פרקטלים בטבע - משחק נחמד בקוביות וכרובית

רוט יהודה, בר-אילן לימור, עזרן אברג'יל עינת, החוג לטבע ומדע, מכללת אורנים, קרית טבעון

עם ההתווספות של יחידת הבחירה "כאוס"[1] מצאנו לנכון להציג פרוייקט נחמד על פרקטלים, המתאים גם לתלמידים שאינם בוחרים בהכרח בפיסיקה ברמה של 5 י"ל ולתלמידים בקבוצות גיל נמוכות יותר.

בעבודה זו הדגמנו כיצד הגיאומטריה הפרקטלית מתארת צורות שונות בטבע. בחלק הראשון של העבודה טיילנו בחוץ וצילמנו דוגמאות של אובייקטים שונים בטבע החושפים דמיון עצמי. בחלק השני השתמשנו בגיאומטריה של המימד השבור לחישוב המימד הפרקטלי של כרובית.

מבוא

תחום הכאוס קיים כבר עשרות שנים. ראשיתו בניסיונות ליצור מודל לחיזוי מזג אוויר[2, 3] בו התברר לראשונה קיומן של מערכות הרגישות לתנאי התחלה כך ששינוי ולו מזערי, גורם לשינוי גדול בהתפתחות המערכת ביחס למצבה המקורי. תופעה זו של אי וודאות כתוצאה מרגישות לתנאי התחלה נחקרה ונבנו עבורה מודלים מתמטיים. אחד הכלים השימושיים לתיאור התופעות הכאוטיות הוא הגיאומטרייה של מימד שבור (מימד פרקטלי).

הגיאומטרייה האוקלידית הקונבנציונלית המתארת גופים "ישרים" כקוביות, ריבועים, משולשים וגופים "חלקים" כמו כדורים, עיגולים, אליפסות וכיו"ב, נכשלת בתיאור צורות רבות שבהן קוי המתאר אינם חלקים אלא מכילים פרטים רבים. דוגמאות רבות כאלו יש בטבע. לדוגמה, תיאור המבנה של כרובית. האם ניתן לטעון שהיא כדורית? זהו כמובן קירוב גס.

תצלום 1: ראש כרובית, לכרובית יש מבנה מורכב אך מסודר שאינו ניתן לתאור בגאומטריה האוקלידית.

ההתבוננות בכרובית מראה **צורה מאוד מסודרת** עם פרטים רבים החורגים מהמבנה הכדורי (ראה תצלום 1). כלומר, בתיאור נכון ומדויק של הכרובית הגיאומטריה האוקלידית נכשלת. באופן מפתיע דווקא הגיאומטרייה הפרקטלית, שנולדה מתחום של חוסר וודאות, הכאוס, מתארת בצורה מצוינת צורות מסודרות בטבע כמו בדוגמה של הכרובית.

דמיון עצמי

נתבונן שוב בכרובית. אם נפרק אותה לחלקים נראה "כרוביות קטנות יותר" המורכבות גם הן מ"כרוביות קטנות" וכך הלאה.

תצלום 2: כרובית המחולקת לחלקים

צורה זו של דמיון עצמי קיימת בטבע במגוון רחב של תופעות, מראש כרובית ועד לעננים, מכלי הדם בגוף ועד להרים, עצים ועוד רבים אחרים. בכל הדברים האלה, הסתכלות קרובה יותר ויותר תיתן לנו תמונה שתהיה דומה לזו שבסקאלה הגדולה יותר.

המתמטיקאי הצרפתי-אמריקאי, בנואה מנדלברוט חקר החל משנת 1955 נושאים מגוונים כתורת האינפורמציה, כלכלה ודינמיקת נוזלים. הוא גילה שהעיקרון של דמיון עצמי מופיע בכל התחומים הללו, ובשנת 1975 טבע את המושג פרקטל לתיאור תופעה זאת וכן את המושג מימד לא שלם.[3]

