

תנועת חלקיק טעון בהשפעת כוח לורנץ – א. פתרון ממוחשב

טאה קרקובר, המרכז ללימודים קדם אקדמיים, האוניברסיטה העברית, ירושלים
והחלקה להוראת המדעים, מכון וייצמן למדע

תקציר

תנועת חלקיקים בצרוף של שדות חשמליים ומגנטיים אחידים ניתנת לפתרון מלא ללא מחשב. עם זה יש יתרונות מתודיים ודידקטיים לפתרון הממוחשב. הפתרון הממוחשב מביא לסדרת התנסויות מעוררות מחשבה. סדרה זו כוללת התנסויות מטיפוסים שונים - התלמיד פועל כלומד, חוקר, מפענח ומיישם. זוהי דוגמה לעוצמה הדידקטית הטמונה במחשב - פתרון נומרי, הדמייה, תצוגות גרפיות ועיבוד נתונים. נדון גם בתנועה מטענים בתווך.

מילות מפתח:

שדה חשמלי ומגנטי, החוק השני של ניוטון, פתרון נומרי, הוראה לא פרונטלית, כוח לורנץ

אפשר לקבל תצוגות גרפיות שונות, כולל הדמייה של התנהגות המערכת. כך אפשר לחקור מסלולים לא מעגליים בשדה כבידה, תנועה בתווך צמיג ועוד.

אולם מתברר כי הדמיה עשויה להועיל גם כאשר יש באפשרותנו לרשום פתרון אנליטי מלא. דוגמה כזאת תוצג כאן, כאשר נחקור את המסלולים של חלקיק טעון בהשפעת צרוף של שדה חשמלי אחיד ושדה מגנטי אחיד. אף שנראה בהמשך כי אפשר לקבל את כל התוצאות ללא שימוש במחשב, מתברר כי עדיף להכיר את המערכת דרך ההדמיה תחילה, בשל הערך המוסף הרב שהיא נושאת עימה.

וריאציות שונות של דיון במערכת זו נוסו אצל תלמידים ומורים. גרסה כתובה של סדרת פעילויות שעוסקות בתנועת חלקיק טעון בשדות אחידים נכתבה בתש"ן עבור האגודה לקידום החינוך¹. הגרסה הכתובה לוותה בקבצי מחשב של סביבת העבודה STEP². חקירה ממוחשבת מן הסוג הזה (ובאותה סביבת עבודה ממוחשבת) היא חלק מתוכנית הלימודים במכינה הקדם אקדמית של האוניברסיטה העברית בירושלים בשנים האחרונות. גרסה אחרת (בסביבת העבודה "תכנת חקר") נוסתה בבית הספר התיכון למדעים ולאומנויות בירושלים. וריאציות של גרסה זו נוסו במספר השתלמויות מורים.

נקודת המוצא

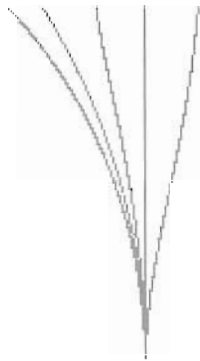
כנקודת מוצא לחקירה נתחיל מן המסלולים המוכרים מתוכנית הלימודים. התלמיד מכיר שלושה סוגי מסלולים. כאשר יש שדה חשמלי אחיד בלבד המסלול הוא פרבולי (או ישר). כאשר יש שדה מגנטי אחיד בלבד שניצב למהירות מתקבל מסלול מעגלי. במקרה המיוחד שבו יש שני שדות

ב-1895 רשם לורנץ את נוסחת הכוח הפועל על חלקיק טעון - $F=q(E+v \times B)$. זה נעשה במסגרת "תורת האלקטרון" של לורנץ, שהיתה תורה כוללת של אלקטרומגנטיות שהסבירה את מכלול התופעות האלקטרומגנטיות והאופטיות. כוח לורנץ נלמד במסגרת תוכנית הלימודים בחטיבה העליונה, ומוצגים מספר שימושים ויישומים שלו. במאמר זה נסקור את התנועה בשדות חשמליים ומגנטיים **אחידים** מכמה הבטים. לצורך השלמת התמונה רצוי לעיין גם במאמר "תנועת חלקיקים בהשפעת כוח לורנץ - שימושים ויישומים" ו"תורת האלקטרון של לורנץ" בגיליון זה. מאמרים אלה מציגים הבטים ישומיים והיסטוריים.

