כעת, על ידי השלמה לריבוע נקבל:

$$I(x) = \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\frac{1}{2}(u-\frac{ix}{\sigma})^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2} e^{ik_0x}$$

אבל,

$$\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\frac{1}{2}(u-\frac{ix}{\sigma})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\frac{1}{2}u^2} = \sqrt{2\pi}$$

ולבסוף, לכן,

$$I(x)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}e^{ik_0x}$$

מסקנה: טרנספורם פורייה של גאוסיאן ברוחב $\frac{1}{\sigma}$ הוא גאוסיאן ברוחב σ.

הקשר לעקרון אי-הוודאות:

המצב של חלקיק קוונטי בזמן t במקרה החד-ממדי מתואר על ידי פונקציית גל $\Psi(x,t)$. Ψ היא פונקציה מרוכבת המאפשרת לחשב את הסיכוי למצוא את החלקיק במקום כלשהו לפי הכלל הבא: הסיכוי למציאת החלקיק במקום x פרופורציוני ל - $|\Psi(x,t)|^2$. ההתפתחות בזמן של פונקציית הגל מתוארת על ידי משוואת שרדינגר. אולם את אותו מצב קוונטי אפשר לתאר גם על ידי פונקציית גל $\widetilde{\Psi}(p,t)$ המתארת את ההתפלגות במרחב התנע, לפי כלל דומה: הסיכוי למציאת החלקיק עם תנע p נתונה על ידי $|\widetilde{\Psi}(p,t)|^2$.

מכיוון שפונקציית הגל של המקום ופונקציית הגל של התנע מתארות את אותו מצב קוונטי בבסיסים שונים, יש ביניהן קשר הדוק: פונקציית הגל של התנע מתקבלת מפונקציית הגל של המקום על ידי טרנספורם פורייה. כעת, מתכונות טרנספורם פורייה (כפי שמתואר למעלה), אם הפונקציה היא גאוסיאן צר, אז טרנספורם פורייה שלה רחב, ובהתאמה, אם המקום מוגדר היטב (התפלגות צרה) אז התנע לא מוגדר היטב (התפלגות רחבה).

נספח 3: האנלוגיה בין גל קול ובין חלקיק קוונטי חד-ממדיים

תכונה	גל קול	חלקיק קוונטי
אופי	תנודות של חלקיקי הגז.	מצב במרחב הילברט $|\Psi\rangle$. אפשר לחשוב על מרחב הילברט המתאים כעל מרחב הפונקציות המרוכבות במשתנה ממשי אחד שהן בעלות נורמה סופית.
תיאור מתמטי מקומי	y(x, t) מתאר את גודל התנודה x במקום בזמן t.	$\Psi(x,t)$ פונקציה מרוכבת. הסיכוי למצוא את החלקיק במקום x בזמן t נתון על ידי פונקציית הצפיפות: $P(x,t)=|\Psi(x,t)|^2$.
דינמיקה	משוואת הגלים: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$	משוואת שרדינגר: $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi$
הרמוניות	$\varphi_k(x)=e^{ikx}$ כאשר k היא התדירות המרחבית או מספר הגל. אורך הגל $\lambda=\frac{2\pi}{k}$.	$\varphi_k(x)=e^{ipx/\hbar}$ כאשר p הוא התנע.
טרנספורם פורייה	טרנספורם פורייה של התיאור המקומי, $\widetilde{y}(k,t)$ מתאר את העצמה של הרמוניית הגל בתדירות מרחבית k.	טרנספורם פורייה של התיאור המקומי, $\widetilde{\psi}(p,t)$ היא פונקציה מרוכבת כך שהסיכוי שלחלקיק יהיה תנע p בזמן t נתון על ידי פונקציית הצפיפות: $\widetilde{P}(p,t)=|\widetilde{\psi}(p,t)|^2$ (הערה: בהקשר של מרחב הילברט של המצבים הקוונטיים, אפשר לחשוב על טרנספורם פורייה כעל מעבר מהבסיס המקומי, שאיבריו הם המצבים העצמיים של אופרטור המקום , לבסיס התנע, שאיבריו הם ההרמוניות, שהן המצבים העצמיים של אופרטור התנע $P=i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$.)

