השימוש בעקרונות יסוד במקום מתימטיקה בהוראת תורת הגלים*

מאת: רפאל כהן, המחלקה להוראת המדעים
וביה"ס התיכון האיזורי רמלה-לוד

בתכנית רחובות, תורת הגלים ותורת האור הפיסיקלית נלמדות בדרך כלל לפני שיש לתלמידים הבסיס המתימטי לטיפול בנושא (טריגונומטריה ופאזורים). מטרתי להראות כי גם בתנאים אלה ניתן להגיע למסקנות כמותיות רבות בעזרת מתימטיקה בסיסית, תוך שימוש בעקרון הסופרפוזיציה ועקרון שימור האנרגיה.

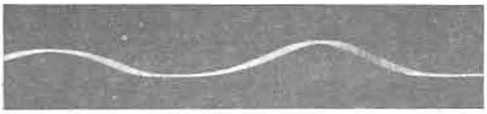
ברצוני להדגיש, שגם בכיתה בעלת בסיס מתימטי מספיק לטיפול מדויק יותר, הגישה המובאת כאן תמיד קלה יותר כפגישה ראשונה בנושא.

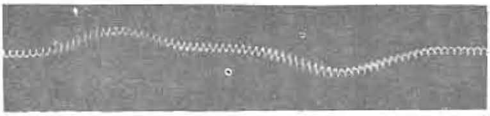
ברור, אין כאן יומרה לבצע חישובים מדוייקים, ועוקפים נקודות עדינות. המטרה החשובה היא להביא את רוח הדברים. אך, באופן מפתיע, התוצאות טובות מאוד בהתחשב בדלות הכלים.

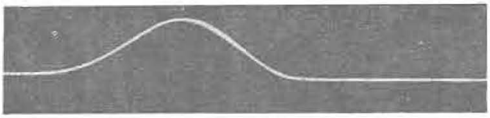
א. <u>קשרים אנרגטיים בגלים על קפיצים</u>

כדוגמא ראשונה נבחן את הקשר בין האנרגיה הפוטנציאלית והקינטית של פולס מתקדם על קפיץ. ננסה גם לקבוע כיצד האנרגיה הכוללת של פולסים שונים, בעלי אותו אורך וצורה דומה, תלויה באמפליטודה שלהם.

נתחיל בהתבוננות על שתי סדרות של תצלומים של שני פולסים סימטריים זהים, הנעים בכיוונים מנוגדים על קפיץ. (התצלומים שלהלן הם רק חלק מסדרת התצלומים המופיעה, לדוגמה, בספר "אור וגלים"[1]).



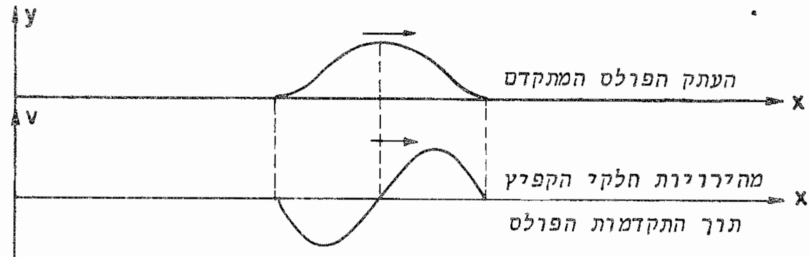




בסדרה הראשונה, אחד הפולסים הוא כלפי מעלה והשני כלפי מטה. כאשר הם נפגשים, הקפיץ כמעט ישר, דבר המראה את ביטול ההעתקים. אך שני חלקים מן הקפיץ מאוד מטושטשים על התצלום; דבר זה מראה על מהירויות גבוהות של חלקים אלה של הקפיץ בכיוון מאונך לו עצמו.