על מעמד ההדמיה

לעיתים נשמעת הסתייגות משימוש בהדמייה בטענה שהיא אינה "הדבר האמיתי". לאחר שבגליונות האחרונים של "תהודה" הוצגו דוגמאות לשימוש במעבדה ממוחשבת, הגיע הזמן להציג גם את עוצמתה של ההדמייה. יש מקרים שבהם אין חלופה להדמייה. לדוגמה - חקירה של תנועת כוכבים בזמן אמיתי נמשכת זמן רב, ומצריכה אמצעים מיוחדים. במקרה כזה ההדמייה היא אמצעי המחשה יעיל. דוגמאות אחרות - ניסוי רתרפורד, הציקלוטרון וכיו"ב. בכל המקרים האלה הניסוי עצמו אינו יכול להעשות בבית הספר, אבל קל לעשות הדמייה, ואפשר ללמוד ממנה הרבה.

אולם עיקר עוצמתה של ההדמייה אינה בהיותה תחליף ניסוי, אלא בהיותה מרכיב מאיר עיניים בחקירה עיונית. במקרה כזה ההדמייה מתקבלת כחלק מתהליך הפתרון הנובע מן המודל העיוני. כאשר יש לנו קושי בפתרון אנליטי, אנו מנצלים את המחשב לפתרון נומרי. מתוך הפתרון הזה



תרשים 2: מסלולי חלקיקים בשדות (חשמלי ומגנטי) אחידים ניצבים. ההטייה הגדולה ביותר אינה מתקבלת כאשר הכוח המטה הוא הגדול ביותר (הקו השני משמאל).

סימטריים. יש הבדל בין שמאל לימין. כאשר אנו מכפילים את שיעור הקטנת המהירות (ואת הכוח השקול) המסלול משתנה באופן משמעותי. כאשר מכפילים את שיעור הגדלת המהירות שמאלה אין כמעט הבדל במסלול. כיצד יתכן שהכפלת הכוח השקול אינה משנה כמעט את המסלול? כדי להחריף את השאלה נתבונן בתרשים 2, שבו יש סדרה נוספת של מסלולים. המסלולים כאן מתאימים למהירויות ההתחלתיות $0.5\tilde{v}$, \tilde{v} , $1.2\tilde{v}$, $2\tilde{v}$ ו- $3.5\tilde{v}$. הפעם מתברר כי המסלול השמאלי ביותר אינו מתאים לכוח המטה החזק ביותר! ההטייה הגדולה ביותר מתקבלת עבור $2\tilde{v}$. האם יתכן שכוח שקול גדול יותר מביא להטייה קטנה יותר? התשובה לכך נעוצה בעקרונות הדינמיקה הבסיסיים ביותר. על פי ניוטון מסלול של גוף מעוצב על ידי שני גורמים – מהירותו הנוכחית והכוח שפועל עליו. כדי לקבוע את המשך דרכו של הגוף אין די בהכרת הכוח. יש להכיר גם את המהירות ההתחלתית. המסלולים השונים אינם נבדלים בכוח בלבד. לו היו המסלולים נבדלים בכוח בלבד (אך לכולם היתה מהירות התחלתית משותפת), אזי **יותר כוח** היה מתבטא **ביותר הטייה**. לו היו המסלולים נבדלים במהירות ההתחלתית בלבד (אך לא בכוח), אזי **יותר מהירות** היתה מתבטאת **בפחות הטייה**. במקרה שלנו שני הגדלים משתנים כאחד, וקשה לומר מראש מי מהם ישפיע יותר על ההטייה. הבנת העניין היא מבחן אמיתי להבנת החוק השני של ניוטון. תלמידים מעלים כאן את השאלה הבאה: אכן אנו רואים כי בתחילת המסלול יתכן שכוח גדול אינו מצליח להטות חזק, בגלל שכתוצאה מן המהירות הגדולה הגוף חולף במהירות על פני צג המחשב ויוצא ממנו לפני שהכוח הספיק להטותו; אך האם יתברר שבהמשך התנועה הגופים המהירים יותר מוטים, בסופו של דבר, שמאלה יותר? כדי לענות על כך יש לחקור את המשך המסלול.

(חשמלי ומגנטי) ניצבים, אך הכוחות שהם מפעילים על הגוף מקזזים זה את זה, מתקבל קו ישר. זה קורה כאשר מהירות הגוף הטעון ניצבת הן לשדה החשמלי והן לשדה המגנטי וגודלה (\tilde{v}) שווה ליחס בין עוצמות השדות.

$$\tilde{v} = \frac{E}{B}$$

מה קורה כאשר מהירות החלקיק שונה מ- \tilde{v} ? במקרה כזה הכוחות לא יתאזנו והגוף לא ינוע בקו ישר. כאשר המטען חיובי - אם המהירות קטנה מ- \tilde{v} , הכוח המגנטי חלש יותר והחלקיק נוטה מן המסלול הישר בכיוון השדה החשמלי. אם המהירות גדולה מ- \tilde{v} החלקיק נוטה מן המסלול הישר בכיוון הכוח המגנטי.

