גלי קול באוויר ואופטיקה גאומטרית

יפתח נבות

בית המדרש 'נקודת ארכימדס' למורים חוקרים בפיזיקה במרכז אחר"ת ובית הספר הרב-תחומי עמל עמק חרוד

העשרה

רקע

המאמר נכתב במסגרת לימודיי בבית המדרש 'נקודת ארכימדס', במרכז אחר"ת גליל מערבי[1]. בית המדרש 'נקודת ארכימדס' מכשיר מנחי חקר בפיזיקה, להנחיית מחקרים מעמיקים לתלמידי בית הספר העל יסודי. בית המדרש הוקם לפני שנתיים במרכז אחר"ת גליל מערבי, מתוך כוונה להכשיר פיזיקאים, אנשי היי-טק ומורים לקראת הנחיית מחקרים בפיזיקה ולמען הקמת מרכזי חקר בפיזיקה בכל הארץ, על פי מודל אחר"ת גליל מערבי. בימים אלה ממש (קיץ 2015) מסיימים בוגרי המחזור הראשון של בית המדרש הכשרה בת שנתיים. עוד על בית המדרש 'נקודת ארכימדס' ועל מרכז אחר"ת גליל מערבי ראו באתר: http://www.acheret.org.il/home.

הנושא של גלי קול עלה בעקבות הנחיית עבודת חקר של תלמיד בכיתה י"א. העבודה של התלמיד עסקה בהיבטים הפיזיקליים של התמצאות עטלפים במרחב באמצעות גלי הקול.

מבוא

עטלפים משתמשים באותות קצרים (פולסים) של גלי קול כדי "לראות". העטלף משמיע פולס קול וקולט את ההחזר. לפי הפרש הזמנים בין השמעת הקול לקליטת ההחזרה שלו, יכול העטלף לדעת את מרחקו מהעצם המחזיר.

שאלה: באילו תנאים ניתן להתייחס להחזרת גלי קול בקירוב של אופטיקה גאומטרית? הקירוב של אופטיקה גאומטרית, בהקשר של החזרה, מניח שכיוון הגל החוזר ממראה הוא הכיוון של החזרת ראי. כלומר, זווית ההחזרה שווה לזווית הפגיעה.

בחלק א' של המאמר נתאר מדוע מתקבלת החזרת מראה באופטיקה גאומטרית לפי עקרון פרמה.

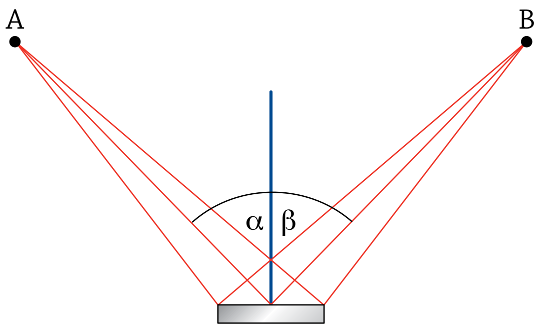
בחלק ב' נדון בקשר בין עקרון פרמה ועקרון הויגנס ובין עקרון הפאזה הסטציונארית.

בחלק ג' נתאר את התוצאות של חישוב ההחזרה של גל קול ממראה. חישוב האמפליטודה של הגל החוזר בנקודה כלשהי נעשה לפי כלל הויגנס ונוסחת קירכהוף על ידי אינטגרציה נומרית על משטח המראה. התוצאות מראות עד כמה ובאילו תנאים הקירוב של האופטיקה הגאומטרית מוצלח.

א. החזרת מראה לפי עקרון פרמה.

עקרון פרמה אומר שהמסלול של קרן אור הוא המסלול הקצר (או המהיר) ביותר.

נסתכל על קרן מ-**A** ל-**B** העוברת דרך המראה **M** (איור 1).



