מבנה והתפתחות של כוכבים

מאת: עמוס הרפז, משמר העמק

מאמר זה הרא הראשון מתוך סדרת
מאמרים הדנים ביסודות האסטרונומיה

א. מ_ב_ו_א

מקצועות האסטרונומיה והאסטרופיסיקה עוסקים בעצמים הרחוקים מאתנו מרחק רב, מרחפים ב"רחבי השמים", ומעוררים ענין רב בציבור, מכיון שכל אדם שעיניו פקוחות ושואף להבין את הנעשה בטבע הסובב אותו, רוצה להבין גם את התופעות המרשימות המוצגות לעיניו בשמים. הממדים ה"אסטרונומיים", וכמויות המסה והאנרגיה העצומות שבהן מדובר, נותנות הרגשה של גודל ועוצמה, והשתיכות לתהליכים הראשונים של התהוות היקום, ושל מהלך התפתחות היקום בכללותו. כנראה שזו הסיבה לכך, שגם בהיסטוריה האנושית הקדומה, הנסיון להבין את העקרונות היסודיים של קיום והתפתחות היה קשור בנסיון ללמוד ולהבין את התנהגות גרמי השמים.

הבקורה החשובה ביותר לגבי המרעים האלה היא העובדה שהעצמים המהווים נושא למחקר פרט לאלה הנכללים במערכת השמש, נמצאים במרחקים כה גדולים מאתנו עד כדי כך שבתקופה הקרובה אין סיכוי שנוכל לצפות מקרוב בנושא המחקר, או שנוכל לתכנן ניסוי מעבדתי כדי לחזור על תופעות אסטרונומיות. המעבדה היחידה שלנו היא היקום כולו, התהליכים נחקרים in situ (בסביבתם הטבעית), ואמצעי החקירה היחיד העומד לרשותנו הוא קליטת הקרינה המגיעה מן העצמים האלה אלינו. אולם למרות המגבלות החמורות הללו, כמות האינפורמציה הנאספת היא רבה, והמדענים הגיעו כבר לחקר והבנה של תופעות רבות ומסובכות מאוד בתחום זה. האסטרופיסיקה הינה מדע עיוני הבא להסביר את העובדות שניצפו על ידי האסטרונומים. אוסף העובדות שהצטבר מהווה בסיס לפיתוח תיאוריות מדעיות, אולם אין אפשרות לתכנן ניסוי לבחינת התיאוריות. מבחנן היחידי הוא בשלמותן, והתאמתן המכסימלית לאוסף העובדות הקיים, הגדל והולך.

כפיצוי על חוסר האפשרות לתכנן ניסוי אסטרונומי, העמיד הטבע לרשותנו אוסף עצום של עצמים למחקר - אשר ביניהם ניתן למצוא כמעט את כל התופעות אשר עשויות להתרחש בהם, וכן את כל שלבי ההתפתחות. הקביעה כי בטבע מצויים עצמים שהם בכל שלבי ההתפתחות מתבססת על הנחות מוקדמות, ואלה הנחות יסוד בחקר הכוכבים.

הנחה אחת היא שהכוכבים נמצאים רוב הזמן במצב קרוב לשיווי משקל (שיווי משקל הידרוסטטי ותרמי). הבסיס להנחה זו ניתן על ידי כך שממצאים גיאולוגיים ופליאונתולוגיים מראים שהתנאים החיצוניים על פני כדור הארץ לא השתנו באופן יסודי במשך מיליארדי שנה - ומכאן מגיעים למסקנה שהשמש (ככוכב אופייני) נמצאה במצב עמיד במשך כל התקופה הזו. כמובן שהניתוח העיוני של התפתחות הכוכב חייב להוביל למסקנות המצדיקות הנחה זו.

הפירוש של הנחה זו הוא שתהליכי ההתפתחות בכוכב אשר הזמן האופייני שלהם הוא הזמן של תהליכים גרעיניים, הם ארוכים ביחס לזמנים האופייניים של תהליכים תרמיים ודינמיים.