אפשר להשתמש בכך כדי לבנות "בורר מהירויות". כאשר אנו מעוניינים לברור מתוך אלומת חלקיקים רק את אלה שיש להם מהירות מסויימת, אנו מעבירים את החלקיקים דרך צרוף שדות מתאים, כך שרק אלה שמהירותם מתאימה ינועו בקו ישר. אם מעמידים סדק בדרכה של האלומה עוברים רק אלה שאינם מוטים. רוחב הסדק ומיקומו יקבעו עד כמה מהירות החלקיקים שעוברים תהיה מוגדרת היטב. כיצד נראים המסלולים העקומים? כאן נסתייע בהדמיה.

מסלולים והפתעות ביצים

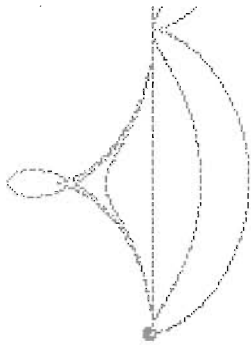
בתרשים 1 מתוארים מספר מסלולים. המסלול הישר מתאים למהירות \tilde{v} . המסלול הימני מתאים למהירות $\tilde{v}/3$. המסלול השני מימין מתאים למהירות $2\tilde{v}/3$. המסלול השני משמאל מתאים למהירות $4\tilde{v}/3$. המסלול השמאלי מתאים למהירות למהירות $5\tilde{v}/3$. E פונה ימינה; B ניצב לדף.



תרשים 1: מסלולים של חלקיקים בשדות (חשמלי ומגנטי) אחידים ניצבים

המסלולים מורים על סדירות מסויימת – ככל שמהירות החלקיק גדולה יותר הוא מוסט יותר שמאלה. ככל שמהירות החלקיק קטנה יותר הוא מוסט יותר ימינה. זה מוסבר בכך שהכוח המגנטי מתכונתי למהירות. תוספת מהירות מגדילה את הכוח המגנטי וגורמת לסטייה גדולה יותר, ולהיפך. עם זאת יש משהו מפתיע בתרשים 1. למרות שהמהירויות נבחרו כך שהן סוטות באופן סימטרי מ- \tilde{v} , המסלולים אינם

חדש של תנועה. המערך שנועד להיות "בורר מהירויות" מתנהג כמערך **ממקד**. לו הסדק של הבורר היה מונח בנקודה זו כל החלקיקים היו עוברים דרכו. (ב) כעבור מחצית הדרך כל המסלולים נמצאים בסטייה מרבית - ימינה או שמאלה. (ג) כאשר המהירות ההתחלתית היא $2.5\bar{v}$ הסטייה ההתחלתית קטנה יותר מאשר במקרה שבו המהירות ההתחלתית היא $2\bar{v}$, אך בהמשך הזמן מתברר כי ככל שהמהירות ההתחלתית גדולה יותר - הסטייה הרוחבית **המרבית** גדולה יותר.



תרשים 4: סדרת מסלולים של חלקיקים טעונים עם מהירויות התחלתיות שונות בשדה חשמלי אחיד ובשדה מגנטי אחיד. כל המסלולים נפגשים בנקודה משותפת ומתחילים מחזור חדש.

לתמונה המתקבלת יש יופי ומידה של שכלול, והיא מעוררת עניין רב אצל תלמידים ומורים. תהליך הגילוי נעשה תוך הדמייה דינמית כאשר העניינים נחשפים באופן רציף. התרשימים הסטטיים המוצגים כאן אינם מציגים את מלוא החוויה, אך זה מה שאפשר להעביר למדיום סטטי. הקוראים מוזמנים לחקור בעצמם באופן ממוחשב.

כיוון הכוח

מהו הכוח השקול שגורם לתנועה משוכללת כזאת? כוח זה הוא סכום וקטורי של כוח חשמלי קבוע ושל כוח מגנטי משתנה (בגודל ובכיוון). קשה לתאר מראש כיצד ישתנה סכום של שני וקטורים כאלה. נטיל את משימת החישוב הנומרי על המחשב. עד כה השתמשנו בהתבוננות במסלול בלבד. תצוגות גרפיות נוספות עשויות לחשוף יותר מזה. נציג את הכוח באופן וקטורי. וקטור הכוח (או וקטור התאוצה המתכונתי לו) מוצג באופן וקטורי לעיני התלמיד כך שהוא רואה כיצד הוקטור משתנה ברציפות אל מול עיניו. אי אפשר להציג זאת על גבי הנייר, אך אפשר לדווח כי התלמיד רואה את וקטור הכוח משנה כיוון תוך שהוא סובב את הגוף בקצב קבוע, ותוך שהוא שומר על גודלו. כלומר: מדובר בתנועה משוכללת למדי שבה התאוצה שומרת על גודלה ומשנה את כיוונה בקצב קבוע.