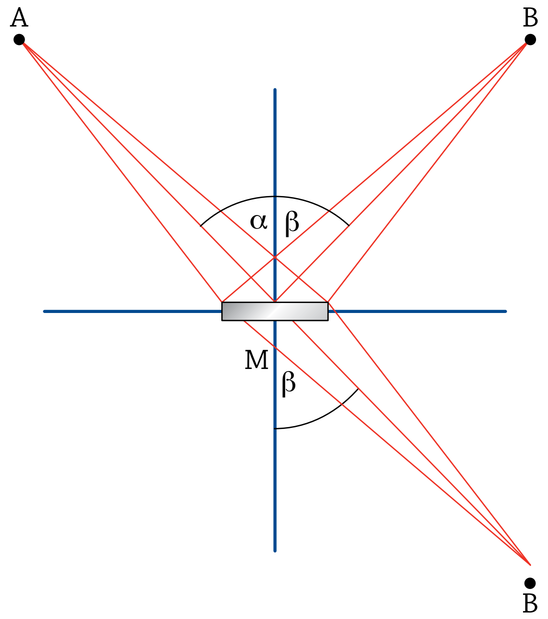
איור 1: קרן מ A ל B דרך M

1 על מרכז אחר"ת- במאמר של משה רייך, עמוס כהן ויותם הוכשטטר בתהודה 28 (מקור 7 ברשימת המקורות)

נבדוק איך משתנה אורך הקרן כאשר מזיזים את נקודת הפגיעה במישור המראה.

טענה: אורך הקרן מינימאלי כאשר זווית ההחזרה שווה לזווית הפגיעה. היינו, $\alpha = \beta$.

הוכחה: על ידי הסתכלות על הקו מ-**A** לתמונת הראי של **B** דרך **M** (איור 2). קו זה זהה באורכו לקו מ-**A** ל-**B** דרך **M**. הקו הישר הוא הקצר ביותר, ועבור קו ישר מתקבל $\alpha = \beta$.

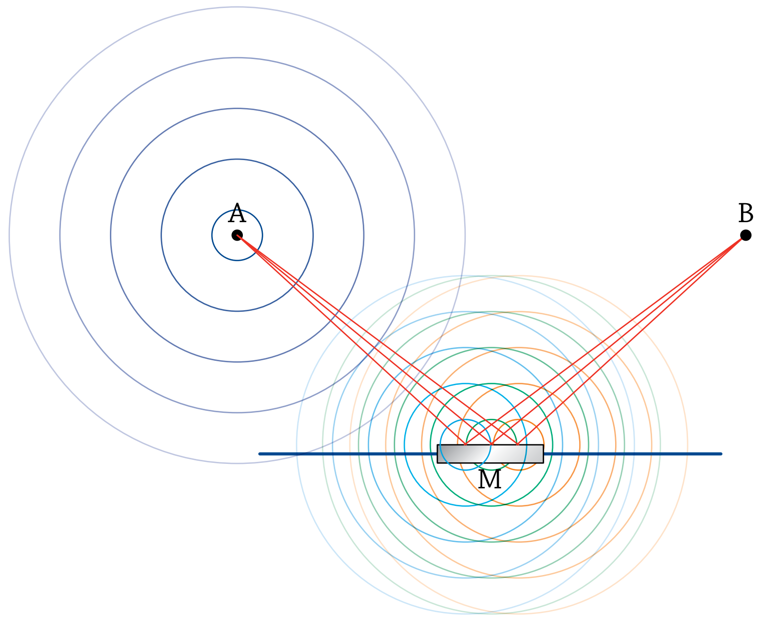


איור 2: קרן מ-A ל-B דרך M בתוספת תמונת ראי של B

ב. עקרון פרמה ועקרון הויגנס והקשר ביניהם.

נסתכל שוב על קרן מ-**A** ל-**B** דרך **M**. נניח שהמקור **A** פולט גל כדורי באורך גל λ. לפי עקרון פרמה, קרן האור נעה במסלול הקצר ביותר.

לפי עקרון הויגנס, לכל נקודה על המראה מתייחסים כאל מקור כפי שמצויר בתמונה למטה (הערה: הצבעים השונים הם רק להמחשה. אורך הגל נשאר קבוע.)



איור 3: עקרון הויגנס עבור אור היוצא ממקור נקודתי ומוחזר ממראה מישורית

לכן, אפשר לחשב את עוצמת האות בנקודה **B** על ידי סיכום הקרניים המגיעות מהמקור **A** דרך המראה **M**. אולם יש הפרש פאזה בין האותות המוחזרים מנקודות מראה שונות, לפי אורך הדרך האופטית השונה של כל קרן. אם למשל, הפרש הדרכים האופטיות שווה לחצי אורך גל, תתקבל התאבכות הורסת.

הקשר בין עקרון פרמה לעקרון הויגנס נובע מעקרון הפאזה הסטציונארית, כפי שיוסבר להלן.