הנחה שניה שמתבססים עליה היא שתהליך היווצרות כוכבים הוא תהליך מתמיד, ולכן בכל רגע ורגע קיימים כוכבים בכל שלבי ההתפתחות - למן היווצרותם ועד למותם, ותפקידנו להבחין בין הכוכבים השונים, ולדעת למיינם הן לפי סוגי הכוכבים (גודל, הרכב כימי), והן לפי השלבים השונים בהתפתחותם. הנחה זו יכלה להוביל אותנו גם להערכה על אורך השלבים השונים בחיי הכוכב. בתוך קבוצת כוכבים אחידה, אשר בה מסלול החיים של כל הפרטים זהה פחות או יותר, ככל ששלב מסוים ארוך יותר, נמצא יותר כוכבים המייצגים אותו באוכלוסיה הנצפית, ולכן השכיחות של כוכבים נצפים בכל שלב פרופורציונית לאורך השלב הזה בחיי כוכב בודד.

הבסיס להנחה זו הוא שאורך החיים של רוב סוגי הכוכבים קטן מגיל היקום. לכן ניתן לצפות שחלקיק חומר יספיק לעבור כמה מחזורי חיים בכוכבים מראשית התפתחות היקום.

כמובן שהנחות אלה הן כלליות, וקיימות תופעות החורגות מהן. בהמשך נביא דוגמאות של שלבי התפתחות מהירים שבהם שיווי המשקל התרמי וההידרוסטטי מופרים באופן קיצוני, וכן ניווכח שכוכבים הנוצרים בתקופות שונות של קיום היקום שונים בהרכבם - שינויים המשפיעים על קצב ותהליך התפתחותם. אולם ההנחות האלה מספיק טובות כדי להוות בסיס למחקר.

נתחיל בהגדרת המושג "כוכב". כוכב הוא גרם שמיימי הקורן אנרגיה חומנית שנוצרה בתוכו כתוצאה מתהליכי מיזוג גרעיניים, או עצם שנוצר מכוכב כזה (ננסים לבנים, כוכבי נייטרונים). לפי הגדרה זו עצמים שונים הנקראים כוכבים אינם כוכבים אמיתיים - כמו כוכבי לכת, כוכבים נופלים, כוכבי שביט (כוכבי קולנוע) ועוד. הכוכב האמיתי היחיד בסביבתנו הקרובה הוא השמש. הכוכב האמיתי הקרוב ביותר אל השמש נמצא במרחק ארבע שנות אור ממנה.

ננסה לצייר לעצמנו סכימה כוללנית על ההתפתחות. במרחקים העצומים של היקום, ובידיעה שהחומר המוכר לנו נייטרלי מבחינה חשמלית, הכוח ארוך הטווח אשר בא לידי ביטוי בתופעות אסטרונומיות הוא כוח הגרביטציה. כוח זה, הפועל בין חלקיקי החומר המפוזר ביקום גורם להם להתכווץ לגושי חומר יותר צפופים - גלקסיות, צבירי כוכבים וכוכבים. במקרה של כוכב בודד, עם ההתכווצות, החומר במרכז הכוכב מתחמם ומתלהט. הלחץ הנוצר כתוצאה מכך יוצר כוח נגדי לכוח הגרביטציה. אילו לא היה קיים מכאניזם המאפשר הוצאת אנרגיה מן הכוכב החוצה - תהליך זה היה מהווה משוב שלילי העוצר את ההתכווצות בנקודת שיווי המשקל של הכוחות. לפי חוקי הולכת החום והקרינה, האנרגיה זורמת מן האזורים החמים (הפנימיים), אל האזורים הקרים (החיצוניים), ומכאן היא קורנת החוצה למרחב. כתוצאה מאיבוד האנרגיה, נוצרת בכוכב נטיה להתקררות וירידת הלחץ, וההתכווצות נמשכת וגורמת להתחממות נוספת ולקרינה נוספת של אנרגיה. העובדה שבתהליך ההתכווצות אנרגיה גרביטציונית הופכת לאנרגיה חומנית המוקרנת בחלקה החוצה גורמת לכך שהתהליך יהיה