שאלה נוספת עולה מתוך צורת המסלול - יש בה משהו מפתיע. המסלולים אינם קמורים לכל אורכם, כפי שאנו נוטים לעיתים לצייר, אלא נראים מורכבים יותר. יש מסלולים שעוברים מצורה קמורה לצורה קעורה וחוזר חלילה. כיצד להסביר זאת? מה קורה בהמשך המסלול? מצויידיים במוטיווציה להכרת המשך המסלול נמשיך בחקירה.

הסטייה נסוגה אחור

בתרשים 3 מתואר מסלולו של החלקיק למשך זמן רב יותר. לצד המסלול הישר של החלקיק שמהירותו \bar{v} , יש מסלול נוסף שמהירותו ההתחלתית היא $1.4\bar{v}$. מתברר כי המעבר למסלול קעור הוא רק תחילת התהליך. בהמשך קורים דברים מפתיעים מאוד - החלקיק מתחיל לחזור ימינה. בסופו של דבר הוא חוזר את כל הסטייה שלו שמאלה - עד לקו הישר, ומתחיל מחזור חדש של סטייה. כיצד אפשר להסביר את הדבר? מדוע כוח שקול שפונה שמאלה מביא את הגוף לחזור בהמשך ימינה? התלמידים מתבקשים לפתור את החידה.



תרשים 3: המסלול הימני הוא מסלולו של חלקיק שמתחיל לסטות שמאלה, אך בסופו של דבר חוזר אחור ימינה ומתחיל מחזור חדש.

מקור אי ההבנה כאן הוא בכך שאנו נוטים לשכוח את העובדה שהכוח משתנה במהלך התנועה. העובדה שאנו נוטים לצייר, באופן סכמטי, מסלולים קמורים, נובעת מכך שאיננו לוקחים בחשבון את השתנות הכוח. ההרגל לעבוד עם כוחות קבועים מכשיל כאן. חשוב לעמת את התלמידים עם אפשרות כזאת. כאשר הגוף סוטה ימינה הוא מואץ בגלל השדה החשמלי. כאשר המהירות גדלה, גם הכוח המגנטי גדל (וכיוונו משתנה). במהלך הזמן משתנה כיוון הכוח השקול עד כדי כך שיש בכוחו להפוך את כיוון תנועת הגוף.

צורת המסלול

צורתו המשוכללת של המסלול האחרון מביאה אותנו לחקור את הצורה הכללית של המסלול. בתרשים 4 מוצגת הדמיה של סדרת מסלולים. המהירויות ההתחלתיות הן 0 , $0.5\bar{v}$, \bar{v} , $1.5\bar{v}$, $2\bar{v}$ ו- $2.5\bar{v}$.

מן המסלולים שהתקבלו עולות המסקנות הבאות:

(א) כל המסלולים נפגשים בנקודה אחת ומתחילים מחזור

מחזור אינה תלויה במהירות ההתחלתית והיא שווה תמיד
 $\tilde{v} = E/B$

חקירה כמותית

חקירה נומרית היא חקירה כמותית מטבעה. בכל פעם אנו מתייחסים לתנאי התחלה מסויימים ולפרמטרים מוגדרים מספרית. כתוצאה מכך אי אפשר להסיק מתוך הרצה אחת על התנהגות כוללת. לכאורה יש עדיפות לפתרונות כוללניים בפרמטרים, כיוון שאנו פותרים בעת ובעונה אחת אינסוף משוואות עבור כל תנאי ההתחלה והפרמטרים האחרים האפשריים. זה מאפשר לנו לקבל תמונה כוללת על השפעתם של הפרמטרים השונים. אף על פי כן, ראינו זה עתה כי פתרון נומרי מאפשר לנו לקבל תמונה כוללת של התנהגות המערכת, מפני שמגוון של תצוגות גרפיות מאפשר לנו תובנה מעמיקה. ובכל זאת, אלו חקירות כמותיות אפשר לעשות כאן? נציג עתה מספר חקירות כאלה. אפשר לעשות חלק מהן בגליון אלקטרוני.

ראינו כי תנועת הגוף היא תנועה מעגלית קצובה סביב מרכז שנע במהירות קבועה. צורת המסלול המתקבל מכונה טרוכואידה. בתרשים 4 מוצגות טרוכואידות שונות. הטרוכואידה שבה יש נקודות חוד מכונה ציקלואידה. התלמיד יגלה כי תמיד מתקבלת ציקלואידה כאשר החלקיק נכנס בניצב לשני השדות במהירות $v = 2\tilde{v}$.