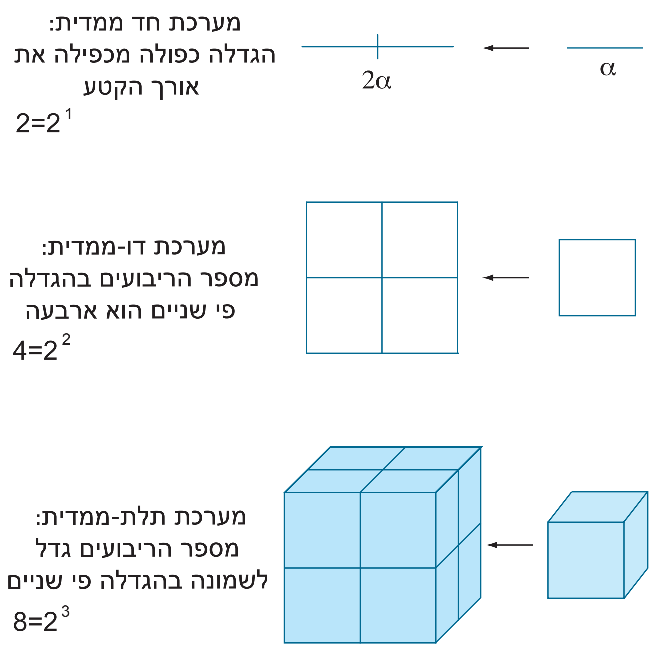
מנדלברוט חשב שיש כאן משהו מורכב ושונה שיש צורך למסד אותו מתמטית וב־1975 טבע את המושג "פרקטלים" מהמילה הלטינית "פרקטוס" המציינת שבר. כפי שהוא הגדיר זאת, פרקטל הוא צורה שאיננה ניתנת לתיאור באמצעות גאומטריה אויקלידית ושיש לה תכונת הדמיון העצמי, כלומר היא נשארת דומה לעצמה גם כאשר מתבוננים מקרוב בחלק קטן שלה. צריך לציין שעד אז רק קטעים ישרים היו (בצורה טריוויאלית) דומים לעצמם בגיאומטריה המקובלת. נראה בהמשך שהגדרת הפרקטלים איפשרה לתת להם מימד לא שלם, בניגוד למימדים השלמים של קטעים, צורות מישוריות ונפחים שהיו היחידים המוכרים. לשם כך נסביר ראשית את המושג מימד.

מימד פרקטלי - דמיון עצמי:

ההגדרה המתימטית המדויקת של מימד היא הגדרתו של המתימטיקאי האוסדורף (Hausdorff)[4]. אנו נביא רק דוגמאות פשוטות להבהרה.

אם נגדיל (או נקטין) גודל המאפיין צורה גיאומטרית או גוף גיאומטרי פי מספר שלם מסוים שנקרא לו **הכופל**,יגדלו (או יקטנו) בהתאמה גדלם הכללי של הצורות או הגופים פי אותו מספר שלם בחזקת המימד של הצורה כמתואר להלן.

קטע מוגדר כבעל ממד אחד, צורה מישורית כבעלת שני ממדים וגופים בעלי נפח כתלת ממדיים. הגדרות אלו יוסברו באמצעות מושג ההגדלה (או ההקטנה).



תרשים 1: שינוי מספר התבניות בהגדלה פי 2.

אם נגדיל קטע באורך a פי 2 נקבל קטע חדש שאורכו 2a ולכן הוא מכיל שני קטעים כל אחד באורך a.

נבצע תהליך דומה עבור ריבוע שאורך צלעו a. אם נצפה בו תחת הגדלה כפולה, אורך הצלע תהיה 2a נקבל ארבעה ריבועים, כל אחד בעל צלע באורך a, כלומר בהגדלה פי 2 נקבל שמספר תבניות הריבוע גדל פי ארבעה. באופן דומה אם נגדיל מקצוע של קובייה שגודלו a פי שניים נקבל שמונה קוביות חדשות, כל אחת בעלות מקצוע a (ראה תרשים 1).

רואים שיש קשר בין ההגדלה, מספר התבניות והמימד בהתאם לנוסחה:

(1) $N = M^d$

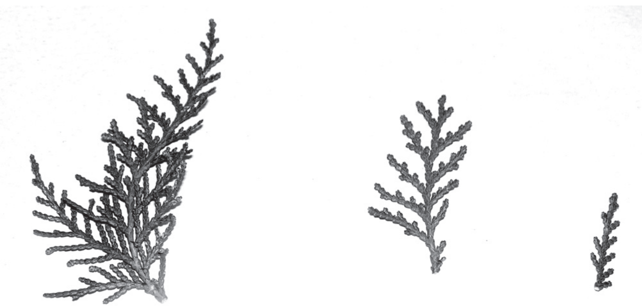
(1a) $\log N/\log M=d$

כאשר N מספר התבניות (בדוגמה שלנו קטעים, ריבועים, קוביות), M ההגדלה (בדוגמה שלנו M=2) ו־d הוא המימד

תיאור העבודה

חלק א' – טיול בחוץ

בשלב הראשון עשינו טיול בחוץ והסתכלנו מסביב לראות עצמים בעלי דמיון עצמי. לפניכם שתי דוגמאות:



תצלום 3: ברוש טויה. לענפים יש מבנה של דמיון עצמי. כשחותכים.