בלתי הפיך, וקובע "חץ זמן" בתהליכים החלים בהתפתחות הכוכב. באופן סכימטי אפשר לומר שהתהליך הוא התכווצות (קריסה), התחממות וקרינת אנרגיה. בתוך הסכימה הכוללנית הזו חלים כמובן עיכובים ושינויים הנובעים מהתערבות של כוחות אחרים, אשר לא נימנו עד כה, מכיוון שהם אינם משפיעים על המהלך הכללי, אולם ישנם מצבים שהשפעתם קריטית. לדוגמה - בעצמים כמו כוכבי הלכת, ההתכווצות נעצרה כאשר כוחות המבנה הבינאטומיים מסוגלים לספק את הכוח הנגדי לכוח הגרביטציה, ולכן התפתחותם של עצמים אלה ככוכבים נעצרה, מבלי שהטמפרטורה במרכזם תגיע לערכים גבוהים המספיקים ליצירת ריאקציות מיזוג גרעיניות.

בגופים מאסיביים יותר (שמסתם עולה על 0.1 של מסת שמש), הכוחות האלה אינם מספיקים כדי לעצור את כוח הגרביטציה וההתכווצות נמשכת הלאה, מלווה בעליית טמפרטורה. כאשר הטמפרטורה במרכז עולה עד כדי כך שמתחילים להתרחש תהליכים גרעיניים (עשרה מיליון מעלות בערך למיזוג מימן) נכנס למאזן מקור חדש של אנרגיה והוא עוצר את תהליך ההתכווצות עד שכל המימן בליבת הכוכב הופך להליום. שלב זה הוא שלב ממושך ביותר, ורוב הכוכבים המוכרים לנו נמצאים עתה בשלב מיזוג המימן. השלב הזה נקרא שלב הסדרה הראשית.

עם גמר מיזוג המימן בליבה נמשכת התכווצות הליבה והתחממותה - עד שהטמפרטורה מגיעה לערך המספיק למיזוג ההליום והפיכתו לפחמן וחמצן (בערך מאה מיליון מעלות). בשלב זה נעצרת שוב ההתכווצות עד שכל ההליום בליבה עבר תהליך מיזוג והפך לפחמן וחמצן. כך נמשך תהליך ההתכווצות והתחממות הליבה, כאשר ההתכווצות נעצרת בכל פעם שמתחיל להתמזג יסוד כבד יותר. בהמשך נחזור שוב לתהליך זה ונסביר אותו ביתר פירוט. לא כל הכוכבים עוברים את כל התהליכים שהוזכרו. תחילתו של כל שלב נוסף מותנית בהתפתחות טמפרטורה מספיק גבוהה לשיפעול השלב הזה. הטמפרטורה המכסימלית הנוצרת בליבת הכוכב תלויה במסתו, ולכן, ככל שהכוכבים קטנים יותר במסתם, הם נעצרים בשלב יותר מוקדם בסולם ההתפתחות שתואר לעיל. רק כוכבים מאסיביים מגיעים לתהליכים גרעיניים של יסודות כבדים.

ב. <u>המשוואות לחישוב מבנה הכוכב</u>

החקירה במבנה הכוכבים והתפתחותם בנויה על בסיס ההנחות הכלליות ביותר, והמשוואות הפשוטות ביותר.

שתי הנחות היסוד נזכרו כבר במבוא. בפרק הנוכחי נביא את ארבע המשוואות היסודיות לפיהן קובעים את מבנה הכוכב והתפתחותו.

השיקולים בפיתוח המשוואות יהיו בדרך כלל ניוטוניים, רק במצבים מיוחדים יש להתחשב גם בשיקולים יחסותיים.

בשלב התחלתי מטפלים בדרך כלל בכוכב בעל סימטריה כדורית, ולכן הקואורדינטה היחידה הרלוונטית היא המרחק ממרכז הכוכב, הרדיוס (r). בדרך זו, כמובן, אי אפשר לטפל באפקטים שאין בהם סימטריה כדורית כמו סיבוב, שדות מגנטיים ועוד.