התלמיד יכול לגלות מתוך סדרת הרצות כי התנועה אינה תלויה במטען q ובמסה m לעצמם, אלא ב- q/m . התלמיד יגלה כי תדירות התנועה היא $\omega = (q/m) \cdot B$, ואינה תלויה כלל בתנאי התחלה. תדירות זו גם אינה תלויה בשדה החשמלי, והיא תדירות התנועה המעגלית כאשר יש שדה מגנטי בלבד.

מתוך זה ימצא התלמיד כי במהלך מחזור אחד מתקדם מרכז המעגל בשיעור

$$y = \tilde{v}t = \tilde{v} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\tilde{v}}{(q/m) \cdot B} = \frac{2\pi E}{(q/m) \cdot B^2}$$

כלומר: פסיעת הטרוכואידה מתכונתית לשדה החשמלי, ומתכונתית הפוכה ל- q/m ולריבוע השדה המגנטי. מסקנה מכאן היא כי מתוך גודל הפסיעה אפשר לזהות את q/m . אפשר לגלות כי הסטייה הרוחבית המרבית, ימינה או שמאלה מן הישר (תרשים 4), מתכונתית לסטייה של מהירות הכניסה מן הערך של \tilde{v} :

$$\Delta x = 2 \cdot \frac{v - \tilde{v}}{(q/m) \cdot B}$$

צורת המסלול

נסכם את מה שנמצא עד כה מתוך החקירה באשר לצורת המסלול:

- (א) כל החלקיקים נעים בקצב קבוע על פני מעגלים שמרכזם נע במהירות קבועה.
- (ב) מהירות הסחיפה של המרכז היא $\tilde{v} = E/B$, עבור כל המסלולים, ואינה תלויה במהירות ההתחלתית (גם לא בכיוונה).
- (ג) מהירות הסחיפה אינה תלויה בגודל המטען או בסימנו אלא בגודל השדות בלבד.
- (ד) כיוון הסחיפה ניצב לשני השדות.
- (ה) בכיוון ניצב לכיוון הסחיפה יש תנועה מחזורית. ההתקדמות בכיוון הסחיפה בכל מחזור שווה, ואינה תלויה במהירות ההתחלתית. גם גודל הפסיעה אינו תלוי במהירות הסחיפה.
- (ו) כאשר חלקיק נכנס בניצב לשני השדות במהירות גדולה מ- \tilde{v} תתקבל סטייה התחלתית לכיוון הכוח המגנטי (שמאלה בתרשימים). הסטייה ההתחלתית המרבית תתקבל עבור מהירות $v = 2\tilde{v}$.
- (ז) גודל השדה החשמלי אינו משפיע על זמן המחזור, אך משפיע על אורך הפסיעה (יחס ישר).
- (ח) השדה המגנטי משפיע על זמן המחזור (יחס הפוך) ועל אורך הפסיעה (יחס ריבועי הפוך).

תנועת אלקטרונים בשפופרת

האם המסלולים הנאים שמתקבלים במחשב מתגשמים גם במציאות? את זה אפשר לבדוק בשפופרת לקציבת e/m (דוגמת זו שמיצרת על ידי Teltron שבה אפשר להפעיל שדה חשמלי נוסף על השדה המגנטי), ואכן מתקבלים מסלולים כמו בהדמיה – ישר, פרבולה וטרוכואידה. את התאוריה שנחקרה נומרית, אפשר ליישם על מסלולים אלה.

חקירת מסלולים

תא הערפל ותא הבועות הם התקנים שבאמצעותם אפשר לתעד את מסלולי התנועה של חלקיקים טעונים בודדים. את העקבות שמותירים החלקיקים בעקבותיהם מצלמים (או ממפים בדרך כלשהי), ואפשר לנתחם מאוחר יותר. מתוך ניתוח המסלול אפשר ללמוד על החלקיק. אפשר לנתח את המסלול ברמות תחכום שונות. ברמה הבסיסית מסתפקים בסרגל ובמד זווית. ברמה מורכבת יותר עושים דיגיטציה של המסלול. מתוך מערך המספרים שמתקבל מנתחים את המסלול. מסלולי החלקיקים מעוצבים על ידי השדות המגנטיים.