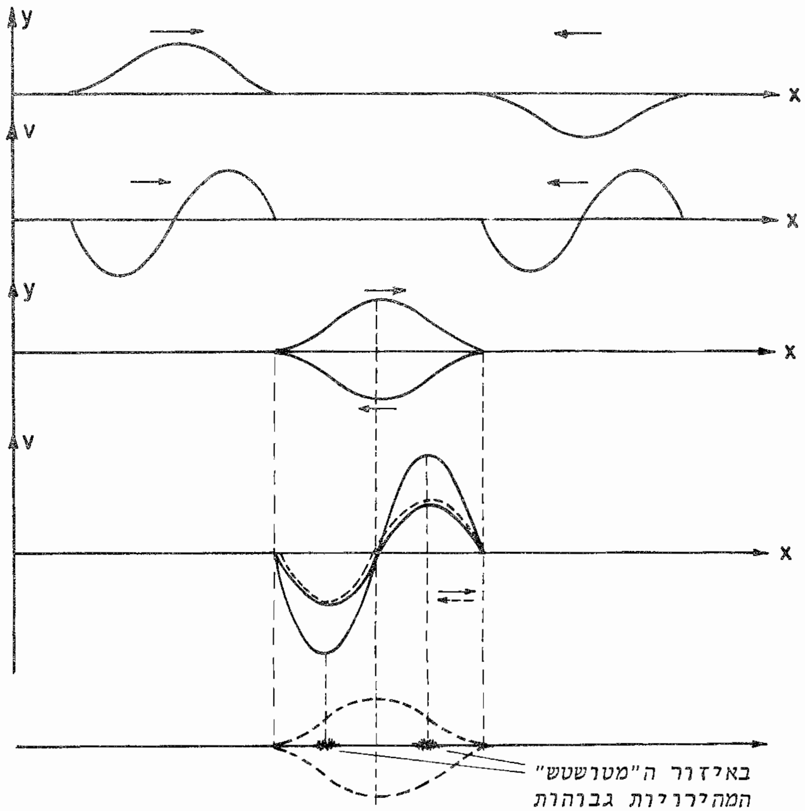
*מאמר זה הוא תרגום של הרצאתו של מר כהן שניתנה במסגרת כנס GIREP שהתקיים במכון ויצמן באוגוסט 1979.

בסדרת התצלומים השניה, שני הפולסים כלפי מעלה, ובשעת פגישתם אנו רואים אמפליטודה כפולה. בו בעת אנו רואים שהקפיץ נראה חד מאוד בתצלום, דבר המוכיח התאפסות המהירויות של חלקי הקפיץ. ברגע זה הקפיץ כולו במנוחה.



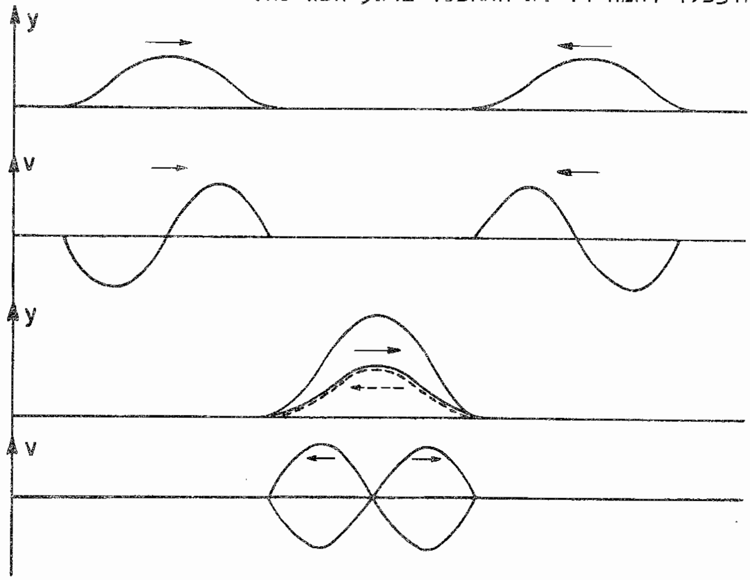
תרשים 1

שתי סדרות התצלומים מוסברות תוך שימוש בעקרון הסופרפוזיציה לא רק לגבי ההעתקים, כי אם גם לגבי המהירויות של החלקים השונים של הקפיץ בכיוון מאונך לקפיץ עצמו. אנו יכולים לראות את הפולס הנע כגרף של ההעתק y כפונקציה של המקום x; מגרף זה אפשר להסיק את גרף המהירויות v כפונקציה של x (תרשים 1). עבור צורה סימטרית של הפולס כמו בתמונה, מתקבל גרף מהירויות הדומה לגרף סינוס [2].