ההנחה היא שברוב הכוכבים אפקטים אלה ניתנים להזנחה בקירוב ראשון, והטיפול בהם נעשה בדרך כלל כתיקונים על גבי המבנה בעל הסימטריה הכדורית. בקירוב זה אנו מסתכלים על הכוכב כמורכב מקליפות מסה קונצטריות שעובייין dr. נפח של קליפה כזו הוא:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

בהמשך נשתמש בשתי הצורות של הביטוי הזה, לפי נוחיות הכתיבה.

1. <u>משוואת התנועה</u>

משוואה זו היא החוק השני של ניוטון:

$$\rho\ddot{r} = -\frac{dp}{dr} - \frac{Gm(r)\rho}{r^2} \qquad (1)$$

המשוואה עוסקת בכוח ליחידת נפח. באגף שמאל רשומה התאוצה מוכפלת בצפיפות המסה, ואילו באגף ימין רשומים הכוחות הפועלים על יחידת נפח. האיבר הראשון הוא הכוח הנובע ממפל הלחץ (הפרש הלחצים משני צידי האלמנט dr), והאיבר השני הוא כוח הגרביטציה על יחידת הנפח. בגלל הסימטריה הכדורית מפל הלחץ הוא רדיאלי מלבד, ואילו הכוח הגרביטציוני בחלוקת מסה כדורית גם הוא כוח רדיאלי, ואין רכיבי כוח ניצבים לרדיוס. מפל הלחץ בכוכב הוא שלילי, ולכן הכוח הנובע ממנו פועל בכיוון הפוך לכוח הגרביטציה.

במצב של שיווי משקל הידרוסטטי אנו מניחים שאגף שמאל של משוואה (1) מתאפס ואז מקבלים את המשוואה:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \qquad (1\text{א'})$$

שהיא משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון ללחץ.

כפי שהזכרנו במבוא, ההנחה על שיווי משקל הידרוסטטי מתקיימת בקירוב ברוב המקרים שבהם שלבי ההתפתחות ארוכים מאוד. ישנם שלבים קריטיים קצרי טווח שבהם הנחה זו אינה נכונה לחלוטין, כמו למשל התפרצות נובה וסופר-נובה, קריסה מהירה ועוד. לשלבים אלה, למרות היותם קצרי מועד, יש חשיבות רבה בהתפתחות הכוכב. לשם חישוב שלבים כאלה יש לפתור את משוואת התנועה בשלמותה כפי שהיא מופיעה ב (1).

הלחץ כולל את לחץ האינטראקציות בין החלקיקים (לחץ תרמי, ניוון, ועוד) ואת לחץ הקרינה. הביטוי של לחץ הקרינה ניתן ע"י:

$$p_r = \frac{1}{3} aT^4 \qquad (2)$$

כאשר T היא הטמפרטורה.
a הוא קבוע צפיפות האנרגיה שערכו:

$$a = 7.56 \cdot 10^{-15} \left(\frac{erg}{K^4 \cdot cm^3}\right)$$

בטוי (2) ללחץ הקרינה קיים כאשר מתקיים שיווי משקל תרמודינמי במערכת.
למטרות דיוננו חשוב לזכור שהכוח שמפעיל הלחץ איננו תלוי בלחץ עצמו, אלא במפל הלחץ.

2. <u>משוואת החום</u>

משוואה זו מתארת את השינויים החלים במאזן האנרגיה החומנית של קליפת מסה כתוצאה מייצור אנרגיה וקרינתה החוצה:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \rho \cdot q - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dL(r)}{dr} - p \frac{dV}{dt} \qquad (3)$$

כאשר:

ε - כמות האנרגיה המוכלת ביחידת נפח. בחישוב השינויים נכללים כל סוגי האנרגיה הפנימית.

V - יחידת נפח.

q - ייצור אנרגיה חומנית על-ידי תהליכים גרעיניים, ליחידת מסה ליחידת זמן $\left(\frac{erg}{s \cdot g}\right)$.
q הוא פונקציה של הטמפרטורה, הצפיפות וההרכב הכימי.

$L(r)$ - הארה (luminosity), כמות האנרגיה ליחידת זמן העוברת החוצה דרך קליפה כדורית שרדיוסה r.