יש להעדיף את התאוריה תחילה או להתחיל עם המחשב. במקרה זה דומני שהתשובה ברורה: התאוריה האלגנטית והמהירה עלולה לחמוק מן התלמיד מבלי שהוא יצליח להעריך אותה כראוי (אלא אם כן היא מגיעה לאחר הדיון הממוחשב הממושך). לעומת זה מגוון החוויות שהתלמיד עובר במהלך הפעילות הממוחשבת חשוב מכדי שנרצה לוותר אפילו על חלק ממנו. במסלול ההתנסות התלמיד עובר שלבים שונים ובצידם הפתעות. הוא נדרש להסביר תוצאות מפתיעות, לשער השערות ולבודקן. הוא נדרש להעמיק בחוקי התנועה היסודיים של ניוטון, ולחשוב, פעם אחת ברצינות, במתרחש כאשר הכוח אינו קבוע. הוא נתקל בפיסיקה יפה ואסטטית, ופועל כמגלה, מכליל, חוקר, מודד ומנתח. הוא עובר חוויות של הפיסיקאי העיוני, לצד אלה של הפיסיקאי המנתח תוצאות ניסוי. לעיתים הוא מפעיל את המחשב כאילו היה פיסיקאי שעסוק בחקירה עיונית נומרית; לעיתים הוא פועל כחוקר שמתכנן את הניסוי הבא ומסיק מסקנות מתוצאותיו. איננו רוצים לוותר על כל אלה. יש וכוחן של הדמייה ושל הצגה גרפית, לצד פתרון נומרי, רב מאוד.

הייחוד של כוח לורנץ

אופי התנועה פשוט - תנועה מעגלית קצובה סביב מרכז שני במהירות קבועה. זה מזמין צורת הסתכלות נוחה: לכאורה, כדאי לעבור למערכת צירים שנעה במהירות $\vec{v} = E/B$. מנקודת ראות של מערכת זו צריכה להתקבל תנועה מעגלית קצובה. זוהי מערכת "כשרה" כיוון שהיא אינרציאלית. עבור המחשב זוהי משימה טבעית.

אולם מתברר כי הדברים אינם פשוטים כלל ועיקר. נתבונן בגוף שניע בקו ישר במהירות \vec{v} , כך ששני הכוחות מקוזזים זה את זה. מנקודת הראות של המערכת הנעה גוף זה אמור להימצא במנוחה. מצד שני במערכת זו אין כוח מגנטי (כיוון שאין מהירות), והכוח החשמלי אינו מקווזז, ולכן הגוף לא ימצא במנוחה. זוהי סתירה.

מקור הבעיה הוא באופי המיוחד של כוח לורנץ - היותו תלוי במהירות. אמנם גם כוח הריסון של התווך תלוי במהירות, אך שם מדובר בתנועה ביחס לתווך, ותנועה יחסית אינה משתנה עם החלפת מערכת הייחוס. לא כן כוח לורנץ. מתחילת המאה איננו מאמינים שמדובר כאן בתווך (אתר). תאוריה עקיבה של שדה מגנטי אינה אפשרית במסגרת המכניקה הניוטונית. כדי להתגבר על הבעיות שמעורר השדה האלקטרומגנטי בכך שאיננו נענה לחוקים הבסיסיים של הדינמיקה הניוטונית, כתב איינשטיין את המאמר "על האלקטרודינמיקה של גופים נעים" שבו הציג את תורת

באמצעות הפתרון הנומרי וההדמייה מתאפשר לתלמיד לחקור ברמות התחכום השונות. התלמיד יכול להשתמש בסרגל ובמד זווית ולקצוב את q/m . לצורך התרגול אפשר לדרוש ממנו לעשות זאת לא רק בנוכחות שדה מגנטי, אלא גם כאשר המסלול מעוצב על ידי שדה חשמלי (כמו בשפופרת). כאשר יש שדה חשמלי בלבד התלמיד יחשב זאת מתוך בדל הפרבולה שנותר על המסך. כאשר יש שדה מגנטי בלבד התלמיד ישתמש בקשת של מעגל, וממנה יקצוב את q/m . בשני המקרים האלה יתברר כי אין מספיק נתונים וכי יש צורך בידיעת המהירות ההתחלתית. באופן מעשי הדבר מחייב אותנו להעביר את החלקיקים תחילה דרך בורר מהירות (הדבר מוכר לתלמיד מספקטרוגרף המסות).

אם המסלול מעוצב על ידי צרוף של שדה מגנטי ושדה חשמלי אפשר לחסוך את בורר המהירות. ראינו כי גודל הפגיעה מתכונתי הפוך ל- q/m , ואינו תלוי כלל במהירות ההתחלתית. מתוך גודל הפגיעה אפשר לקצוב את q/m . את זה אפשר לבצע באמצעות סרגל בלבד. אנו מאפשרים לתלמיד לחוות את חוויית הניתוח והגילוי.

אפשר לדמות גם את עבודת החוקר שמנתח באמצעות התוצאות שעברו סריקה ודיגיטציה, כאשר אנו משתמשים בתוצאות שנאגרו בגליון הצמוד להדמיה.