דינמיקה הרמונית	לפי משוואת הגלים, ההשתנות בזמן של הפונקציות ההרמוניות נתונה על ידי: $\varphi_k(x,t)=e^{i(kx\pm\omega t)}$ כאשר הקשר בין התדר בזמן לתדר במקום נתון על ידי $\omega = ck$.	עבור חלקיק חופשי, $V(x)=0$, ולפי משוואת שרדינגר, ההשתנות בזמן של הפונקציות ההרמוניות נתונה על ידי: $\varphi_P(x,t)=e^{i(px\pm Et)/\hbar}$ כאשר הקשר בין התדר בזמן לתדר במקום נתון על ידי $E=\frac{p^2}{2m}$. אם החלקיק לא חופשי ($V(x)\neq 0$), זה קצת מסתבך.
חבילת גלים	נעה ימינה או שמאלה במהירות הקול c.	מתפרקת במשך הזמן. לפי הנוסחה למעלה, כל הרמוניה תתקדם במהירות שונה.
הדינמיקה של התוחלת (הממוצע) של חבילת גלים	תנועה במהירות קבועה. (מתקבלת ממיצוע משוואת הגלים)	תנועה לפי משוואות התנועה של ניוטון, כאשר הכוח הוא מינוס הגרדיאנט של הפוטנציאל. (למעשה, מהמיצוע של משוואת שרדינגר מקבלים את משוואות המילטון, השקולות למשוואות ניוטון).
עקרון אי-הוודאות	$\Delta x\cdot\Delta k = 1$ $\Delta t\cdot\Delta\omega = 1$	$\Delta x\cdot\Delta p \geq \hbar$ $\Delta t\cdot\Delta E \geq \hbar$
שניים (כאן מסתיימת האנלוגיה).	גל קול המורכב משני פולסים מתואר על ידי פונקציה שיש לה שני פיקים. זה כבר לא דומה כלל לתיאור של שני חלקיקים קוונטיים.	שני חלקיקים קוונטיים חד-ממדיים מתוארים על ידי פונקציה מרוכבת בשני משתנים. זה אולי אנלוגי במובן מסוים לגל קול במרחב דו-ממדי. (מובן מסוים = תיאור על ידי פונקציה בשני משתנים).

(הערה: בהקשר של מרחב הפונקציות המתארות את הגל, אפשר לחשוב על טרנספורם פורייה כעל מעבר מהבסיס המקומי, שאיבריו הן פונקציות δ של דיראק, לבסיס ההרמוני, שאיבריו הם הפונקציות ההרמוניות. זה דומה למעבר בסיס על ידי כפל במטריצה באלגברה ליניארית.)

נספח 4: מושגים מתמטיים

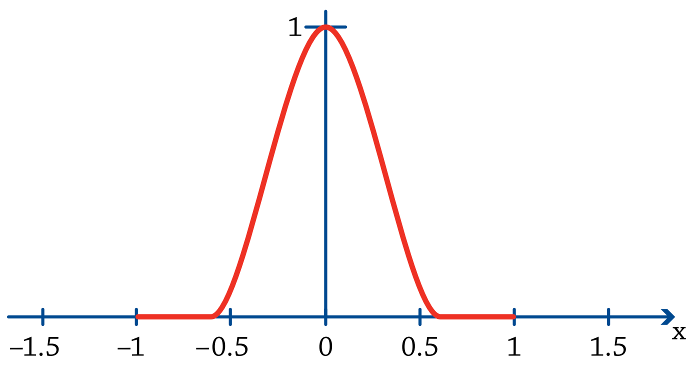
גאוסיאן: הגאוסיאן מתואר על ידי הפונקציה $f(x)=Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$.

הגרף של הפונקציה נראה כמו פעמון בגובה A, כאשר a הוא מרכז הפעמון ו σ רוחב הפעמון.

בהקשר של סטטיסטיקה, גאוסיאן (מנורמל לשטח 1) נקרא התפלגות נורמלית.

קירוב בסדר ראשון: נסתכל על פונקציה חלקה $f(x)$. הקירוב של הפונקציה בסדר ראשון בסביבת x_0 הוא קירוב הפונקציה על ידי משוואת המשיק בנקודה x_0:

$$f(x_0+\Delta x)\cong f(x_0)+\frac{df}{dx}(x_0)\Delta x$$



גרף של גאוסיאן ברוחב 0.6 סביב 0