האבר הראשון באגף ימין מייצג את כמות האנרגיה החומנית שנוצרה על-ידי תהליכים גרעיניים ביחידת נפח, ליחידת זמן. האבר השני מייצג את הגידול בהארה שנוצר במעבר האנרגיה לאורך אלמנט רדיוס dr, והאבר השלישי מייצג את העבודה שיחידת נפח עשתה על סביבתה.

חשוב להדגיש את דרך הטיפול המיוחדת באנרגיה הגרעינית. אפשר היה לכתוב משוואה המתארת את מאזן האנרגיה הכללית, הכוללת גם את האנרגיה של התהליכים הגרעיניים, ולחשב את מעבר האנרגיה, אולם בדרך זו תתווספנה לשני האגפים של משוואת מאזן האנרגיה כמויות עצומות של אנרגיה (כמאגר של אנרגיה גרעינית) בעוד שהשינויים התרמיים שבהם אנו מעוניינים קטנים מאוד לעומתם. לכן, מקובל להשאיר את מאגר האנרגיה הגרעינית מחוץ למאזן, ולהתייחס לאנרגיה החומנית הנוצרת בתהליכים גרעיניים בכוכב כנובעת ממקור לא חומני ומתווספת למאזן. כמו כן מזניחים את השינוי במסה הצמוד להפיכת מסה לאנרגיה בתהליכים גרעיניים.

ההארה, L, מבטאת את כמות האנרגיה המוקרנת ליחידת זמן. לגבי הכוכב כולו, הגודל הזה מבטא את הארת הכוכב, אולם כאשר עוסקים בנקודה בתוך הכוכב, השיקולים מורכבים

יותר. במצב של שיווי משקל תרמודינמי, הקרינה היא כמעט איזוטרופית. בכל נקודה קיימת זרימה של אנרגיה מן הנקודה הזו לכל הכיוונים, וזרימה של אנרגיה מסביב אל הנקודה הנדונה. כאשר מסכמים את זרימת האנרגיה לכל הכיוונים, מקבלים את שטף האנרגיה, שהוא התוצאה נטו של הסיכום. בגלל הסימטריה הכדורית, שטף האנרגיה הוא וקטור רדיאלי. שטף האנרגיה אשר יסומן באות H, ניתן ביחידות אנרגיה ליחידת שטח ביחידת זמן. כמות האנרגיה היוצאת מקליפה שרדיוסה r, $L(r)$, מתקבלת על-ידי מכפלת שטף האנרגיה בשטח הפנים של הקליפה:

$$L(r) = 4\pi r^2 H \qquad \text{(א3)}$$

האיבר האחרון, $p\,\frac{dV}{dt}$, מייצג את העבודה שעושה אלמנט נפח על סביבתו תוך כדי התפשטותו, כלומר תהליכים שבהם אנרגיה מכאנית (גרביטציונית) הופכת לאנרגיה חומנית. כאשר הכוכב נמצא במצב עמיד, האברים הכוללים שינויים ישירים בזמן מתאפסים, ונשארת משוואה פשוטה יותר:

$$dL = q\,dm \qquad \text{(ב3)}$$

כאשר:

$$dm = 4\pi^2 \rho\,dr$$

אפשר לייחס את המשוואה (3ב) לקליפת מסה שעוביה dr ומסתה dm.

זו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון להארה, ופירושה, שבמצב עמיד, גידול ההארה בקליפה שווה לייצור האנרגיה הגרעינית באותה קליפה. תקופות ארוכות מאוד בחיי הכוכב (שלב הסדרה הראשית), משוואה (3ב) מתקיימת בקירוב טוב. לחישוב שלבים שבהם מתרחשים שינויים במבנה הכוכב יש לפתור את משוואה (3) בשלמותה.