תאוריה

סדירות המסלולים מעידה על חוקיות פשוטה, ולכן מתקבל על הדעת שיש גם תאוריה פשוטה מאחריה². נזכור כי המהירות הממוצעת היא $\vec{v} = E/B$, וכי כיוונה ניצב לשני השדות כך שהשלשה $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{v})$ היא שלשה ימנית. הכוח השקול שפועל על הגוף הוא

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E})$$

אך, בהתחשב בקשרים בין שלושת הווקטורים, אפשר לרושמו גם כך:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} - \vec{v}) \times \mathbf{B}$$

זה הכוח שהיה פועל לו מהירות הגוף היתה $\mathbf{v} - \vec{v}$, ולא היה שדה חשמלי כלל. במקרה כזה מתקבל וקטור כוח שמסתובב בקצב קבוע תוך שמירה על מהירותו. ראינו כבר כי מכאן אפשר להסיק שמדובר בטרוכואידות.

התאוריה הבסיסית פשוטה ואלגנטית, ובכל זאת אין מבחינים בה בדרך כלל, ולולא המחשב ספק אם היו רוב המשתמשים מגיעים אליה. זהו מקרה שבו המחשב הוא זה שנותן לנו את "קריאת הכיוון", ולאחר מכן ניגשים אל התאוריה. כך קורה כיום במקרים רבים במחקר המדעי. עתה, משאנו רואים את כל התמונה, אפשר לשקול שוב אם

נניח כי אפשר להציג את הכוח המרסן באופן אפקטיבי על ידי הקשר $f = -bv$, כאשר b תלוי בחלקיק הטעון ובתווך.

תנועה בתווך בהשפעת שדה חשמלי

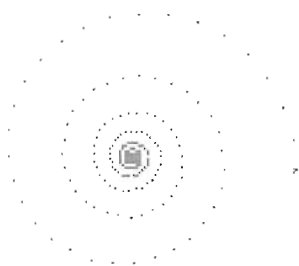
במקרה זה סכום הכוחות הוא $\Sigma F = qE - bv$. המהירות שואפת לערך גבולי שמתקבל כאשר סכום הכוחות הוא

$$v_{\text{final}} = \frac{q}{b} E$$

המהירות הגבולית אינה תלויה ב- q/m , כפי שהיה בתנועה בריק, אלא ב- q/b . מעקב אחרי תנועה בתווך מאפשר לקצוב את המטען. זהו העיקרון של ניסוי מיליקן.

תנועה בתווך בהשפעת שדה מגנטי

בתרשים 8 מוצגת תמונת הדמיה של מסלול בשדה מגנטי עם ריסון. שני הכוחות, המגנטי והמרסן, מתכונתיים



תרשים 8: מסלול של חלקיק בשדה מגנטי בתווך מרסן. המרחק בין הנקודות מתכונתי למהירות. החלקיק מאבד מהירות, תוך שהוא נע בתנועה ספירלית.

למהירות, וניצבים זה לזה. הכוח המרסן מקטין את המהירות, ולכן גם את הרדיוס, ומתקבל מסלול ספירלי.

תנועה בתווך בהשפעת שני השדות

מה מתקבל כאשר החלקיק נע בתווך בהשפעת שני השדות? במקרה כזה יש שני כוחות מתכונתיים למהירות שניצבים זה לזה (הכוח המגנטי ניצב למהירות וכוח הריסון ניצב לו ומכוון כנגד המהירות). גודלו של סכום שני כוחות אלה הוא $\sqrt{(qB)^2 + b^2} v$. במקרה שיש איזון כוחות מאזן כוח משולב זה את הכוח החשמלי qE .

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + (b/qB)^2}} \tilde{v} \quad \text{או} \quad v = \frac{qE}{\sqrt{(qB)^2 + b^2}}$$

כאשר, כזכור, $\tilde{v} = E/B$, כדי למצוא את כיוון המהירות נתבונן בתרשים 9. כאשר המהירות קבועה סכום הכוחות מתאפס. נתבונן ברכיב הסכום על הקו המקוטע

היחסות. למרות שהתאוריה העקיבה אמורה להיות יחסותית, כוח לורנץ הוא אחת הדוגמאות היותר מוצלחות לשימוש בחוק השני של ניוטון (כל זמן שהמהירויות קטנות מאוד ממהירות האור), ולא היינו רוצים לוותר עליו במסגרת עולם המחשבה הניוטוני.

עקמומיות המסלול

ראינו כי אם החלקיק הטעון נכנס בניצב לשני השדות העקמומיות המרבית בנקודת המוצא מתקבלת כאשר $v = 2\tilde{v}$. במקרה כזה המסלול הוא ציקלואידה, שמאופיינת על ידי נקודת החוד שיש במהלך המסלול. כיצד אפשר להגיע למסקנה זו ללא חישוב נומרי? נרשום את משוואת התנועה $\Sigma F = ma$, עבור נקודה שבה כיוון התנועה ניצב לשני השדות.

$$qvB - qE = m \frac{v^2}{r}$$

כאשר כיוון השדה החשמלי נבחר ככיוון שלילי של ציר x ,

וכיוון \tilde{v} נבחר ככיוון חיובי של ציר y .