בתצלום 3 רואים את הדמיון העצמי בענף של ברוש טויה. חלק מן הענף נראה כמו הענף המקורי.

בתצלום 4 מודגם הדמיון העצמי בעץ אורן שבו כל ענף נראה כמו העץ עצמו.

חלק זה היה חוויתי. המעוניינים בהתרשמות מהכמות העצומה של פרקטלים בטבע יכולים למצוא בעזרת מנוע החיפוש www.google.co.il עם צמד המילים fractals+nature דוגמאות רבות.

דוגמה אחת לתוצאת החיפוש היא האתר:

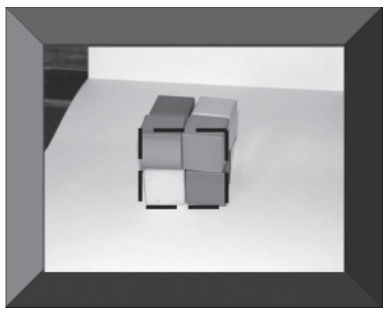
http://www.ba.infn.it/~zito/project/nfractals.html

תצלום 4 עץ ג׳קרנדה. בריבוע עם הקו המרוסק מסומנת הסתעפות של חלק מהעץ.

תצלום 4א׳: חלק העץ שבריבוע עם הקו המרוסק.

חלק ב – המחשה של חישוב מימד באמצעות מדידת מרחקים, או: משחק בקוביות

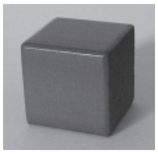
בחלק זה אנו מראים כיצד ניתן לחשב את ההגדלה באמצעות מדידת מרחק. נדגים זאת – צילום קוביות.



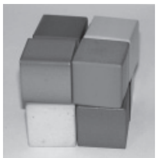
תצלום 5

שיטת הצילום: במצלמה יש סימון של ריבוע. מרחיקים את המצלמה עד שהקוביות נראות בגודל של הריבוע (ראה תצלום 5). ממדידת היחס שבין המרחקים ניתן לדעת את ההגדלה.

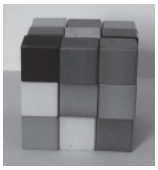
התוצאות



עבור קובייה אחת, התקבל מרחק המצלמה מהקובייה 16 ס״מ.



עבור 8 קוביות התקבל מרחק של 31 ס״מ.



עבור 27 קוביות התקבל מרחק של 47 ס״מ.

עבור 64 קוביות התקבל מרחק של 63 ס״מ.

נסכם את התוצאות (המופיעות בתמונות ותוצאות נוספות) בטבלה הבאה:

מספר הקוביות (N)	המרחק שבו הריבוע של המצלמה מתאים לתמונה (ס״מ)	הגדלה צפויה	חישוב ההגדלה הנמדדת
1	16	1	$\frac{16}{16}=1$
8	31	2	$\frac{31}{16}=1.9$
27	47	3	$\frac{47}{16}=2.9$
64	63	4	$\frac{63}{16}=3.9$
125	80	5	$\frac{80}{16}=5$
216	95	6	$\frac{95}{16}=5.9$

חלק זה של הניסוי היה אבן בוחן לדיוק השיטה. מהשוואת שתי העמודות האחרונות אנו רואים שמתקבל דיוק לא רע שאינו עובר טווח שגיאה של 3%.

חישוב המימד הפרקטלי של כרובית

על מנת שאפשר יהיה להכליל את המושג מימד עבור פרקטלים, מכלילים את ההגדרה של מימד הנתונה בנוסחאות (1), (1a), ומגדירים את המימד d על ידי הנוסחה: $d = \log N/\log M$.
בחלק זה בצענו את הפעולות הבאות: ראשית הצבנו כרובית בכן מעבדה ומדדנו את המרחק שבו יש להציב את המצלמה כך שהכרובית תהיה בגודלו של ריבוע המצלמה.