3. משוואת המסה

משוואת המסה מבטאת את הקשר בין המסה, הנפח והצפיפות.

$$dm = \rho\,dV \qquad (4)$$

המשוואה פשוטה ואפשר להסתכל עליה כעל משוואה המגדירה את הצפיפות בצורה:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad (5)$$

משוואת הצפיפות מנוסחת בצורה זו משתי סיבות: האחת, יש לנו ארבעה משתנים תלויים (T, p, L, m), ולפתרון המערכת דרושות לנו ארבע משוואות דיפרנציאליות, ומשוואה (4) היא אחת מהן. הסיבה השניה היא מהותית יותר - הצפיפות היא פונקציה תרמודינמית, והיא משתנה בהתאם לחלוקת המסה בכוכב. בהשפעתה על הלחץ, קושרת הצפיפות את התנאים התרמודינמיים לחלוקת המסה.

4. משוואת הטמפרטורה

כדי לקבל משוואה לטמפרטורה ניעזר בשיקולים לגבי הכוח שמפעיל לחץ הקרינה. קרינה העוברת בחומר מפעילה עליו כוח אם חלק ממנה נבלע בתוכו, או מתפזר על ידו. תכונות הבליעה של החומר מתוארות על ידי מקדם הבליעה, והן קובעות איזה חלק מן הקרינה ייבלע. העברת האנרגיה ממרכז הכוכב החוצה איננה קרינה ישירה, אלא סדרת תהליכי בליעה ופליטה של אנרגיה בכל קטע של הדרך. כל אלמנט חומר הבולע אנרגיה, פולט אותה שוב כקרינה, בהתאם לתנאים התרמודינמיים שבהם הוא שרוי, לכן מלווה מעבר האנרגיה גם בתהליך של ירידה ברמת האנרגיה (לא פחיתה בכמות האנרגיה), המרה מפוטונים אנרגטיים שנוצרו בטמפרטורות גבוהות, לפוטונים אנרגטיים פחות, שנוצרו בטמפרטורות נמוכות.

אלמנט חומר פולט קרינה איזוטרופית שעצמתה פרופורציונית לחזקה הרביעית של הטמפרטורה. אילו היה הכוכב איזותרמי, היה שדה הקרינה איזוטרופי בכל הכוכב. מכיוון שישנו מפל טמפרטורה מן המרכז החוצה, הרי צופה הנמצא בנקודה כל שהיא בכוכב, רואה שעצמת הקרינה המגיעה אליו מן המרכז, החם יותר, גבוהה מעצמת הקרינה המגיעה אליו מן הצד החיצוני, הקר יותר. (תרומות מן הכיוונים הניצבים לרדיוס מתאזנות, בגלל הסימטריה הכדורית).
ההפרש נטו בין הקרינה שכיוונה החוצה לבין זו שכיוונה פנימה הוא שטף הקרינה העובר בנקודה זו. ככל שאטימות החומר גבוהה יותר, המהלך הממוצע של הפוטונים יהיה קצר יותר, כלומר, הצופה המשווה קרינה הזורמת החוצה לקרינה הזורמת פנימה, משווה מקורות קרינה שהפרש הטמפרטורות ביניהן קטן, ולכן יהיה שטף הקרינה נטו קטן. כאשר האטימות נמוכה, המהלך הממוצע של הפוטונים ארוך יותר, ולכן הפרש הטמפרטורות בין מקורות הקרינה המגיעה אל הצופה, גדול יותר, ושטף הקרינה נטו יהיה גדול יותר. השיקול האיכותי הזה מראה שבמפל טמפרטורה נתון, שטף האנרגיה העובר פרופורציוני הפוך לאטימות החומר.