$$r = \frac{mv^2}{qvB - qE} \quad \text{נבודד מכאן את רדיוס העקמומיות:}$$

נבחן תחילה מקרה פשוט: כאשר המכנה מתאפס הרדיוס הוא אינסופי - ומתקבל קו ישר. המקרה המעניין אותנו קשור לעקמומיות, העקמומיות הגדולה ביותר מתקבלת כאשר הרדיוס מזערי. כדי למצוא זאת אפשר לגזור את הביטוי לרדיוס לפי המהירות, ולמצוא כי זה קורה בשני מקרים: עבור מהירויות גדולות מ- \tilde{v} כאשר $v = 2\tilde{v}$ (הרדיוס הוא mv^2/qE); עבור מהירויות קטנות מ- \tilde{v} כאשר $v = 0$ (הרדיוס הוא אפס - זוהי הנקודה עם החוד). בשני המקרים המסלול שמתקבל הוא ציקלואידה.

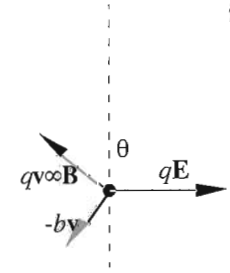
כאשר השדות והמהירות אינם ניצבים זה לזה

עד כאן עסקנו במקרים שבהם שלושת הווקטורים $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{v}})$ ניצבים זה לזה. במקרה שבו החלקיק הטעון יש גם רכיב מהירות מקביל לשדה המגנטי, יהיה גם רכיב תנועה בכיוון זה ותאוצתו תקבע על ידי רכיב השדה החשמלי באותו כיוון. עד כה ראינו כי יש בידינו פתרון מלא של התנועה בשדות אחידים עבור מהירות התחלתית כלשהי. כל זה בהנחה שהתנועה נעשית בריק. בהמשך נבחן מה קורה כאשר המטענים נעים בתווך חומרי.

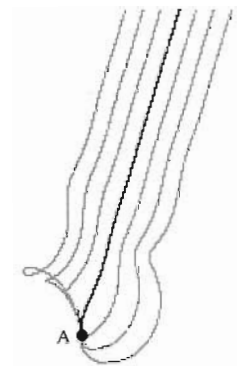
תנועה בתווך חומרי

כאשר חלקיק טעון עובר בחומר הוא מפסיד אנרגיה. אם ההפסד היחסי הוא משמעותי יש לקחת בחשבון את הכוח המרסן. גם את זה אפשר לחשב נומרית ולהציג בהדמיה.

$\tan\theta = \frac{b}{qB}$ (רכיב זה מתאפס, ולכן $qv \sin\theta - bv \cos\theta$)



תרשים 9: תרשים הכוחות על חלקיק טעון בתווך. הקו הדק מתאר את כיוון התנועה.



תרשים 10: סדרת מסלולים של חלקיקים טעונים שיוצאים מן נקודה A בכיוון ציר y. המסלול השחור הוא זה של הגוף שהיה נע בריק בכיוון y במהירות קבועה.

בתרשים 10 מוצגת סידרת מסלולים של חלקיקים טעונים שיוצאים מנקודה משותפת בכיוון ניצב לשני השדות, אך עם מהירויות מוצא שונות, שנבדלות בתוספות מהירות קבועות.

סיכום

עסקנו במאמר בכוח לורנץ, $F=q(E+v \times B)$, ובמסלולים הנוצרים בהשפעת שדות אחידים. כוח לורנץ עומד בצומת שבין מכניקה, חשמל ותורת היחסות. במאמר היתה התייחסות למסגרת שבה התלמיד רגיל לפגוש את כוח לורנץ - בתור ישום של החוק השני של ניוטון. השימוש במחשב לצורך פתרון, הדמיה והמחשה מקפיץ את רמת הדיון. הובאו כאן מספר הצעות בעלות אופי דידיקטי שונה, וברמות דיון שונות, במטרה להציג מגוון אפשרויות. זהו תחום שבו יופי ולימוד שלובים זה בזה, והוא מזמן עושר של חוויות לימודיות. הניסיון מכיתות בעלות אופי שונה הוא מעודד, ולא נותר אלא להמליץ.

מראי מקום

1. אונא, י. וקרקובר, ז., פיסיקה דפי עבודה למעבדת מחשב; תנועה בשדות אלקטרומגנטיים אחידים האוניברסיטה העברית ירושלים, תש"ן.
2. רונן, מ. ולנגלי, ד. סביבת ההדמיה STEP, 1990, כעזר הוראה בשעורי פיסיקה, תהודה 14(1) עמ' 24-30.
3. קרקובר, ז., כוחות, האוניברסיטה העברית ירושלים, תשמ"ז.