תרשים 2

עתה אפשר לראות מתרשימים 2 ו 3 שעקרון הסופרפוזיציה, כשהוא מופעל על העתקים ומהירויות, מסביר כל מה שרואים בתצלומים: בסדרה ראשונה של התצלומים, כאשר נפגשים הפולסים, כל העתקים התאפסו וכל המהירויות הוכפלו; בסדרה השניה, כל ההעתקים הוכפלו והמהירויות התאפסו ברגע הפגישה.



תרשים 3

האנרגיה הכוללת של כל פולס הינה הסכום של האנרגיות הקינטיות של כל החלקים הנעים של הקפיץ בתחום הפולס עצמו, והאנרגיה הפוטנציאלית הנובעת מעיוות הקפיץ. עבור פולס בעל אמפליטודה A, נסמן את האנרגיה הקינטית ב- E_k והאנרגיה הפוטנציאלית ב- U(A). כמובן קיים:

$$E = E_k + U(A)$$

עבור כל אחד מן הפולסים, כל אחת מן האנרגיות האלה קבועה, משום שצורת הפולס אינה משתנה בזמן תנועתו. כאשר שני הפולסים נפגשים במקרה הראשון, האנרגיה הכוללת של שני הפולסים יחד, 2E, מופיעה כאנרגיה קינטית בלבד, בגלל התיישרות הקפיץ והתאפסות האנרגיה הפוטנציאלית בעקבות זאת. שימור האנרגיה מחייב לכך:

$$2E = 2[E_k + U(A)] = 4E_k$$

משום שבעקבות הכפלת כל המהירויות, האנרגיה הקינטית גדלה פי ארבעה. פתרון משוואה פשוטה זו מראה כי האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית של פולס שוות זו לזו, וכל אחת מהן הינה מחצית מן האנרגיה הכוללת של הפולס.

$$E_k = U(A) = \frac{E}{2}$$

במקרה השני, ברגע שנפגשים הפולסים, כל האנרגיה של שני הפולסים היא פוטנציאלית (מהירויות אפס) עבור אמפליטודה כפולה.

לכן: $2E = 4U(A) = U(2A)$

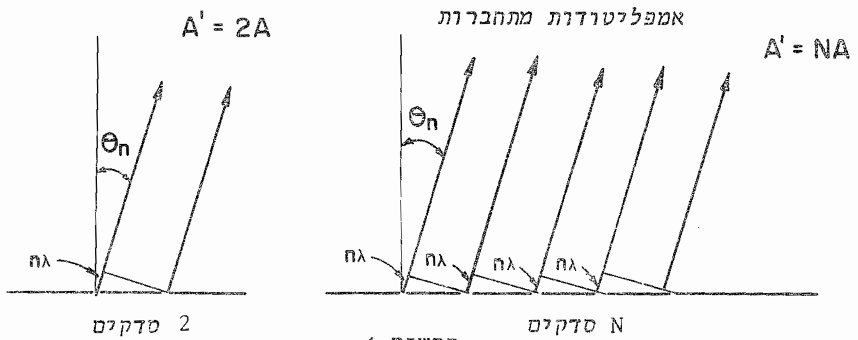
מכאן נובע הקשר הריבועי עבור האנרגיה הפוטנציאלית:

$$U(A) \propto A^2$$

קשר המתאים למה שידוע לנו על אנרגיה פוטנציאלית של קפיץ כפונקציה של התארכותו. בעזרת נימוק פשוט זה קיבלנו את הקשר הזה גם עבור העתקים מאונכים. נניח עתה, כי קשר זה קיים עבור כל הגלים, ונשתמש בו בדוגמאות הבאות.