מפל הטמפרטורה הממוצע בשמש ניתן לחישוב על-ידי חילוק הטמפרטורה במרכזה (עשרה מיליון מעלות) ברדיוס, השווה ל 7×10^{10}cm. מתקבל שהמפל הממוצע הוא 0.001 $\frac{\text{מעלה}}{\text{ס"מ}}$, גודל שנראה זניח, אולם הוא הגודל הקובע את הקשר בין ייצור האנרגיה במרכז השמש לזו הקורנת מפניה.
מקדם האטימות ליחידת מסה, κ, מוגדר כך שהביטוי $\kappa\rho d\ell$ נותן את חלק האנרגיה של הקרן שאבד בבליעה לאורך המרחק $d\ell$.
בגישה היחסותית, האנרגיה הכוללת של גוף ערכה mc^2. לחלקיקים (פוטונים) הנעים במהירות האור ניתן לייחס תנע שערכו $\frac{E}{c} = mc$. לכן, כאשר שטף האנרגיה H, המבוטא ביחידות $\frac{erg}{s\cdot cm^2}$, מתאר זרימת האנרגיה ליחידת שטח, אנו יכולים לייחס לשטף זה גם שטף צפיפות תנע הנתון על ידי $\frac{H}{c}$. הסבר מפורט יותר בנושא זה אפשר למצוא בהסבר של ווקטור פוינטינג*.

* ראה לדוגמה, א. בילדר, פיסיקה מודרנית, יהושע אורנשטיין, הוצאת ספרית יבנה תשל"ג.

הכוח המופעל על החומר שווה לתנע שנמסר לו על ידי הקרינה שנבלעה ליחידת זמן, ולכן הכוח המופעל על יחידת נפח שווה לשטף התנע של הקרינה מוכפל במקדם הבליעה ליחידת נפח. מצד שני אנו יודעים שהכוח הזה שווה למפל לחץ הקרינה p_r, הנתון על ידי (2). לכן אפשר לכתוב את המשוואה:

$$\frac{dp_r}{dr} = \kappa\rho\frac{H}{c} \tag{6}$$

כאשר H הוא שטף הקרינה ליחידת שטח, ושטף התנע של הקרינה ניתן על ידי $\frac{H}{c}$.
κ הוא מקדם הבליעה ליחידת מסה, ולכן $\kappa\rho$ הוא מקדם הבליעה ליחידת נפח.
מ (2) מקבלים:

$$\frac{dp_r}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{3}aT^4\right) = \frac{4aT^3}{3}\frac{dT}{dr} \tag{7}$$

ולכן אם נציב את (7) לתוך (6), וכן נציב את הקשר בין H ו L, לפי (3א) נקבל את המשוואה:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho L(r)}{4acT^3(4\pi r^2)} \tag{8}$$

שהיא משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון לטמפרטורה.

משמעותה של (8) הוא ששטף האנרגיה הכולל L, פרופורציוני למפל הטמפרטורה מוכפל במקדם:

$$-\frac{4acT^3 4\pi r^2}{3\kappa\rho}$$

משוואה (8) מתקיימת כאשר קיים שיווי משקל קרינתי. המשמעות של שיווי משקל קרינתי היא, שהאיבודים בקרינה לאורך קטע $d\ell$ מתאזנים על ידי התוספת לקרינה לאורך אותו קטע. ניתן לנסח זאת בצורה הבאה: אם $I(r)$ היא עצמת הקרינה בנקודה r, אזי חייב להתקיים:

$$\frac{dI}{d\ell} + \kappa\rho I - \frac{1}{4\pi}\rho j = 0 \tag{9}$$

כאשר j מייצג את כמות האנרגיה הקורנת באופן איזוטרופי מיחידת מסה.
ישנם מצבים בהם לא קיים שיווי משקל קרינתי - כמו המצב בפוטוספירה, שבה חלק מן הקרינה נפלט לחלל בצורת הארת הכוכב, או מצב שבו מפל הטמפרטורה הנדרש להעברת האנרגיה הוא כה גדול עד שמתערער שיווי המשקל ההידרוסטטי, נוצרת הסעה של חומר והעברת אנרגיה על ידי הסעה.
במקרים כאלה משוואה (8) אינה תקפה ויש לבחור משוואות אחרות לחישוב.

סיכום

קיבלנו ארבע משוואות דיפרנציאליות: (1), (3), (4) ו- (9), לארבעת המשתנים: T, p, L, ו- m התלויים ב r, ובפונקציות ρ, q, κ. אם יהיו לנו ארבעה תנאי שפה ויהיו לנו ביטויים מתאימים לפונקציות ρ, q, κ, נוכל באופן עקרוני לפתור את ארבע המשוואות ולקבל את מבנה הכוכב.