נניח שאורך הגל קטן ביחס לגודל המראה, ושהמראה קטנה ביחס למרחקה מהמקור **A** ומהקולט **B**. נסמן ב- $\ell(x)$ את אורך הדרך האופטית מ-**A** ל-**B** דרך נקודה x על המראה.

הפרש הפאזה בין שתי נקודות סמוכות x_1 ו- x_2 נתון על ידי:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(\ell(x_2)-\ell(x_1)) \cong \frac{2\pi}{\lambda}\ell'(x_1)(x_2-x_1)$$

כאשר λ אורך הגל ו- $\ell'(x)$ הנגזרת של $\ell(x)$.[2]

כאשר מסכמים את התרומות של הקרניים המוחזרות מנקודות רבות לאורך המראה, על תחום שהוא גדול בהרבה מאורך הגל, מקבלים שהפאזה משתנה במהירות (כי אורך הגל קצר), ולכן תתקבל התאבכות הורסת. אבל השיקול הזה נכשל כאשר הנגזרת מתאפסת: $\ell'(x)=0$. במצב כזה הפרש הפאזה הוא אפס (הפאזה סטציונארית), ותתקבל התאבכות בונה. אולם תנאי התאפסות הנגזרת הוא התנאי לאקסטרמום מקומי של הדרך האופטית $\ell(x)$.

מסקנה: בנקודה אקסטרמאלית של הדרך האופטית בכלל ובנקודת מינימום בפרט מתקבלת התאבכות בונה. לכן עקרון הויגנס גורר את עקרון פרמה: קרן האור נעה במסלול הקצר ביותר.

הערה: כפי שרואים מכאן, אם המראה עקומה, אפשר לקבל התאבכות בונה גם במקסימום מקומי.

אך החישוב הזה נכון בהנחה שאורך הגל קצר מאוד ביחס לגודל המראה.

בפרק הבא נבדוק מה קורה כאשר אורך הגל גדל.

ג. חישוב ההחזרה של גל קול.

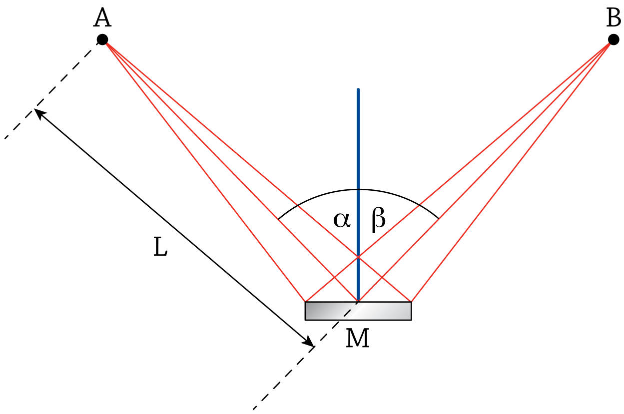
נסתכל שוב על ההחזרה של גל קול מ"מראה" מישורית קטנה, כמתואר באיור 4:

גל קול כדורי יוצא ממקור **A**, פוגע במראה **M** ונקלט במיקרופון בנקודה **B**. נחשב את עוצמת הקול הנקלט ב-**B** על ידי אינטגרל על שטח המראה, לפי עקרון הויגנס. הביטוי המדויק מתקבל על ידי נוסחת קירכהוף כפי שמתואר בנספח. עוצמת הקול הנקלט ב-**B** תלויה בתדירות המקור, במיקום המקור, בגודל המראה ובמיקום של הנקודה **B**.

ראשית נסתכל על שני מקרי קצה:

מקרה ראשון: מרחק המקור **A** גדול יחסית לגודל המראה, ואורך הגל קטן יחסית לגודל המראה. במקרה זה תיווצר במיקרופון **B** התאבכות הורסת לכל כיוון של הצבת המיקרופון, פרט לכיוון של החזרת מראה, כפי שתואר בפרק ב'.

מקרה שני: מרחק המקור **A** גדול יחסית לגודל המראה, ואורך הגל גם הוא גדול מאורך המראה. במקרה זה אין הבדל פאזה משמעותי בין הקרניים החוזרות מנקודות שונות על המראה, ולכן תתקבל התאבכות בונה בכל הכיוונים. אבל משיקולי שימור אנרגיה, העוצמה בכל הכיוונים תהיה חלשה.