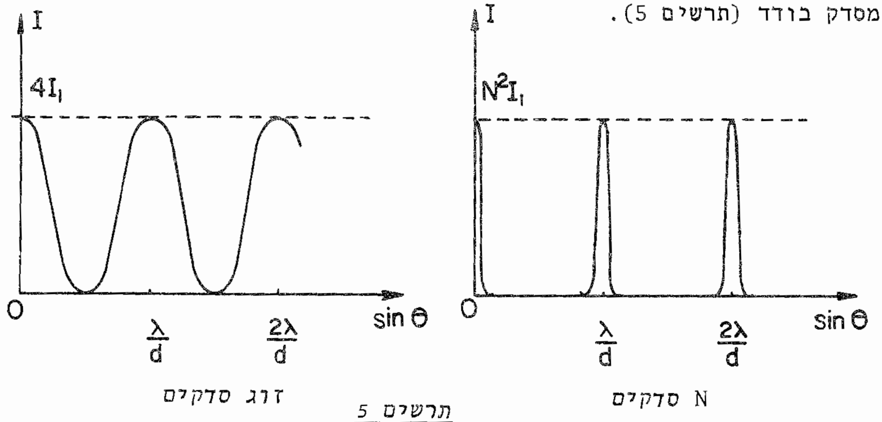
ב. <u>שריג עקיפה וכושר הפרדה</u>

אחרי ביצוע ניסוי יאנג (התאבכות האור העובר דרך זוג סדקים), התלמידים יודעים כי קיימים מכסימה של עוצמה בכיוונים θ_n בהם הפרש המסלולים בין הגלים הבאים משני הסדקים הוא $n\lambda$ (גלים שווי מופע).



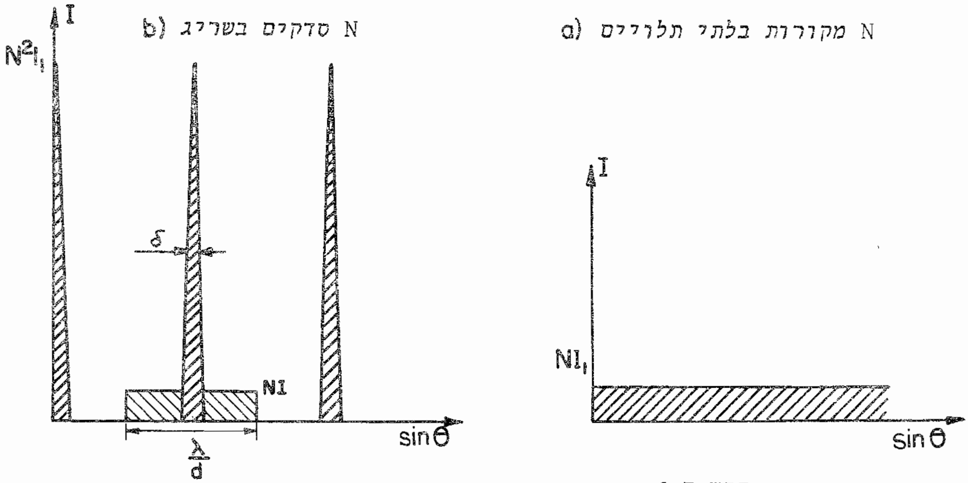
<u>תרשים 4</u>

הם גם רואים כי מכסימה אלה רחבים, ולא ניתן להפריד בין הצבעים השונים בספקטרום. מאידך הם גם רואים ששריג עקיפה מאפשר להפריד בין הצבעים. אם המקור הוא בעל ספקטרום קווי (נורת כספית, לדוגמה) הם רואים מכסימה חדים מאוד של אור מונוכרומטי, וחושך ביניהם. מטרתנו היא להבין מה הסיבה לכך. ברור מתרשים 4, שעוצמת אור מכסימלית תתקבל בכיוונים (זוויות) θ_n שאינם תלויים במספר הסדקים. כאשר הפרש המסלולים בין הגלים הבאים משני סדקים סמוכים הוא $n\lambda$ (סדר n), כל הגלים מגיעים שווי מופע והאמפליטודות מתחברות. אם האמפליטודה של אחד הגלים היא A, האמפליטודה של מכסימום עבור N סדקים תהיה NA. היות והעוצמה פרופורציונית לריבוע האמפליטודה, העוצמה עבור N סדקים תהיה פרופורציונית ל- N^2A^2 ותהיה איפוא N^2I_1, אם I_1 היא העוצמה מסדק בודד (תרשים 5).