המרחק שהתקבל היה 1 מטר. חילקנו את הכרובית לחלקים שווים בערך. לעיתים יש צורך לקבץ כמה כרוביות קטנות לכרובית אחת בגודל ממוצע של כרובית אופיינית וזאת מהסיבה שהכרוביות הקטנות לא שוות בגודלן. קיבלנו 11 כרוביות קטנות (ראה תצלום 2). היות שהכרוביות הקטנות אינן שוות בגודלן, בחרנו גודל ממוצע של כרובית קטנה. מרחק המצלמה מכרובית ממוצעת קטנה הוא 41 ס"מ.

חישוב המימד

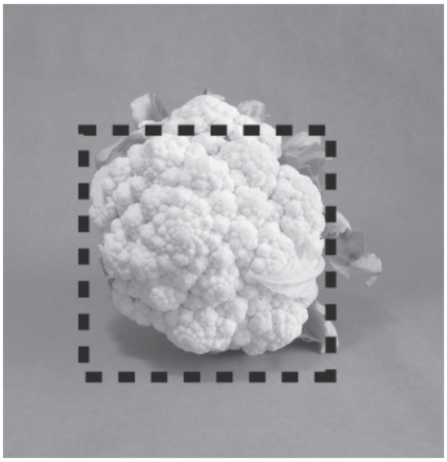
גורם ההכפלה שהתקבל הוא: $2.44 = \frac{1}{0.41} = M$, מספר החלקים 11 ולכן המימד d על פי הגדרתו המוכללת הוא:

$$d = (\log 11/\log 2.44) = 2.7.$$

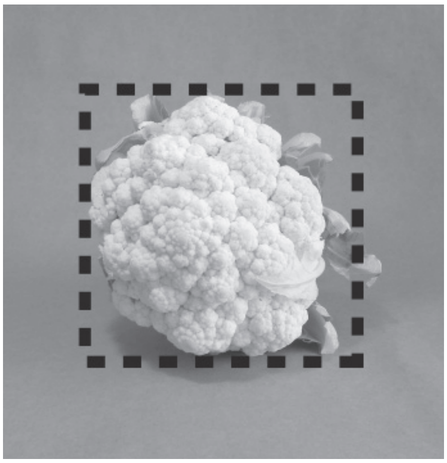
תוצאה זו סבירה כי כרובית אינה שטוחה אך גם אינה ממלאת את כל המרחב התלת-מימדי; המימד נמצא בטווח שבין 2-3.
המשכנו לחתוך את הכרובית לחלקים קטנים יותר ולחשב את המימד. התוצאות שתקבלו אינן מדויקות ונעות בין 2.4 ל-2.9. חשוב לציין שיש רגישות גדולה למדידת המרחק בגלל ההעלאה בחזקה.

סיכום:

במאמר תיארנו פעילות חביבה, הממחישה את המושגים הקשורים בפרקטלים: דמיון עצמי וחישוב מימד פרקטלי. מביצוע הפרויקט הסקנו שהמדידות רגישות ביותר למדידת המרחק מהמצלמה, וכל אי-דיוק גורם לשינוי משמעותי בתוצאות. נוסף על כך צורת הכרובית אינה כדורית ולכן שיטת המדידה שתיארנו מוגבלת בדיוקה. ניסינו להתגבר על מגבלה זאת באופן הבא: בצילומים רואים כרובית מאורכת. לשם קביעת מרחק המצלמה מהכרובית מדדנו **שני מרחקים**. בתמונה העליונה מרחק המצלמה נמדד כאשר הריבוע במסך המצלמה מותאם לרוחב הכרובית ואילו בתצלום התחתון המרחק נמדד כאשר הריבוע מותאם לגובהה. בקביעת המרחק לקחנו בחשבון את המרחק הממוצע.



תצלום 5: הריבוע במסך המצלמה מותאם לרוחב הכרובית



תצלום 5א: הריבוע במסך המצלמה מותאם לאורך הכרובית

מראי מקום ולקריאה נוספת

1. קלריסה גלמן ברקוביץ, כאוס, מכון ויצמן למדע, 2004.
http://stwww.weizmann.ac.il/g-phys/chaos/

2. ג'יימס גליק כאוס מדע חדש נוצר בהוצאת מעריב 1991.

3. Mandelbrot B., The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman & Co., New York, N.Y., (1982)

4. ביוגרפיה של האוסדורף ניתן למצוא באתר:
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Hausdorff.html

תהודה