איור 4: החזרת גל קול ממשטח חלק

2 השתמשנו בקירוב: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_1)$

כדי לבדוק מה קורה בתחום הביניים, נציג להלן את התוצאות של חישוב נומרי של האינטגרל המופיע בנוסחת קירכהוף.

החישובים נעשו בסצנה הבאה:

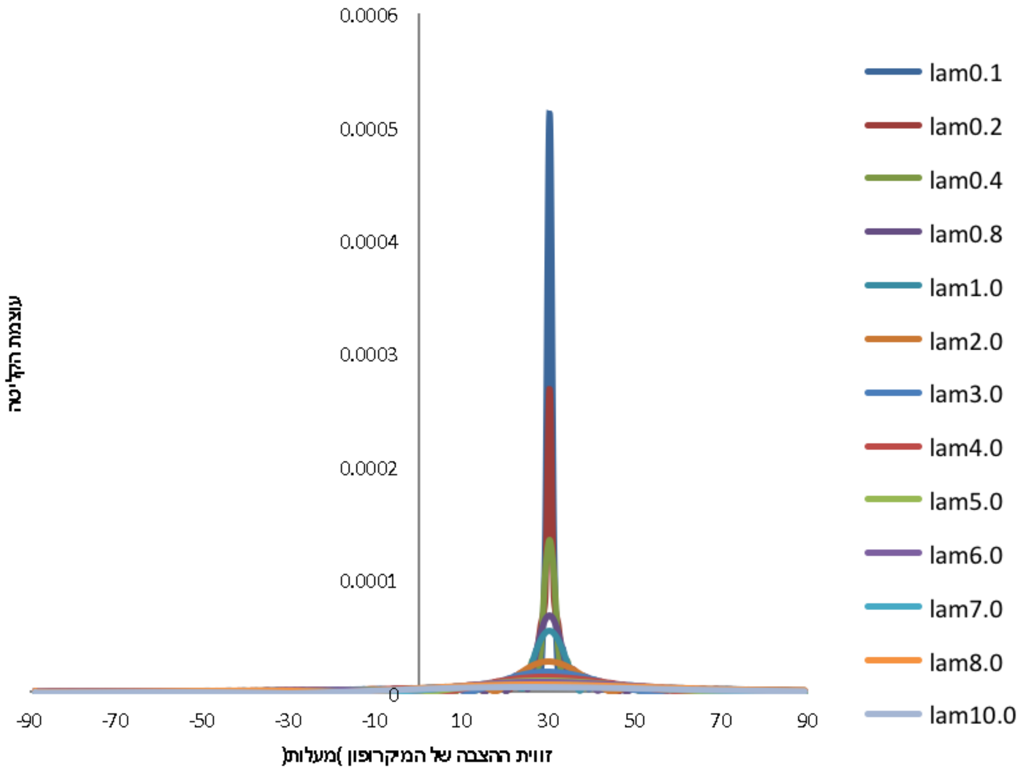
המראה היא בגודל 10 ס"מ.

המקור A ניצב במרחק L= 10 m ממרכז המראה בזווית $\alpha = 30^\circ$ (ראו איור 4).

המיקרופון B נמצא גם הוא במרחק 10 מטר ממרכז המראה, בכיוונים שונים. החישובים נעשו במספר אורכי גל בין 0.1 ס"מ ל-10 ס"מ.

עוצמת הקליטה נמדדת ביחידות יחסיות. כלומר, המספר מראה את אמפליטודת התנודה של לחץ האוויר בגל הקול הנקלט כאשר עוצמת המקור של הגל הכדורי מנורמלת ל-1, כפי שמתואר בנספח.