<u>תרשים 5</u>

עוצמה פירושה צפיפות האנרגיה, וזו פרופורציונית ל N^2 במכסימום. היות והאנרגיה הכוללת עבור N סדקים פרופורציונית ל-N בלבד, משתמע מכך שהחלוקת הזוויתית של האנרגיה אינה אחידה. האנרגיה הכוללת היא השטח מתחת לגרף המתאר את העוצמה כפונקציה של הזווית (או הסינוס שלה). אם האנרגיה הבאה מכל סדק פרופורציונית ל-I_1, האנרגיה הכוללת מ-N סדקים תהיה פרופורציונית ל- NI_1. אילו חלוקת האנרגיה במרחב היתה אחידה, האנרגיה הכוללת היתה מיוצגת על ידי השטח מתחת לקו האופקי בגובה NI_1 (תרשים 6).



תרשים 7

תרשים 6

במקרה של שריג בעל N סדקים, האנרגיה הכוללת היא השטח של המכסימה שגובהם N^2I_1 (תרשים 7). בשני המקרים האנרגיה הכוללת זהה, לכן גם השטחים שווים. אם נקרב את צורת המכסימום על ידי משולש, אשר רוחבו בחצי הגובה הוא δ (רוחב המכסימום) אזי ברור מן התרשים שמתקיים:

שטח המשולש = שטח המלבן

$$NI_1 \cdot \frac{\lambda}{d} = \delta \cdot N^2 I$$

$$\delta = \frac{1}{N} \cdot \frac{\lambda}{d}$$

אנו רואים איפוא שרוחב המכסימום פרופורציוני הפוך למספר הסדקים. מובן, איפוא, מדוע המכסימה המתקבלים בשריג עקיפה צרים כל כך.

כדי להפריד בין שני צבעים בעלי אורכי גל קרובים זה לזה $(\lambda_1 \simeq \lambda_2)$, המרחק הזוויתי המינימלי בין המכסימה חייב להיות δ (הקריטריון של Rayleigh). אם נסתכל בסדר ה-n נוכל לכתוב:

$$n\,\frac{\lambda_1}{d} - n\,\frac{\lambda_2}{d} \geqslant \frac{\lambda}{Nd}\ ;\ \lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq \lambda$$

או:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \geqslant \frac{1}{nN}$$

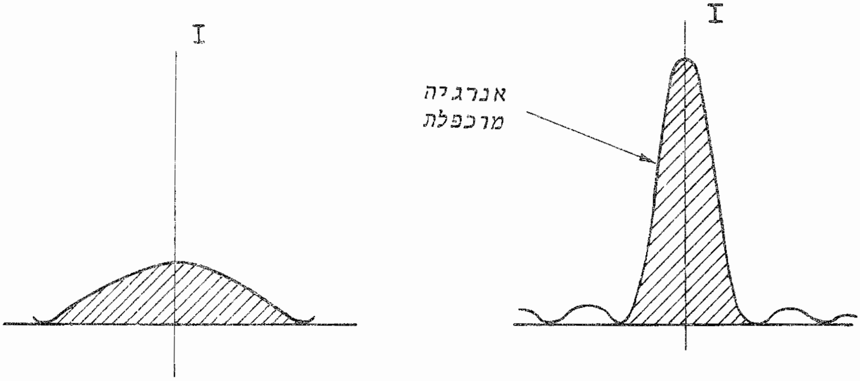
$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leqslant Nn$$

וזו הנוסחה הידועה היטב עבור כושר ההפרדה של שריג עקיפה.

ג. <u>עקיפה בסדק יחיד</u>

לא כל כך קשה להראות, בעזרת עקרון הסופרפוזיציה ועקרון הויגנס, שהעוצמה מתאפסת בפעם הראשונה בתבנית העקיפה של סדק יחיד שרוחבו w בזווית $\frac{\lambda}{w}$. משמע, רוחב הפס המרכזי בתבנית העקיפה פרופורציוני הפוך לרוחב הסדק.

התבוננות בתרשים 8 מראה, כי העוצמה במרכז פס זה פרופורציונית לריבוע רוחב הסדק.



a) רוחב w
עוצמה I

<u>תרשים 8</u>

b) רוחב 2w
עוצמה 4I

בסיכום, אנו רואים שיכולנו להסביר לא מעט עובדות כמותיות ללא שימוש במתימטיקה מתקדמת עובדות אשר הן בדרך כלל מעבר ליכולת ההשגה של תלמידים מתחילים.

<u>ספרות</u>

(1) אור וגלים, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות. עמודים 95, 98.

(2) אור וגלים, מדריך למורה חלק ב', המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות. עמודים 27-29.