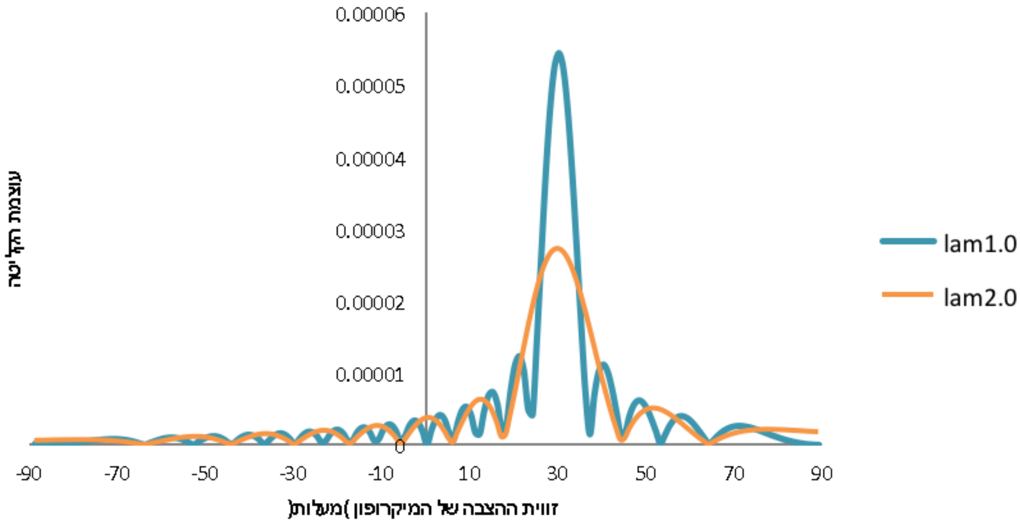
נציג את התוצאות בגרף המתאר את עוצמת הקליטה כפונקציה של זווית ההצבה של המיקרופון, בין -90° ל-90° ימינה מהניצב, לכל אורך גל (איור 5).



איור 5: עוצמת הקליטה בנקודה B כפונקציה של הזווית עבור אורכי גל שונים

רואים שאכן, באורך גל קצר (קו כחול, 0.1 ס"מ), מתקבלת החזרת מראה כמעט מושלמת, בזווית 30° ימינה. באורך גל ארוך (קו אפור, 10 ס"מ), מתקבלת עוצמה נמוכה של ההחזרה בכל הכוונים.

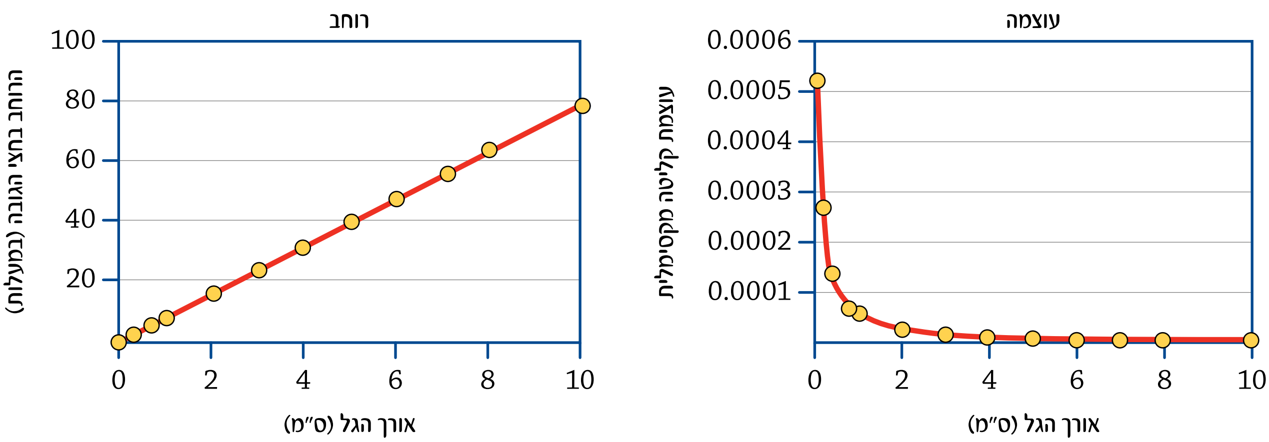
נציג בהגדלה את מה שקורה בשני אורכי גל בתחום הביניים (איור 6).



איור 6: עוצמת הקליטה בנקודה B כפונקציה של הזווית עבור שני אורכי גל: 1 ס"מ ו-2 ס"מ

כפי שרואים, הכיוונים שבהם מתקבלת התאבכות בונה "נמתחים" סביב הכיוון של החזרת הראי, וכן מופיעים כיוונים נוספים, בדומה לתמונת התאבכות של אור העובר דרך סדק צר.

הגרפים הבאים מציגים את עצמת הקליטה המקסימלית כפונקציה של אורך הגל ואת רוחב התחום הזוויתי (במעלות) שבו עצמת הקליטה גדולה או שווה לחצי מהעצמה המקסימלית כפונקציה של אורך הגל.



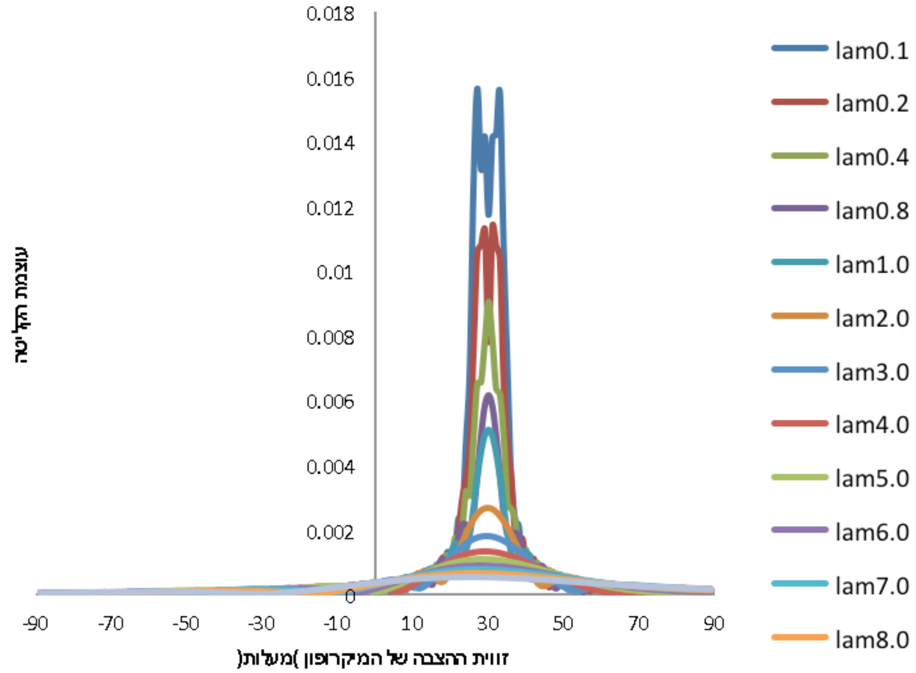
איור 7: עצמת קול מרבית ורוחב עקומת הקליטה כפונקציות של אורך הגל

נראה שרוחב האות גדל בקירוב באופן ליניארי עם אורך הגל. כאשר אורך הגל מגיע לרבע מגודל המראה, התחום הזוויתי של הגל המוחזר מגיע לרוחב של כעשרים מעלות.

ננסה לראות מה המשמעות של דבר זה עבור עטלף המשדר פולסים בתדר 33 קילוהרץ. תדר זה מתאים לאורך גל של סנטימטר אחד. אם העטלף נמצא במרחק 10 מטר מעצם שגודלו כ-10 ס"מ, גרף ההחזרה יתאים לקו התכול בגרף (איור 6). רוחב הפולס החוזר יהיה כ-10 מעלות. רוחב זה מגביל את הדיוק של העטלף באיתור העצם המחזיר מצד אחד, ומצד שני מאפשר את זיהוי העצם גם כאשר השידור אינו מכוון אליו במדויק או כאשר המשטח נטוי מעט.

הערה: המצב של העטלף שונה מעט מזה שתואר למעלה, כי המשדר והקולט קרובים מאוד זה לזה. זה דומה לחישוב של ההחזרה כאשר זווית הפגיעה היא $\alpha = 0^\circ$. החזרת המראה במקרה זה היא סביב $\beta = 0^\circ$, אבל צורת ההתפלגות ורוחבה אינם משתנים בהרבה.

הערה אחרונה: כאשר העטלף מתקרב לעצם, התמונה של החזרת מראה מדויקת (זווית פגיעה שווה לזווית ההחזרה) מיטשטשת גם באורכי הגל הקצרים. הגרף הבא מציג את עצמת הקליטה כפונקציה של זווית ההצבה של המיקרופון, עבור מקור בזווית 30° שמאלה, לאורכי גל שונים, כמו בגרף הקודם. אך הפעם מרחק המקור והמיקרופון מהמראה הוא מטר אחד בלבד. גודל המראה עדיין 10 ס"מ. מכיוון שלמיקרופון אין הפרדה זוויתית, מתקבלת באורכי גל קצרים התאבכות מתעתעת גם בכיוון של החזרת מראה (איור 7). לכן במקרה זה יש יתרון לשימוש באורכי גל בתחום הביניים לצורך מציאת המיקום.



איור 9: החזרה ממראה קרובה למקור ולקולט

ביבליוגרפיה

1. על גלי קול:

L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Pergamon Press (1959), Chapter 8.

2. על חישוב ההחזרה על ידי אינטגרל קירכהוף:

J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Second Edition, Jhon Wiley & Sons, Sec. 9.8

3. על עטלפים ואקולוקציה:

H. Raghuram, G. Marimuthu Donald Redfield Griffin, the discovery of echolocation, Resonance - Journal of Science Education, 10 (2) (2005). pp. 20-32. ISSN 0971-8044

וגם

Matti Airas, HUT, Echolocation in bats, Laboratory of Acoustics and Audio Signal Processing

4. עוד על עטלפים, מתוך האתר:
http://www.parks.org.il/News/Pages/batsNoam2.aspx

5. ועוד על עטלפים, מתוך ההרצאה של דוקטור יוסי יובל באוניברסיטה תל אביב:
http://www.youtube.com/watch?v=83UfPKvGqyI

6. יפתח נבות, גלי קול באוויר ועקרון אי-הוודאות, תהודה 2 ,1-33.

7. על מרכז אחרו"ת:
רייך, משה; כהן, עמוס; הוכשטטר, יותם (2009). אחרו"ת - אחוות חוקרים רב-תרבותית: המרכז היהודי ערבי לעבודות חקר בפיסיקה בגליל המערבי. תהודה, כרך 28, חוברת 1 - 2, עמ' 53 - 62 . וגם http://stwww.weizmann.ac.il/ptc/ Tehuda/28-1-2/53-62.pdf

נספח

עקרון הויגנס אומר שעוצמת הגל בנקודה **B** מתקבלת על ידי סיכום על כל נקודות המראה של הקרניים היוצאות מ-**A** ומוחזרות מהמראה **M**. נוסחת קירקהוף מראה איך לשקלל מתמטית את הסכום הזה.

נתחיל את הפיתוח במשוואת הגלים, שצריכה להתקיים בכל נקודה מחוץ למראה ולמקור:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 y$$

נניח תלות הרמונית בזמן: $y(x,t) = \psi(x) e^{i\omega t}$, כך שמתקבלת משוואת הלמהולץ עבור התלות במקום: $(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$.

רוצים לפתור את המשוואה הזאת בתנאי שפה של ערכי פונקציית הגל על פני המראה. נניח גם תנאי שפה של התאפסות באינסוף.

קירוב קירקהוף: מניחים תנאי שפה לפי העצמה שהייתה מתקבלת בנקודות המראה לולא הייתה שם מראה. עבור גל כדורי היוצא מהמקור **A** ונקודת מראה **x**, במרחב תלת-ממדי, מקבלים שתנאי השפה הוא:

$$\psi(x) = \frac{1}{4\pi\,|x-A|} e^{ik|x-A|}$$

לפי משפט גרין, אפשר לכתוב את הפתרון למשוואת הלמהולץ בתנאי השפה הנתונים כאינטגרל על פני המראה, כך שבנקודה B מקבלים:

$$\psi(B) = \int_M d^2a(x)[\psi(x) n(x)\cdot\nabla G(x,B) - G(x,B) n(x) \nabla\psi(x)]$$

כאשר n(x) הוא הניצב למראה בנקודה x ו- G היא פונקציית גרין:

$$(\nabla^2 + k^2) G(x,x') = -\delta(x-x')$$

במרחב תלת-ממדי פונקציית גרין נתונה על ידי גל כדורי:

$$G(x,x') = \frac{1}{4\pi\,|x-x'|} e^{ik|x-x'|}$$

הצבה של G ושל תנאי השפה המתוארים למעלה נותנת את נוסחת קירקהוף לעצמת הגל בנקודה B (פירוט החישובים מופיע בקלסיקל ג'קסון, פרק 9 סעיף 8):

$$\psi(B) = -\frac{k}{2\pi i}\int_M d^2a(x) \frac{e^{ik|x-A|}}{|x-A|} \frac{e^{ik|x-B|}}{|x-B|} \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + \cos(\beta))$$

כאשר α ו-β הן זוויות הפגיעה וההחזרה בהתאמה.

החישוב הנומרי נעשה על ידי תכנית מחשב בשפת סי++.